

光物性基礎とデバイス応用

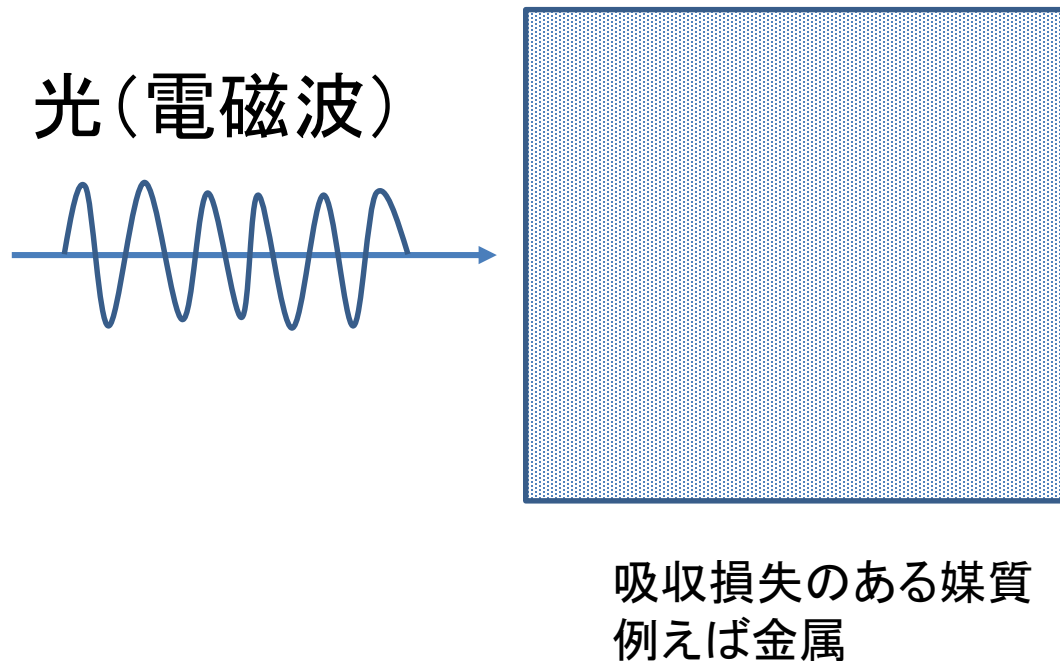
損失媒質中の 電磁波の伝搬

- 複素数に拡張された誘電率,屈折率,導電率
- 損失媒質中の電磁波の表現
- 表皮厚さ
- 自由電子による光の吸収
- 金属および半導体の誘電率と周波数特性

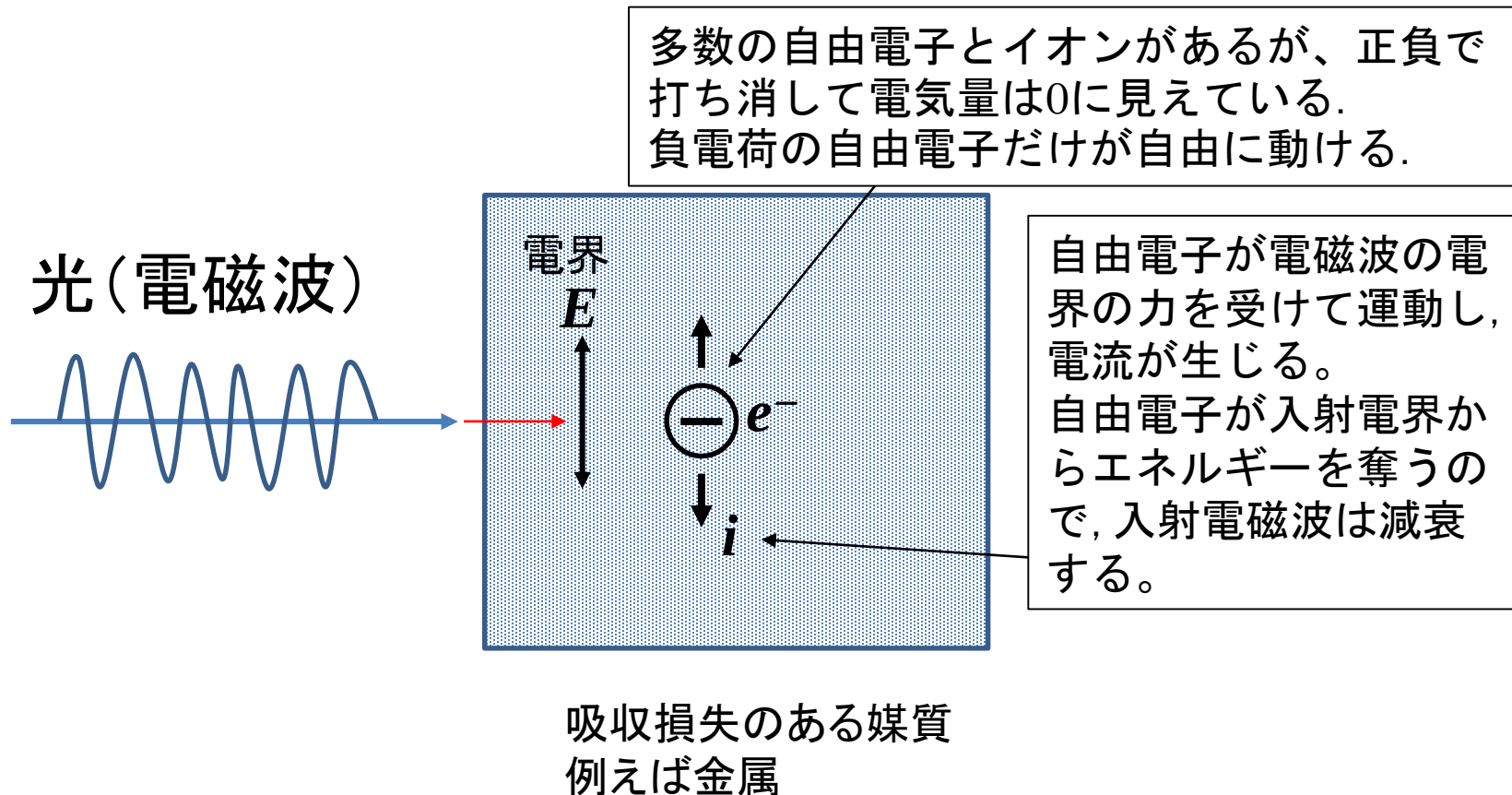
まとめ

- Maxwell方程式から電磁波を導出できる
- 真空中と固体中を伝搬する電磁波の相違について説明できる.
 - 光速, 誘電率, 屈折率, 偏光
- 周波数帯とその応用を理解した

吸収のある媒質への光の入射と伝搬



吸収のある媒質への光の入射と伝搬



吸収のある物質中の電磁波

Maxwell方程式の中の

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{i} + j\omega \mathbf{D} \quad (\text{アンペール・マクスウェルの法則})$$

および

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

を用いる.

そして今回は, 電流密度 $\mathbf{i} \neq 0$ を仮定する. さらに,
電流が生じるメカニズムとして, オームの法則を仮定する.

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{オームの法則})$$

$\mathbf{i}$ を代入すると

$$\nabla \times \mathbf{H} = \boxed{\mathbf{i}} + j\omega \mathbf{D} = \boxed{\sigma \mathbf{E}} + j\omega \boxed{\varepsilon} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \boxed{\varepsilon_r \varepsilon_0} \mathbf{E} = j\omega \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \mathbf{E} \equiv j\omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r \mathbf{E}$$

ε_0 でくくる

ただし, 複素比誘電率 $\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$ を定義した.

複素導電率と複素誘電率の導入

ここでさらに、複素導電率 $\sigma \equiv \sigma_r - j \sigma_i$ を定義する。
すると、

交流回路のアドミッタンス(i/E)に相当. 実部は抵抗成分, 虚部は電磁波に対する等価回路の L, C 成分に由来する. $\therefore$ 直流では $\sigma_i = 0$

$$\hat{\epsilon}_r = \epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \epsilon_r - j \frac{\sigma_r - j \sigma_i}{\omega \epsilon_0} = \underbrace{\left(\epsilon_r - \frac{\sigma_i}{\omega \epsilon_0} \right)}_{\text{実部}} - j \underbrace{\frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0}}_{\text{虚部}} \equiv \epsilon_r' - j \epsilon_r''$$

