講義ノート　第 2 回　　［教科書の該当箇所：1.5 節（p.18～21）、3.5 節（p.56～59）］

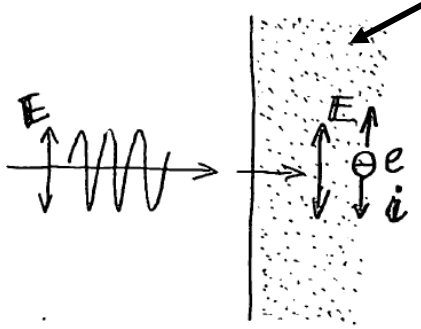
・吸収のある物質への光入射、複素屈折率、吸収、表皮効果

・自由電子吸収、光の電界に対してオームの法則は成り立つか、自由電子プラズマ（金属）

・種々の光吸収

吸収のある物質への光入射

たとえば金属



多数の自由電子とイオンがあるが、正負で打ち消して電気量は 0 に見えている。負電荷の自由電子だけが自由に動ける。

自由電子が電磁波の電界の力を受けて運動し、電流が生じる。
自由電子が入射電界からエネルギーを奪うので、入射電磁波は減衰する。

吸収のある物質中の電磁波

Maxwell の方程式の中の

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{i} + j\omega \boldsymbol{D}$$

および

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{i} \neq 0 \ \rightarrow \quad \boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$$（オームの法則）

を用いて調べる。

オームの法則は光に対しても成り立つ。
ただし、あとで詳しく説明するが、光では導電率 σ が複素数になっている。
そこで、$\sigma = \sigma_r - j\sigma_i$ とおく。
直流（$\omega = 0$）では$\sigma_i = 0$ である。

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + j\omega \boldsymbol{D} = \sigma \boldsymbol{E} + j\omega\varepsilon \boldsymbol{E} = \sigma \boldsymbol{E} + j\omega\varepsilon_r\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = j\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\boldsymbol{E} \equiv j\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}_r \boldsymbol{E}$$

複素比誘電率 $\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_r - j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \left(\varepsilon_r - \dfrac{\sigma_i}{\omega\varepsilon_0}\right) - j\dfrac{\sigma_r}{\omega\varepsilon_0} \equiv \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$

実部　虚部

$$\begin{cases} \sigma = 0(\sigma_r = \sigma_i = 0)\text{のとき } \hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_r \text{（実数）→これまでと同じ} \\ \sigma \neq 0 \text{ のとき } \hat{\varepsilon}_r \text{は複素数} \end{cases}$$

（ここでは自由電子によってε_rが複素数になっている。
誘電率が複素数になる原因は他にもあるが（分極の動きの遅れなど）
ここでは電子によるものだけを考えている）

<u>複素屈折率</u>

誘電率が複素数になるので、屈折率も複素数になる。

複素屈折率　$\hat{n} = \sqrt{\hat{\varepsilon}_r} = \sqrt{\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r} \equiv n - j\kappa$

屈折率の実部　　屈折率の虚部（消衰係数という）

屈折率の実部と虚部を具体的に求める。

$\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r = (n - j\kappa)^2$ から $\varepsilon'_r = n^2 - \kappa^2$ および $\varepsilon''_r = 2n\kappa$　となるので

$$\left.\begin{matrix} n \\ \kappa \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\varepsilon'^2_r + \varepsilon''^2_r} \pm \varepsilon'_r\right]} \qquad \begin{cases} +\text{が } n \\ -\text{が } \kappa \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon'_r \gg \varepsilon''_r \text{のとき } n \cong \sqrt{\varepsilon'_r} \text{ および } \kappa \cong \dfrac{\varepsilon''_r}{2n} = \dfrac{\sigma_r}{2n\omega\varepsilon_0} \\ \varepsilon'_r \ll \varepsilon''_r \text{のとき } n \cong \kappa \cong \sqrt{\dfrac{\varepsilon''_r}{2}} = \sqrt{\dfrac{\sigma_r}{2\omega\varepsilon_0}} \quad \text{(マイクロ波・ミリ波で成り立つ)} \end{cases}$$

