

行列 (matrix)

[行列]: 行列とは数や文字, 式等の組を長方形の形に並べた配列の事. 行列を構成する数や文字を**成分**といい, 成分の横の並びを **行** (row), 縦の並びを **列** (column) という. 数は**複素数**の範囲で考える.

例: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.5, \pi, 1+2i \\ \sqrt{2}, \frac{2}{5}, -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$

上の例の様に行列は $[]$ や $()$ 等の括弧で囲んで書き, 数や文字は通常空白で区切るが, 「,」を用いる事も多い.

次の様に連立一次方程式の係数や未知数, 定数項等を取り出して並べると行列になる:

$$(*) \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 4z = 2 \end{cases} \mapsto A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \left((*) \Leftrightarrow Ax = b \right).$$

また, 縦横の表形式のデータから数値のみを並べれば行列を得る.

行は上から順に第1行, 第2行, $\dots$ といい, 列は左から順に第1列, 第2列, $\dots$ という. また, m 個の行, n 個の列からなる行列を **m 行 n 列の行列**, **(m, n) 型の行列**, **$m \times n$ 行列**, などという. 特に $m=n$ のとき, (n, n) 型の行列を **n 次正方行列**, 略して **正方行列**, **n 次行列** などという. $(1, n)$ 型の行列を **n 次元**, または **n 次の行ベクトル (横ベクトル)** といい, $(m, 1)$ 型の行列を **m 次元**, または **m 次の列ベクトル (縦ベクトル)** といい, これらを総称して **数ベクトル** という. $(1, 1)$ 型の行列 $[a]$ は数 a とみなされる.

行列は $A, B, \dots$ の様に大文字で表し, その成分は a_{ij} の様に小文字で表す事が多く, 行ベクトル, 列ベクトルは太い小文字 $a, b, \dots, x, y, \dots$ で表す.

一般に $m \times n$ 行列 A は mn 個の文字や数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) を用いて次の様に表される:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{略して} \quad A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}, \quad A = [a_{ij}].$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\cdots$ 第1行
 $\cdots$ 第2行
第1列
第2列
第3列

なお, この一般形は 2×2 行列や 1×1 行列も含んでいるものとする.

上から i 番目, 左から j 番目の成分 a_{ij} を **(i, j) 成分** という. (添字 ij は左側の i が行番号, 右側の j が列番号を表す.) ここでは行列 A の (i, j) 成分を $(A)_{ij}$ と表す.

特に (i, i) 成分 $a_{11}, a_{22}, \dots$ を総称して **対角成分** といい, それらを結ぶ線を行列の**対角線** (または**主対角線**) という. **第 i 行** (あるいは**第 i 行ベクトル**) は上から i 番目の成分の横の並びであり, ここでは a^i と表す. **第 j 列** (あるいは**第 j 列ベクトル**) は左から j 番目の縦の並びであり, a_j と表す:

$$a^i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}], \quad a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

(a^i の上付き添え字の i は単なる添え字であり, a の i 乗を表すものではない. 一般にベクトルの i 乗は定義されない.)

(m, n) 型行列 A は行ベクトル $a^1, \dots, a^m$ を縦に, 列ベクトル $a_1, \dots, a_n$ を横に並べたものとみなされる:

$$A = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}, \quad A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$$

前者を行列 A の**行ベクトル分割**, 後者を A の**列ベクトル分割** (略して **行分割**, **列分割**) という.

成分がすべて実数である行列を **実行列** という. 同様に, 成分がすべて整数, 有理数, 複素数である行列をそれぞれ**整数行列**, **有理行列**, **複素行列** という. 単に行列といえば複素行列を表すものとする.

なお, 例は主として整数行列や有理行列を用いるが, 応用上は実行列が使われることも多く, 複素行列を用いる必要があることもある.

[行列の演算: 相等, 和, 差, スカラー倍]

行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ が **同じ型 (型が同じ)** (例えば共に (m, n) 型) とする. このとき

[**行列の相等**] 同じ型の行列 A, B の対応する (i, j) 成分が全て等しいとき A と B は **等しい** といい $A = B$ と表す:

$$A = B \iff \text{型が同じで, 全ての } i, j \text{ について } a_{ij} = b_{ij} \quad ((A)_{ij} = (B)_{ij})$$

$$A \neq B \iff \text{型が異なるか, 又はある } i, j \text{ について } a_{ij} \neq b_{ij} \quad ((A)_{ij} \neq (B)_{ij})$$

[行列の和, 差] 同じ型の行列 A, B には **和, 差** が成分ごとの和, 差 $A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$ として定義される:

$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$, $(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij}$. 型が異なるときは和, 差は定義されない.

[行列のスカラー倍] 行列と対比して, 通常の数 **スカラー** (scalar) という. 行列 A とスカラー s に対し, 各成分を s 倍した行列 $[sa_{ij}]$, $[a_{ij}s]$ を A の s 倍といい, sA, As と書く. $(sA)_{ij} = (As)_{ij} = s(A)_{ij}$

なお, A の (-1) 倍 $(-1)A$ は $-A$ と表す. また, $A-B = A + (-B)$ より, 差は和とスカラー倍で表せる.

$$\begin{aligned} \text{例 1 } A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad 3A-B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1, & 3 \cdot 2, & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4, & 3 \cdot 5, & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1-0, & 3 \cdot 2-4, & 3 \cdot 3-(-2) \\ 3 \cdot 4-1, & 3 \cdot 5-3, & 3 \cdot 6-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 11 \\ 11 & 12 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行列の積: まず, 同じ次元 (次数) の行ベクトル $\mathbf{a}$ と列ベクトル $\mathbf{b}$ の積 $\mathbf{ab}$ を, 対応する成分の積の和と定める:

$$\mathbf{ab} = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad (\text{例: } [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32)$$

一般に, $A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列, $B = [b_{ij}]$ を $n \times \ell$ 行列とすると, A の行ベクトル $\mathbf{a}^i$ と, B の列ベクトル $\mathbf{b}_j$ の次元は一致するのでそれらの積が考えられる. そこで, A と B の積 AB はその (i, j) 成分 $(AB)_{ij}$ が $\mathbf{a}^i \mathbf{b}_j$ である $m \times \ell$ 行列と定める: (下で和の添え字 k が隣り合っていることに注意)

$$(AB)_{ij} = \mathbf{a}^i \mathbf{b}_j = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (B)_{kj} \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, \ell),$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{n\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_\ell \\ \vdots & & \mathbf{a}^i \mathbf{b}_j & & \vdots \\ \mathbf{a}^m \mathbf{b}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}^m \mathbf{b}_\ell \end{bmatrix}$$

注 A の列数と B の行数が一致しないときは積は定義されない.

例 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ とするとき, A は $(2, 3)$ 型, B は $(3, 2)$ 型なので積 AB, BA はともに定義され, AB は $(2, 2)$ 型, BA は $(3, 3)$ 型なので $AB \neq BA$ であり,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2, & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2, & 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 17 & 26 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 17 & 22 & 27 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

例 3 連立一次方程式 $(*) \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 4z = 2 \end{cases}$ において $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ とおくと,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ x + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

この様に, 行列の積は, 係数を並べた行列と未知数を並べた列ベクトルの積が連立一次方程式の左辺を表す様に定められている.

一般に, 積は A を行ベクトルに分割し, B を列ベクトルに分割して表すと

積のベクトル分割

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_\ell] = [A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_\ell] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_\ell] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_\ell \\ \vdots & & \mathbf{a}^i \mathbf{b}_j & & \vdots \\ \mathbf{a}^m \mathbf{b}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{a}^m \mathbf{b}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m B \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n$$