

複素数

実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と表す. 「 x は実数である」と書く代わりに 「 $x \in \mathbb{R}$ 」と書く.

虚数単位を i または $\sqrt{-1}$ で表す: $i^2 = -1$, $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $yi = iy$

複素数 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し, 実部 x を $\operatorname{Re} z$, 虚部 y を $\operatorname{Im} z$ と表す:

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$$

$0 + 0i = 0$, $x + 0i = x$ とし, 実数と考える. $y \neq 0$ のとき **虚数**, さらに $x=0$ のとき yi を**純虚数**という.

複素数の四則演算 (和, 差, 積, 商) は i の一次式の様に計算し, i^2 を -1 で置き換える: $w = u + vi$ ($u, v \in \mathbb{R}$) として,

$$\begin{aligned} z \pm w &= (x \pm u) + (y \pm v)i, & zw &= (x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i, \\ z/w &= \frac{z}{w} = \frac{x + yi}{u + vi} = \frac{(xu + yv) + (xv - yu)i}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

で定義され, 結合法則, 交換法則, 分配法則が成り立つことが計算により示される.

z の **共役** (きょうやく) **複素数** (あるいは**複素共役**) $x - yi$ を $\bar{z}$ と表す. 即ち

$$z = x + yi \implies \bar{z} = x - yi$$

このとき, $z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} (1) \quad \bar{\bar{z}} &= z & (2) \quad \operatorname{Re} z &= \frac{z + \bar{z}}{2} & (3) \quad \operatorname{Im} z &= \frac{z - \bar{z}}{2i} \\ (4) \quad \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} & (5) \quad \overline{zw} &= \bar{z} \cdot \bar{w} & (6) \quad z = \bar{z} &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad (z=x, y=0) \end{aligned}$$

が両辺を計算することにより示せる. 例えば (5) は

$$\text{左辺} = \overline{(xu - yv) + (xv + yu)i}, \quad \text{右辺} = (x - yi)(u - vi) \quad \therefore \quad \text{両辺} = (xu - yv) - (xv + yu)i$$

(4,5) より, 例えば $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$) について

$$(7) \quad \overline{\left(\sum_{i=1}^n z_i w_i\right)} \stackrel{(4)}{=} \bar{z}_1 \bar{w}_1 + \dots + \bar{z}_n \bar{w}_n \stackrel{(5)}{=} \bar{z}_1 \cdot \bar{w}_1 + \dots + \bar{z}_n \cdot \bar{w}_n = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot \bar{w}_i$$

複素数 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し, $\sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値** といい, $|z|$ で表す.

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0 \quad \text{より} \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

このとき, $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$ より

$$|zw| = |z||w| \quad \text{また,} \quad \frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$$

複素平面 複素数 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) は座標平面上の点 $P(x, y)$ とみなされる. 複素数を座標平面上の点で表すとき, この平面を**複素平面**, **複素数平面**, または **ガウス (Gauss) 平面** という. 複素平面では x 軸を**実軸**, y 軸を**虚軸** という. このとき, 複素平面上の点 P を $P(z)$ と表す. また, 点 z とも書く.

z はベクトル $\overrightarrow{OP}$ ともみなされる. このとき $\overrightarrow{OP}$ の長さ (= 大きさ = OP 間の距離) OP は

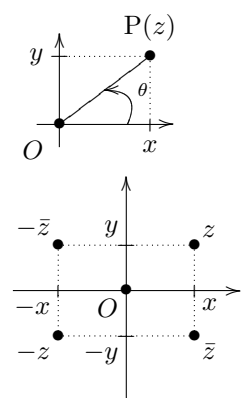
$$OP = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

複素数の和, 差, 実数倍はベクトルの和, 差, 実数倍に対応する. 二点 $P(z)$, $Q(w)$ の距離は $PQ = |z - w|$ であり, $R(z + w)$ とするとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, $OR \leq OP + OQ$ より

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

複素数の極形式 $P(z)$, ($z = x + yi$) を極座標 (r, θ) で表すとき, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ より

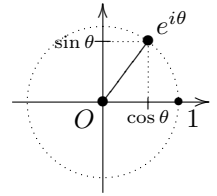
$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2})$$



これを複素数 z の **極形式** という. r は z の **絶対値** であり, θ は z の **偏角**(argument) といわれ, $\arg z$ と表される. θ は弧度法で表される一般角とする.

オイラーの公式 次の式を **オイラー (Euler) の公式** という:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



これは, 微積分学における e^x の展開式に $x = i\theta$ を代入すると収束し, 実部が $\cos \theta$, 虚部が $\sin \theta$ に収束するので等号が成り立つことが分る. 即ち

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots = (1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

$\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$ であり, 指数法則 $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ は三角関数の加法定理に対応する:

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \end{aligned}$$

(これより $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ から加法定理の式が得られる.)

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ とするとき,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad z_1 / z_2 = (r_1 / r_2)(e^{i\theta_1} / e^{i\theta_2}) = (r_1 / r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\ \therefore \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg z_1 / z_2 = \arg z_1 - \arg z_2 \end{aligned}$$

(点 $z_1 z_2$ は, 点 z_1 を原点 O を中心として r_2 倍し, O のまわりに θ_2 だけ回転した点を表す.)

ド・モワブル (de Moivre) の公式 整数 n に対して $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ より次のド・モワブルの公式を得る:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

1 の n 乗根 $z^n = 1$ の根 (こん) (解のこと) は, $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ とおけば, $\cos n\theta = 1$, $\sin n\theta = 0$ より

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = e^{i \frac{2\pi k}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(z_k は $z_0 = 1$ を 1 つの頂点とする, 単位円 (= 中心 O 半径 1 の円) に内接する正 n 角形の頂点.)

代数学の基本定理 代数方程式 (= n 次方程式) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$, $n \geq 1$) は複素数の範囲で少なくとも 1 つの根をもつ. ($a_0, \dots, a_n$ は一般には複素数.)

(この証明はいろいろ知られているが, 初等的証明でも 2 変数関数の微積分学の結果を使うので証明は略す.)

この定理と因数定理 ($f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - \alpha)g(x)$) を用いれば帰納法により次を得る:

系 n 次多項式は n 個の一次式の積に分解される:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

ここで, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の中に同じものがあっても良い. 従って n 次方程式は重複も数えてちょうど n 個の根をもつ. 同じ根をまとめて, 相異なる根を $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ とすると

$$f(x) = (x - \beta_1)^{m_1} (x - \beta_2)^{m_2} \cdots (x - \beta_k)^{m_k}, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

と表される. m_i を β_i の **重複度** (multiplicity) といい, β_i を m_i **重根** という. なお, 1 重根を単根といい, 2 重根は単に 重根といわれることがある.