演習 02　解答例

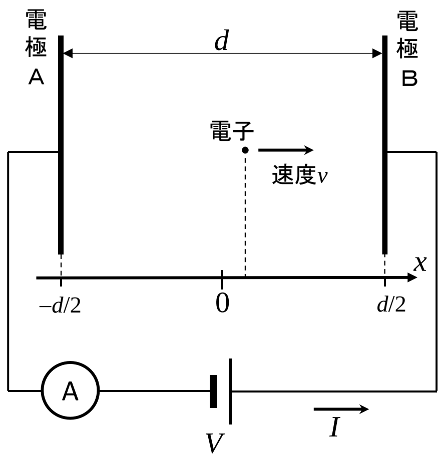
問題 1. 解答：

①	$e\dfrac{V}{d}$	②	$\sqrt{\dfrac{2eVx}{m_0 d}}$	③	$e\dfrac{V}{d}v\Delta t$	④	$e\dfrac{v}{d}$	⑤	$\dfrac{e^2 V}{m_0 d^2}t$	⑥	$\dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{e^3 V}{m_0}}$

以下，問題文とともに解説を赤字で記す．

固体中の電子の伝導や光の応答を考える際に，摩擦のある力学モデルがよく使われる．本問では，摩擦のある場合との対比として，真空中のように，運動している電子が摩擦を受けない媒質中で運動する場合の電流について考えてみる．

次の文章は，真空中の一定電界下で運動する単一電子による電流に関する記述である．文中の ( ) に当てはまる式や語句を答えなさい．なお，電子の質量を m_0，電子の電荷量を$-e$(<0)とする．導出がある場合は答えだけでなく，途中過程も記述すること．



図のように，間隔 d で配置した平行板電極 A, B 間に，一定の電圧 V(>0)を印加すると，電極板に垂直で一様な電界が生じる．ここで，電極板に垂直な座標軸 x を図の方向に定め，電極間の中点を $x = 0$ と定める． 1 個の電子が時刻 $t = 0$ において位置 $x = 0$ に速度 $v = 0$ で存在するものとする．時刻 $t > 0$ における電子の位置を x とし，電界から受ける力を d, V 等で表すと，ニュートンの運動方程式は次のように表される．$m_0\dfrac{d^2x}{dt^2} =$ （ ① ）．

① ：電界から電子が受ける力＝（電子の電荷）×（電界）＝(-e)×(-V/d)＝eV/d (電界の負号は電界の方向が x 軸の負方向であることによる.)

初期速度および初期位置が 0 であることを用いてこれを解くことにより，電子の速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ は，位置 x の関数として $v(x) =$ （ ② ）(t の関数ではなく x の関数で)と表される．

② ：運動方程式を両辺時間 t で積分すると，$v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{eV}{m_0 d}t$ ただし,t=0 で $v(t)$=0 を用いた．さらにもう一度 t で積分すると，$x(t) = \dfrac{eV}{m_0 d}\dfrac{t^2}{2}$ ，ただし,t=0 で $x(t)$=0 を用いた．

t について解くと　$t = \sqrt{\dfrac{2m_0 dx}{eV}}$　これを $v(t)$の式に代入すると，$v(x) = \sqrt{\dfrac{2eVx}{m_0 d}}$

電子が速度 v で運動しているとき，微小時間 Δt の間に電界から得るエネルギーは，電子が電界から受けている力と，Δt の間に移動する距離を乗じて　（　③　）である．

③　：電子が電界から受けている力= eV/d．また，Δt の間に移動する距離= $v\Delta t$．
これら２つを乗じると, $eV/d\ v\Delta t$．

一方，このエネルギーは，電圧 V の直流電源から微小時間 Δt の間に電流 I が流れ出ることにより供給されることから，電流 I を, d, v の関数として表すと，（　④　）となる．

④　：電源から供給される電力は，回路に流れる電流を I，電源電圧を V とすると VI.
したがって，Δt 秒間に供給される電力は $VI\Delta t$．これが③と等しいとおくと，
$eV/d\ v\Delta t = VI\Delta t \Leftrightarrow I = ev/d$

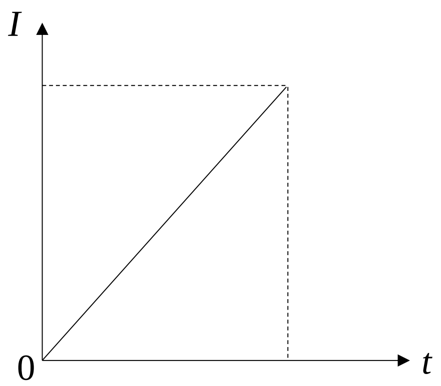
また，電流 I を時間の関数として式で表すと（　⑤　）と表される．

⑤　：④求めた $I = ev/d$ に $v(t)$を代入すると，$I=\frac{e}{d}\frac{eV}{m_0 d}t=\frac{e^2V}{m_0 d^2}t$

以上より，電子が初期位置から電極板に到達するまでに流れる電流の平均値は（　⑥　）となる．

⑥　：　④で求めた $I = ev/d$ に $v(x)$を代入すると $I=\frac{e}{d}\sqrt{\frac{2eVx}{m_0 d}}$．電極 B に到達した時の電流 I は，電極 B の座標 $x=d/2$ を代入すると $I=\frac{e}{d}\sqrt{\frac{eV}{m_0}}$ となる．⑤より, I は時間 t に対して直線的に増加するから，時間平均値は上記 I の 1/2 となる.すなわち，電流 I の平均値= $\frac{e}{2d}\sqrt{\frac{eV}{m_0}}=\frac{1}{2d}\sqrt{\frac{e^3V}{m_0}}$．(実効値であれば $1/\sqrt{3}$ とする.)

このように電子１個分の電流はノコギリ波状の単パルス波形として観測される．粒子が複数の場合はそれぞれの和となる．



この原理は，真空中の荷電粒子の数を電流として検出する機器などに応用されている．