

## 演習 5 解答例

### 問題 1.

外部から印加される振動電界  $E_0 \exp(j\omega t)$  によって固体中の電子が振動するローレンツの振動子モデルを使って、複素比誘電率の角周波数応答を求め、実部と虚部を式で示しなさい。

(比誘電率を  $\epsilon_r \equiv \epsilon_1 - j\epsilon_2$  とおいたとき、実部  $\epsilon_1$  と虚部  $\epsilon_2$  を式で表示する.)

#### (解答例)

分極に關与する原子 or 分子の密度:  $n$

電子の偏位(平衡位置からのずれ):  $x$

とすると、分極  $P$  は、次のように表される.

$$P = enx \quad \dots (1)$$

また、分極  $P$  の大きさが電界  $E$  の 1 次 に比例する場合、電気感受率を  $\chi$  とすると、

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad \dots (2)$$

$$\text{式(1)と式(2)から, } enx = \epsilon_0 \chi E \Leftrightarrow \chi = \frac{\epsilon_0 \chi}{en} E \quad \dots (3)$$

固体内の電束密度  $D$  は  $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 (1 + \chi) E = \epsilon_0 \epsilon_r E$

ここで比誘電率  $\epsilon_r \equiv 1 + \chi \quad \dots (4)$

と定義した. 式(4)より  $\chi$  を  $\epsilon_r$  で表し、式(3)に代入すると、次のようになる.

$$\chi = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{en} E \quad \dots (5)$$

固体の外部から印加される電界を  $E = E_0 \exp(j\omega t)$  とすると、外部電界から力を受ける質量  $m$ 、電荷  $e$  (+e と -e の双極子の場合)の振動子の運動方程式は次のように表される(ローレンツの振動子モデル). (相対運動の方程式だから本来  $m$  は換算質量を用いるべきだが、電子と原子核の場合は質量比が大きいのでほぼ電子の質量としてよい.  $m_a$  と  $m_b$  の換算質量  $1/\mu = 1/m_a + 1/m_b$ )

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + \beta x = eE \quad \dots (6)$$

ここで  $\gamma$  は摩擦を表し、 $\beta$  はバネ定数を意味する。  $E = E_0 \exp(j\omega t)$ 、および偏位を  $x = x_0 \exp(j\omega t)$  とおいて運動方程式に代入すると  $x_0$  が求まり次のようになる.

$$x = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega} E_0 \exp(j\omega t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega} E \quad \dots (7)$$

ただし、 $\omega_0 = \sqrt{\beta/m}$  とおいた.

式(7)と式(5)が等価であることから、 $E$  の係数を等しいとおくと、

$$\frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{en} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}$$

第 2 項を実部と虚部に分けると

$$\Leftrightarrow \varepsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} - j \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

以上から、 $\varepsilon_r = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$  としたとき、

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