実部と虚部に分ける

$$\begin{cases} \epsilon_r' = \epsilon_r - \frac{\sigma_i}{\omega \epsilon_0} \\ \epsilon_r'' = \frac{\sigma_r}{\omega \epsilon_0} \end{cases}$$

- $\sigma = 0$ ($\sigma_r = \sigma_i = 0$) のとき, $\hat{\epsilon}_r = \epsilon_r$ (実数) $\rightarrow$ これまでと同じ
- $\sigma \neq 0$ のとき $\hat{\epsilon}_r$ は複素数となる.
- この状況では, オーミックな抵抗成分に由来して, ϵ_r が複素数になっている.
- 誘電率が複素数になる原因は他にもある. 例えば, 電界に対して分極の動きが遅れることなど(後述). しかし, ここでは抵抗による成分のみを考える.

複素屈折率

誘電率が複素数になるので,屈折率も複素数になる

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \overset{\text{リンク}}{\approx} \sqrt{\epsilon_r} \overset{\text{複素誘電率へ拡張}}{\rightarrow} \sqrt{\hat{\epsilon}_r} \overset{\text{リンク}}{=} \sqrt{\epsilon'_r - j\epsilon''_r} = n - j\kappa$$

屈折率の実部

屈折率の虚部
(消衰系数という)

次に, 屈折率の実部 n と虚部 $\kappa \Leftrightarrow$ 誘電率の実部 ϵ'_r と虚部 ϵ''_r の関係式を求めよう.

複素屈折率と複素誘電率の関係

定義により

$$\sqrt{\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r} = n - j\kappa$$

両辺2乗して

$$\begin{aligned}\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r &= (n - j\kappa)^2 \\ &= n^2 - \kappa^2 - j2n\kappa\end{aligned}$$

実部と虚部をそれぞれ等しいとおいて

$$\begin{cases} \varepsilon'_r = n^2 - \kappa^2 \\ \varepsilon''_r = 2n\kappa \end{cases}$$

n, κ について逆に解くと

$$\left. \begin{matrix} n \\ \kappa \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2} \pm \varepsilon'_r \right)}$$

複号は $\begin{cases} +がn \\ -が\kappa \end{cases}$

複素屈折率と複素誘電率の関係

$$\left. \begin{matrix} n \\ \kappa \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2} \pm \varepsilon_r' \right)} \quad \text{複号は} \quad \begin{cases} + \text{が} n \\ - \text{が} \kappa \end{cases}$$

誘電率の虚部が実部に比べてとても小さい時, すなわち,
 $\varepsilon_r' \gg \varepsilon_r''$ の時, $n \approx \sqrt{\varepsilon_r'}$ および, $\kappa = \frac{\sigma_r}{2n\omega\varepsilon_0}$

誘電率の実部が虚部に比べてとても小さい時, すなわち,

$$\varepsilon_r' \ll \varepsilon_r'' \text{ の時, } n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_r''}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma_r}{2\omega\varepsilon_0}} \quad (\text{マイクロ波・ミリ波で成り立つ})$$

- 直流～低周波では、屈折率～誘電率の実部の平方根
- マイクロ波以上の高周波では、屈折率～誘電率の虚部の1/2の平方根

複素屈折率中の電磁波の伝搬

固体中を伝搬する電磁波の電界を次の式で表す。

$$E = E_0 e^{-jkz} \quad (+z \text{方向へ進む進行波})$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \hat{n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - j\kappa)$$