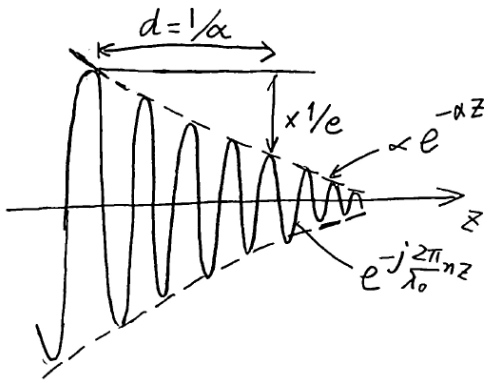
屈折率が複素数のとき、伝搬する電磁波の電界は

$E = E_0 e^{-jkz}$　(+z 方向へ進む波)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0}\hat{n} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n - j\kappa)$$

$$= E_0 e^{-\frac{2\pi\kappa}{\lambda_0}z} e^{-j\frac{2\pi n}{\lambda_0}z} \equiv E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\frac{2\pi n}{\lambda_0}z}$$

減衰係数 $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\kappa = \dfrac{\omega}{c}\kappa$



波動が伝搬しながら（進行しながら）減衰。 屈折率に虚数部 κ があると $\alpha \neq 0$ で減衰が生じる。

屈折率の虚数部は比誘電率の虚数部で生じているので、減衰（損失）のもとは比誘電率の虚数部。

エネルギーは電界振幅の 2 乗に比例するので、エネルギーの減衰係数(吸収係数)は 2α 。

（電磁波が入射すると、その電界が内部の電子に運動エネルギーを与えるので、電磁波のエネルギーが減少する。）

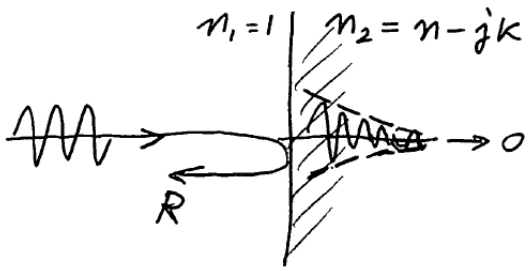
表面から$z = 1/\alpha \equiv d$ （表皮の厚さ、あるいは侵入長という）のところで電界振幅が $1/e$ になる。

表皮の厚さ
$$\begin{cases} \varepsilon'_r \gg \varepsilon''_r \text{のとき} \quad d = \dfrac{c}{\omega\kappa} \cong \dfrac{2nc\varepsilon_0}{\sigma_r} \\ \varepsilon'_r \ll \varepsilon''_r \text{のとき} \quad d = \dfrac{c}{\omega\kappa} \cong \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma_r\omega}} \end{cases}$$
(マイクロ波・ミリ波で成り立つ)

<u>吸収のある物質の表面に入射した電磁波の反射率</u>

空気中から複素屈折率をもつ物質へ入射したときの反射率は

$$R = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|^2 = \left|\frac{1-(n-j\kappa)}{1+(n-j\kappa)}\right|^2 = \frac{(n-1)^2+\kappa^2}{(n+1)^2+\kappa^2}$$



$$\begin{cases} n \gg \kappa \text{ のとき } R \cong \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^2 \quad \text{（いままでと同じ結果）} \\ n \ll \kappa \text{ のとき } R \cong 1 \end{cases}$$

吸収の大きい物質 → κ が大きい → 反射も大きい（逆は成立つとは限らない）

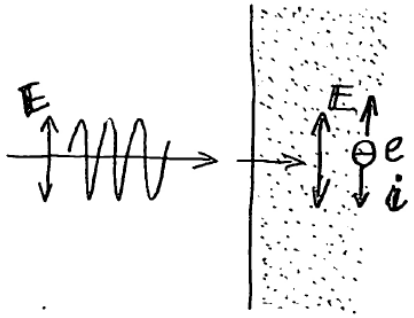
金属：σ が大きい → κ が大きい → 反射率～100% → 金属光沢

銅、金はバンド構造による特別な吸収が加わるので、単純な金属光沢ではない。
（バンド構造についてはあとの回で）。

（問） σ →∞（σ r →∞）のとき κ →∞となり、R →1 および表皮厚 d→0 となる。
このとき電磁波は表面で完全に反射される。また、金属内部では $E = 0$、$H = 0$ となる。
このとき
(1) 入射波と反射波の電界は表面でどのような関係になるか。磁界はどうか。
(2) 入射波と反射波は重ね合わさって定在波をつくる。この定在波の電界と磁界の位相は 90°ずれていることを説明せよ。

