

転置行列, 正則行列

行列の転置 $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ の行と列を入れ替えてできる $n \times m$ 行列を A の **転置行列** (transpose matrix) とい
い tA で表す: $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$. (転置行列を A^T と表す文献もあるが, A の T 乗との混同を避ける為ここでは用いない.)

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ($\implies$ は「ならば」を表す. $P \Leftarrow Q$ は「 Q ならば P 」を表す.)

一般には

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \implies {}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の転置は行ベクトル ${}^t\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]$ で, その逆も成り立つ. 列ベクトル $\mathbf{x}$ の成分をこの式

を用いて表したり, $\mathbf{x} = {}^t[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ と表すことがある. (紙面の節約の為)

特に, 基本行ベクトル $\mathbf{e}^i$ と基本列ベクトル $\mathbf{e}_i$ について $\mathbf{e}^i = {}^t\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i = {}^t\mathbf{e}^i$.

零ベクトルは行ベクトルと列ベクトルを同じ記号 $\mathbf{0}$ で表したが, これらを区別するときは, $\mathbf{0}$ は列ベクトルを表すとし,
行ベクトルは ${}^t\mathbf{0}$ で表す. 即ち, ${}^t\mathbf{0} = [0 \cdots 0]$.

複素共役行列と随伴行列 行列 $A = [a_{ij}]$ の各成分を共役複素数で置き換えた行列 $[\overline{a_{ij}}]$ を A の **複素共役行列** といい,
 $\overline{A}$ で表す: $(\overline{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

行列 A に対し ${}^t(\overline{A}) = \overline{{}^tA}$ が成り立つので, この両辺 ${}^t\overline{A}$ を A^* と表し, A の**随伴行列**という: $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

A が実行列のときは $A^* = {}^tA$. (随伴行列を $A^\dagger$ と表す文献もある.)

定理 1.1 [転置行列, 複素共役行列, 随伴行列の性質]

- (1) ${}^t({}^tA) = A$, (2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, (3) ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$, (4) ${}^t(sA) = s({}^tA)$.
(1) $\overline{\overline{A}} = A$, (2) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, (3) $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$ (4) $\overline{sA} = s\overline{A}$, (5) A が実行列 $\Leftrightarrow \overline{A} = A$
(1) $A^{**} = A$, (2) $(A+B)^* = A^* + B^*$, (3) $(AB)^* = (B^*)(A^*)$, (4) $(sA)^* = sA^*$

証明 (2), (3) では和, 積が定義されているものとする. $A = [a_{ij}]$ は (m, n) 型, $B = [b_{ij}]$ は (n, ℓ) 型として (3) を示す. (他は容易.)

$${}^t(AB)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^n ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = ({}^tB)({}^tA)_{ij},$$

$$(\overline{AB})_{ij} = \overline{\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{jk}b_{ki}} = \overline{a_{jk}}\overline{b_{ki}} = (\overline{A}\overline{B})_{ij}$$

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3i & 2+i \end{bmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & -3i \\ 2 & 2+i \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3i & 2-i \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3i \\ 2 & 2-i \end{bmatrix}$

正則行列と逆行列 n 次正方行列 A に対し, 次をみたす n 次正方行列 X が存在するとき, A は **正則** (または**正則行列**)
であるという:

$$(1.1) \quad AX = E_n = XA$$

逆行列の一意性 この様な X は, 存在すれば唯1つであることが次の様に示される: Y も (1.1) 式をみたすとする, 即
ち X は $AX = E$, $XA = E$ を, Y も $AY = E$, $YA = E$ をみたすとする. このとき

$$Y = YE = Y(AX) = (YA)X = EX = X$$

となり, 唯1つしかない. (一意的であるという.) この行列 X を A の **逆行列** といい A^{-1} と表す. このとき (1.1) 式は

$$(1.2) \quad AA^{-1} = E = A^{-1}A$$

[単位行列] 単位行列 E は $EE = E$ より正則で, $E^{-1} = E$ である.

[正則でない行列] 正方行列 A のある行, またはある列が $\mathbf{0}$ ならば A は正則でない. なぜなら, A の第 i 行を $\mathbf{0}$ と
すると $(AX)_{ii} = 0$ となり, $AX = E$ となる行列 X は存在しない. 列についても同様に, A の第 j 列を $\mathbf{0}$ とすると
 $(XA)_{jj} = 0$ となり, $XA = E$ となる行列 X は存在しない.

定理 1.2[逆行列の性質] A, B が n 次正則行列ならば, A^{-1} , AB , tA , $\overline{A}$, A^* はいずれも正則で, 逆行列は

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$, (2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, (3) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$, (4) $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$, (5) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

証明 A, B は正則なので逆行列 A^{-1}, B^{-1} は存在している. 従って, C を $A^{-1}, AB, {}^tA$ 等とすると, (1)-(5) 式の右边を X とおいて $CX = E = XC$ をみたすことを確かめれば, 逆行列の一意性より X は C の逆行列になる.