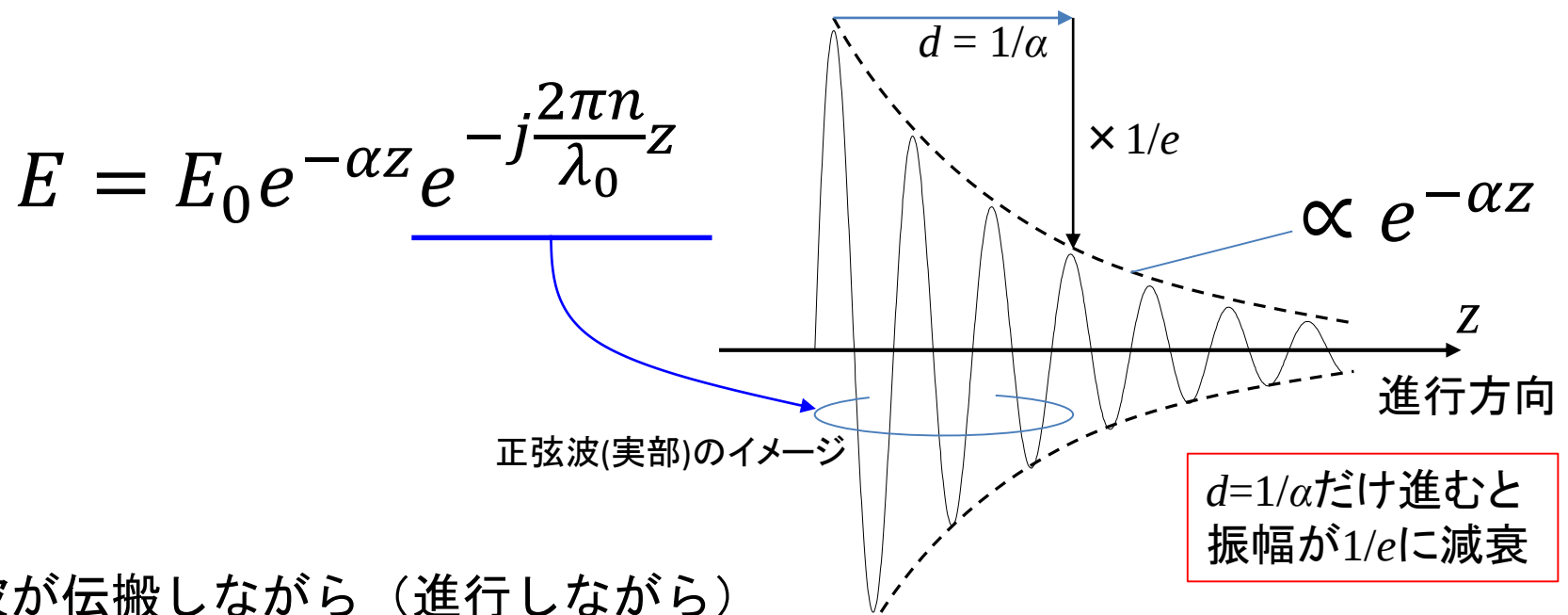
$$= E_0 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - j\kappa) z}$$

$$= E_0 e^{-\frac{2\pi\kappa}{\lambda_0} z} e^{-j \frac{2\pi n}{\lambda_0} z} \equiv E_0 e^{-\alpha z} e^{-j \frac{2\pi n}{\lambda_0} z}$$

減衰係数

$$\alpha \equiv \frac{2\pi\kappa}{\lambda_0} = \frac{\omega\kappa}{c}$$

複素屈折率中での電磁波の伝搬



- 波が伝搬しながら（進行しながら）減衰していく様子を表している.
- 屈折率に虚数部 κ があると $\alpha \neq 0$ で減衰が生じる.
- 屈折率の虚数部は比誘電率の虚数部で生じているので, 減衰（損失）のもとは比誘電率の虚数部.
- エネルギーは電界振幅の2乗に比例するので, エネルギーの減衰係数（吸収係数）は 2α となる.
- 電磁波が入射すると、その電界が内部の電子に運動エネルギーを与える（ジュール損が生じている）ので, 電磁波のエネルギーが減少する.

※オームの法則を仮定したことで,ジュール損失が生じている

表皮厚さ

表面から $d = 1/\alpha$ のところで電界振幅が $1/e$ になる.
 $\Rightarrow d$ を, **表皮の厚さ**、あるいは**侵入長**という

表皮厚さ

$$\varepsilon_r' \gg \varepsilon_r'' \text{ の時, } d = \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{\omega \kappa} \approx \frac{2nc\varepsilon_0}{\sigma_r}$$

$$\kappa = \frac{\sigma_r}{2n\omega\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_r' \ll \varepsilon_r'' \text{ の時, } d = \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{\omega \kappa} \approx \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma_r}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_r \omega}}$$

$$\kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma_r}{2\omega\varepsilon_0}}$$

(マイクロ波・ミリ波で成り立つ)

まとめ

- 誘電率,屈折率,導電率の複素数への拡張の意味を説明できる.また,式を導出できる
- 損失媒質中の電磁波の表式を導出できる
- 表皮厚さの定義,材料による違いを説明できる
- 自由電子による光の吸収の力学について,式を立てて解ける
- 金属および半導体の誘電率と周波数特性を説明できる