自由電子による光の吸収　（金属中の電子の光による運動の解析）

オームの法則 $\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$ が光の電界に対しても成り立つのか、について説明する。



自由電子が光の電界で揺すられる
（ドルーデの自由電子モデル）

運動方程式　$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{e}{m}E - \dfrac{v}{\tau}$

電界による力
（e<0 としておく）

金属中の電子の散乱を摩擦の形で近似（τ は緩和時間）
電子どうしの反発力で起こる現象の中には、集団振動などのように
この形式では表せないものもあるが、ここでは無視。

電子の動く小さな範囲では、電界の空間的な分布はほぼ一様であるとして、$E = E_0 e^{j\omega t}$とおいて上式に代入し、速度vも定常解 $v = v_0 e^{j\omega t}$ を仮定して代入すれば

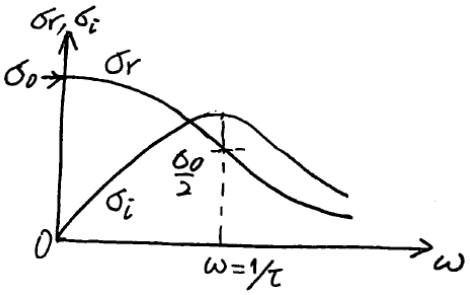
$j\omega v_0 = \dfrac{e}{m}E_0 - \dfrac{v_0}{\tau}$ から　$v_0 = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau}\dfrac{e\tau}{m}E_0$

電流密度は $i = env$ であるが、これも $i = i_0 e^{j\omega t}$ とおけば、 $i_0 = nev_0 = \left(\dfrac{1}{1 + j\omega\tau}\dfrac{ne^2\tau}{m}\right)E_0$

したがって、$\sigma = \dfrac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}$　ただし、$\sigma_0 = \dfrac{ne^2\tau}{m}$

$\omega = 0$ では $\sigma = \sigma_0$となり、σ_0は直流でのオームの法則の導電率を表している。
σ を実部と虚部に分けて書くと

$$\sigma = \sigma_r - j\sigma_i \qquad \begin{cases} \text{実部} \quad \sigma_r = \dfrac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} \\ \text{虚部} \quad \sigma_i = \dfrac{\omega\tau\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} \end{cases}$$



したがって、周波数上昇によって、実部は減少し、直流では存在しなかった虚部が発生する。
（これは、電子が質量を持つので電界に対する応答が力学的な慣性で遅れるため。電界に対して電流が遅れることになるので、電気抵抗にインダクタンス成分が加わることになる。）

通常、金属では　$\tau \sim 10^{-14}$ sec

・周波数 1GHz 程度（マイクロ波）では $\omega \sim 2\pi \times 10^{9}$ rad/s で $\omega\tau \sim 10^{-4} \ll 1$ となり、
　$\sigma \cong \sigma_r \cong \sigma_0$、$\sigma_i \cong 0$ となってほぼ直流と同じと考えてよい。

・ 光は $\omega \sim 2\pi \times 10^{15}$ rad/s で、$\omega\tau \sim 100$ となり、$\sigma_r \ll \sigma_0$、$\sigma_i \neq 0$ となるので、直流と全く異なる。