(1) $C=A^{-1}, X=A$ とおくと (1.2) 式より $CX = A^{-1}A = E = AA^{-1} = XC$.

(2) $C=AB, X=B^{-1}A^{-1}$ とおいて CX, XC を計算すると:

$$CX=(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E. \quad XC=(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=E.$$

(3) $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ の転置をとると, ${}^t(A^{-1}A) = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE = E$. 一般に $({}^tB)({}^tA) = {}^t(AB)$ より,

$$CX = {}^tA({}^tA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = E, \quad XC = {}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = E. \quad (4), (5) \text{ も同様.}$$

(3), (4), (5) により, これらは単に ${}^tA^{-1}, \overline{A^{-1}}, A^{*-1}$ と表せる.

注 $A = {}^t({}^tA) = \overline{\overline{A}} = (A^*)^*$ なので, この定理の A を ${}^tA, \overline{A}, A^*$ に置き換えれば,

「 ${}^tA, \overline{A}, A^*$ のいずれかが正則 $\Rightarrow A$ は正則」が成り立ち, この定理と合わせて,

- $A, {}^tA, \overline{A}, A^*$ のいずれかが正則 $\Rightarrow$ これら全てが正則である.

また, 命題「 $P \Rightarrow Q$ 」と対偶命題「 Q でない $\Rightarrow P$ でない」は同値なので, 一方が示されると他方も示されたことになる. 従って,

- AB が正則でない $\Rightarrow A, B$ のどちらかは正則でない.
- $A, {}^tA, \overline{A}, A^*$ のいずれかが正則でない $\Rightarrow$ これら全ては正則でない.

帰納的に次が成り立つ: ${}^t(A_1A_2 \cdots A_k) = {}^tA_k {}^t(A_1A_2 \cdots A_{k-1}) = ({}^tA_k) \cdots ({}^tA_2)({}^tA_1), (A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

注 一般に $AX = E$, または $XA = E$ をみたす正方行列が存在すれば A は正則で, X は A の逆行列になることが第2章, 第3章で示される.

正方行列 n 次正方行列 A, B には和, 積が常に定義され, スカラー倍, 転置, 複素共役, 随伴行列をとる操作も含め演算結果はまた n 次正方行列になる. 即ち, n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{C})$ はこれらの演算で閉じている.

正方行列のべき乗 正方行列 A を k 個掛け合わせた積 $AA \cdots A$ を A^k と表し, A の k 乗 (またはべき乗, 累乗) という. («べき» は, 冪, または巾と書く.) $A^0 = E$ とし, A が正則のときは $A^{-k} = (A^{-1})^k$ とする:

$$A^k A^\ell = A^{k+\ell} = A^\ell A^k, \quad (A^k)^\ell = A^{k\ell}. \quad ((AB)^2 = ABAB \text{ (一般には } \neq A^2B^2 \text{).})$$

$A^k = O$ となる k があるとき A をべき零行列, $A^2 = A$ となるとき A をべき等行列という.

有用な行列 正方行列 $A = [a_{ij}]$ は

- ${}^tA = A$ をみたすとき **対称行列** ($a_{ij} = a_{ji}$),
- $A^* = A$ をみたすとき **エルミート (Hermite) 行列** ($a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (特に $a_{ii} \in \mathbb{R}$)),
- ${}^tA = -A$ をみたすとき **交代行列** ($a_{ij} = -a_{ji}$ (特に $a_{ii} = 0$)) という. また,
- $(A^*)A = E$ をみたすとき **ユニタリー (Unitary) 行列** という. (上の注より $A^* = A^{-1}$.)
- 実行列であるユニタリー行列 ($(A^*)A = E, \overline{A} = A$) を **直交行列** という.

例 次の行列は順に, 対称行列, 交代行列, エルミート行列, 直交行列, 直交行列 (回転行列という) である.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & 2i \\ 2 & -2i & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

三角行列 行列の対角線より下の (または上の) 成分が全て 0 である正方行列を上三角行列 (または 下三角行列) という, 総称して単に **三角行列** という. 上三角行列 $A = [a_{ij}]$ ($i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$) は

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{略して} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & * \\ & \ddots \\ O & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & * \\ & \ddots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(* は 0 とは限らない成分が並んでいることを表す.)

特に, 対角成分以外の成分が全て 0 である正方行列を **対角行列** という. (上で * が O になる.)

単位行列の定数倍 aE は対角行列で, **スカラー行列** という. 対角行列は上三角かつ下三角行列で, 対称行列でもある.

- 上三角行列同士の積は上三角行列になり, 積の対角成分は対応する対角成分の積になる. 下三角行列でも同様.

上三角行列の積

$$\begin{bmatrix} a_{11} & * \\ & \ddots \\ O & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & * \\ & \ddots \\ O & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & * \\ & \ddots \\ O & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

- 上 (下) 三角行列の転置行列は下 (上) 三角行列になる.

注 正方行列でない場合も上 (下) 三角行列ということがある.