

光物性基礎とデバイス応用 演習 01

担当：渡辺正裕 (watanabe@ee.e.titech.ac.jp)

ステップ 1.

Maxwell 方程式から、媒質中を伝搬する波の方程式を導出しよう。

(a) (準備) Maxwell 方程式：

3 次元 xyz 直交座標で、電界ベクトルと磁界ベクトルを $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z), \mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ と表す。表の一番右の欄に、Maxwell 方程式の各式を、 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ の成分で表記しなさい。ただし、自由空間を想定して次の仮定をおく。

○ $\mathbf{E}$:電界ベクトル, 誘電率 ϵ と表すと、電束密度 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 。また、 $\mathbf{H}$:磁界ベクトル, 透磁率 μ と表すと磁束密度 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 。

○ ϵ, μ は方向によらず一定値とする。

○ 空間電荷と電流は無いものとする, すなわち, $\rho=0, \mathbf{i}=0$ 。

	通称, 意味	$\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z), \mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ を用いた成分表記(自由空間)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	ガウスの法則： 電荷密度 ρ により電束密度 (電界)が生じる。(時間変化がなくても生じる)	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	磁気単極子はない	
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	ファラデーの法則： 磁束密度の時間変化により電界が生じる	(x)
		(y)
		(z)
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}$	アンペア・マクスウェルの法則： 電束密度の時間変化, または電流密度 $\mathbf{i}$ により磁界が生じる	(x)
		(y)
		(z)

(b) ファラデーの法則の両辺に $\nabla \times$ を取った式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$ の左辺にベクトル解析の

公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ を適用せよ。また、右辺は $\nabla \times$ と時間微分を交換した後、アンペア・マクスウェルの法則を適用することにより、次に示す電界ベクトルに関する微分方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \text{ を導け。}$$

(c) 上記で求めた方程式の、電界 $\mathbf{E}$ の x 方向成分 (E_x に対する方程式) を示しなさい。

(d) 電界 $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ が、 x 方向成分 E_x のみ値を持つ ($E_y=E_z=0$) と仮定すると、電界ベクトルは $\mathbf{E}=(E_x, 0, 0)$ と表される。さらに、 E_x は一般には x, y, z, t の関数であるが、 x, y 方向には 一様である ($\partial E_x / \partial x = \partial E_x / \partial y = 0$, $\therefore 2$ 階の偏微分も 0) と仮定する ($\mathbf{E}=(E_x(z, t), 0, 0)$ とみなせる)。これを (c) で求めた式に代入して、 E_x に関する微分方程式を導け。(空白を埋めて完成させる)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

(e) (a) で求めた Maxwell 方程式の成分表示に、(d) の仮定を直接適用して、(d) の結論の方程式を導出しなさい。(b) で求めた 3 次元ベクトルの一般的な表式を介さずに導出してみなさい、という意味)

ステップ 2.

ステップ 1 で求めた微分方程式は、任意の関数 $f(z)$ とすると、 $f(z-vt)$ と $f(z+vt)$ を一般解として持つ。(z 座標に対して時間 t が進むと「前進」または「後進」に対応する)

ここで、 $E_0 \cos kz$ という正弦波の関数形を考えると、上記の結論から、微分方程式の解として、 $E_x(z, t) = E_0 \cos(k(z-vt))$ と $E_0 \cos(k(z+vt))$ が解となることがわかる。(代入して確かめよ)

(a) 波の速度 v を ϵ , μ で表す式を導け。

これは、媒質の ϵ と μ が同じなら、どのような形状の関数形に対しても、進む速さが同じであることを意味している。

(b) 次に、時間 t の経過に伴い、 x の正方向に進む解 $E_0 \cos(k(z-vt))$ のみに注目する。この式を $E_0 \cos(kz - \omega t)$ と表したとき、速度 v を ω と k で表せ。(v が媒質の性質 (ϵ と μ) で決まっているので、角周波数 ω と波数 k は独立ではない。 $k = 2\pi/\lambda$ により k は波長の逆数に比例した量である。)

(問題 1) $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ に対して、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ および $\nabla \times \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ となることを示せ。これらの式と Maxwell の方程式から、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ および $(\mathbf{k}/k) \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu/\epsilon} \mathbf{H}$ となることを示せ。これらの結果は何を意味しているか説明しなさい。

(問題 2) 真空中の波長が λ_0 で x 軸と偏光面のなす角が 45° の直線偏光した光が z 方向に進行している。この光を、 x 方向と y 方向に偏光した光に対する屈折率がそれぞれ n_e と n_o である物質に入射させたとき、出口で円偏光になるために必要な長さを求めよ。