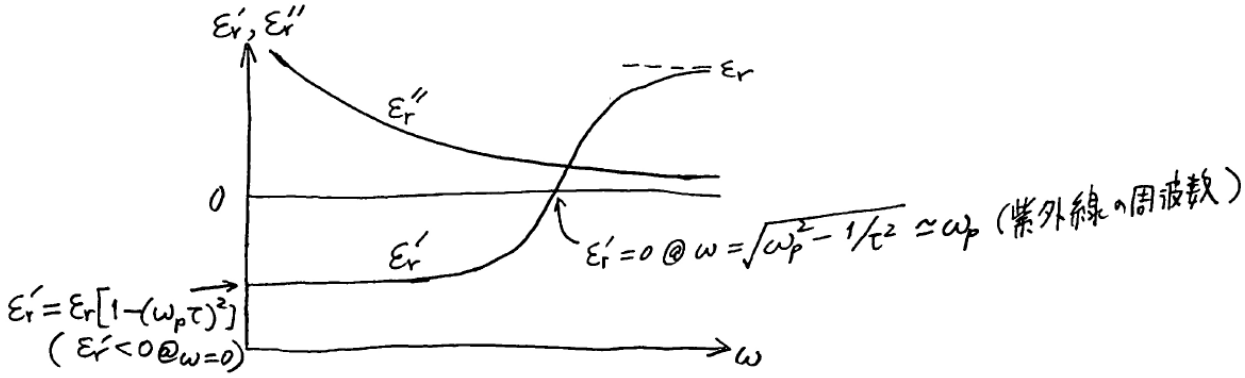
以上の導電率の結果を、最初に説明した複素比誘電率に代入すると

複素比誘電率　$$\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \underbrace{\left(\varepsilon_r - \frac{\sigma_i}{\omega\varepsilon_0}\right)}_{\varepsilon'_r} - j\underbrace{\frac{\sigma_r}{\omega\varepsilon_0}}_{\varepsilon''_r} = \underbrace{\varepsilon_r\left(1 - \frac{(\omega_p\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}\right)}_{\varepsilon'_r} - j\underbrace{\varepsilon_r\left(\frac{\omega_p^2\tau/\omega}{1+(\omega\tau)^2}\right)}_{\varepsilon''_r}$$

ただし、$\omega_p = \sqrt{\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r\tau}} = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0\varepsilon_r}}$　（プラズマ角周波数とよばれる）

<u>金属の誘電率</u>

周波数の全域では、概略、以下のようになる。

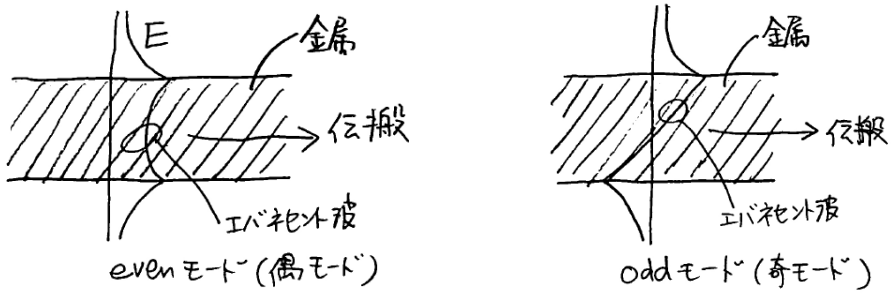


・可視光以下の周波数では $\varepsilon'_r < 0$ となっている（プラズマ）。

・マイクロ波～テラヘルツ帯では、$|\varepsilon'_r| \ll \varepsilon''_r$ となるので、金属の性質はほとんど ε''_r だけで決まる。つまり、電磁波に対する性質は導電率（=直流とほぼ同じ）だけで決まる。

・赤外～可視光では ε''_r が小さくなるので、金属の性質は直流やマイクロ波のときと違って、ε'_r によって決まる。このことでいろいろな現象が出てくる（プラズマ効果）。

プラズモン導波路（赤外～可視光の導波路として研究されている）



偶モードのほうが奇モードよりも減衰しにくく伝搬距離が長い。

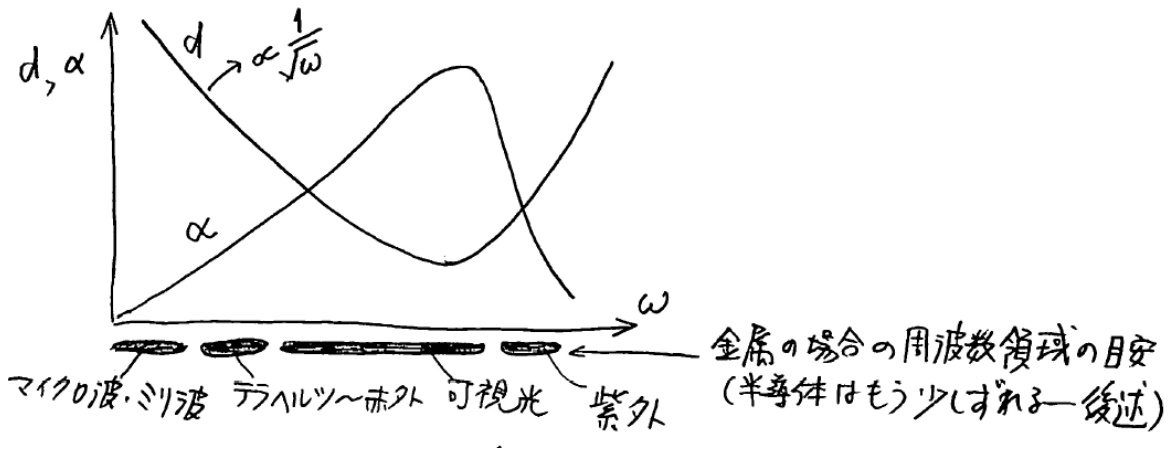
（奇モードのほうが金属中の E が小さいので損失が少ない。）

ただし、通常の誘電体導波路ほどの長距離伝搬ではない（～1mm 程度）。

吸収係数α、表皮厚 $d=1/\alpha$

ε''_rによって光は吸収され、減衰する（前述）。

その吸収係数と表皮厚は周波数の全域で、概略、以下のようになる。



マイクロ波～赤外領域では、表皮厚 $d \cong \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{f}}$

（すなわち、電波領域での表皮厚は周波数の√に比例して薄くなる）

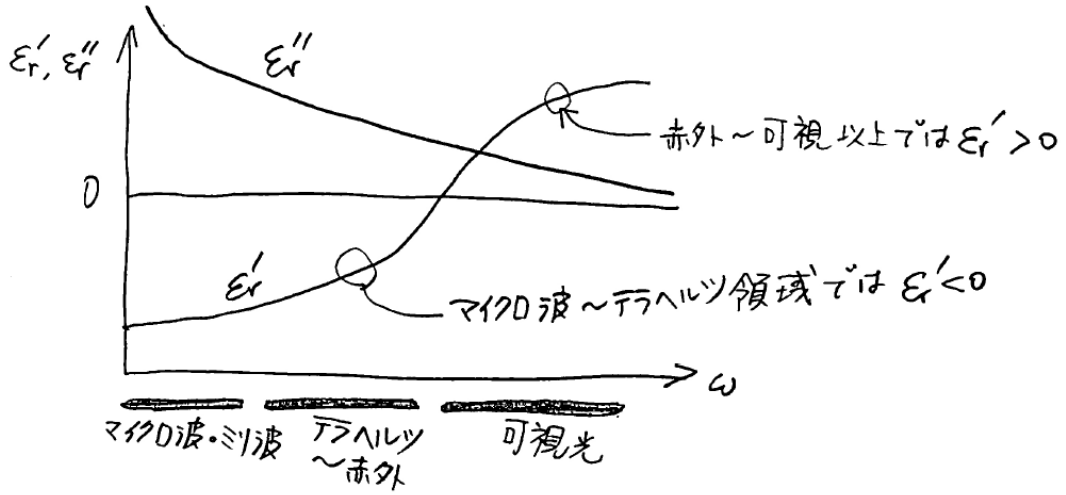
(問) 銅の導電率は $\sigma_0 = 6\times10^7$ S/m である。 1GHz（マイクロ波）、1THz(テラヘルツ帯)、100THz（赤外）の電磁波が入射したときの表皮厚をそれぞれ求めよ。

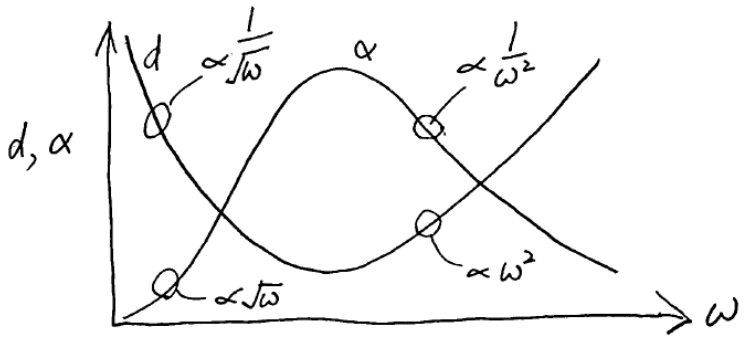
半導体の場合

不純物を高濃度ドープした半導体は、自由電子またはホールの密度が大きく、金属的性質を持つ。ただし、金属に比べると、上述の ω_p が小さく τ が大きいので、周波数全域でみると、金属とはやや異なっている。

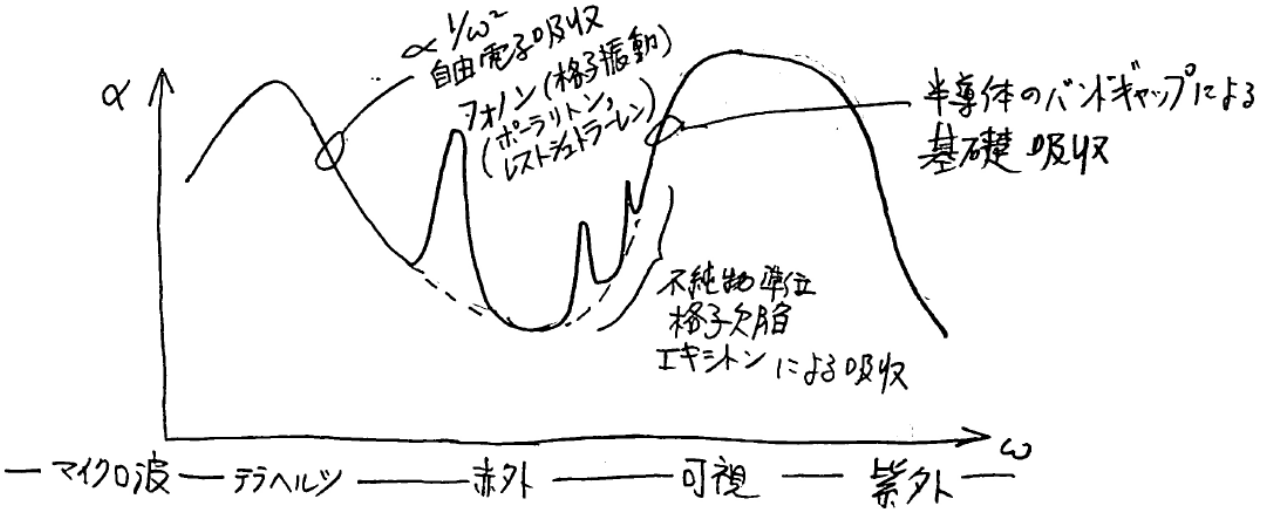
（通常、電子濃度 n（≅不純物濃度）は 10^{16}～10^{19} cm^{-3} くらい。
$n=10^{18}$ cm^{-3} とすると、ω_p～$2\pi\times10^{13}$ rad/s くらい。これは赤外～テラヘルツ領域。
$\omega_p \propto \sqrt{n}$ であるため、n～10^{22} cm^{-3} の金属では ω_p は紫外領域。
このことから、$\varepsilon'_r < 0$ となる領域（おおよそ $\omega < \omega_p$）や吸収係数の周波数依存性が金属と半導体（高濃度ドープ）では少し異なっている。）

半導体の誘電率と吸収係数は、概略、以下のようになっている。





自由電子だけのときは、以上のような吸収だけであるが、実際には他にもいろいろな吸収があって、それらを含めると、概略、以下のようになる。



次回から半導体とそのバンドギャップによる基礎吸収について説明する。
（半導体の基本的性質であり、半導体レーザや LED にも使われる。）