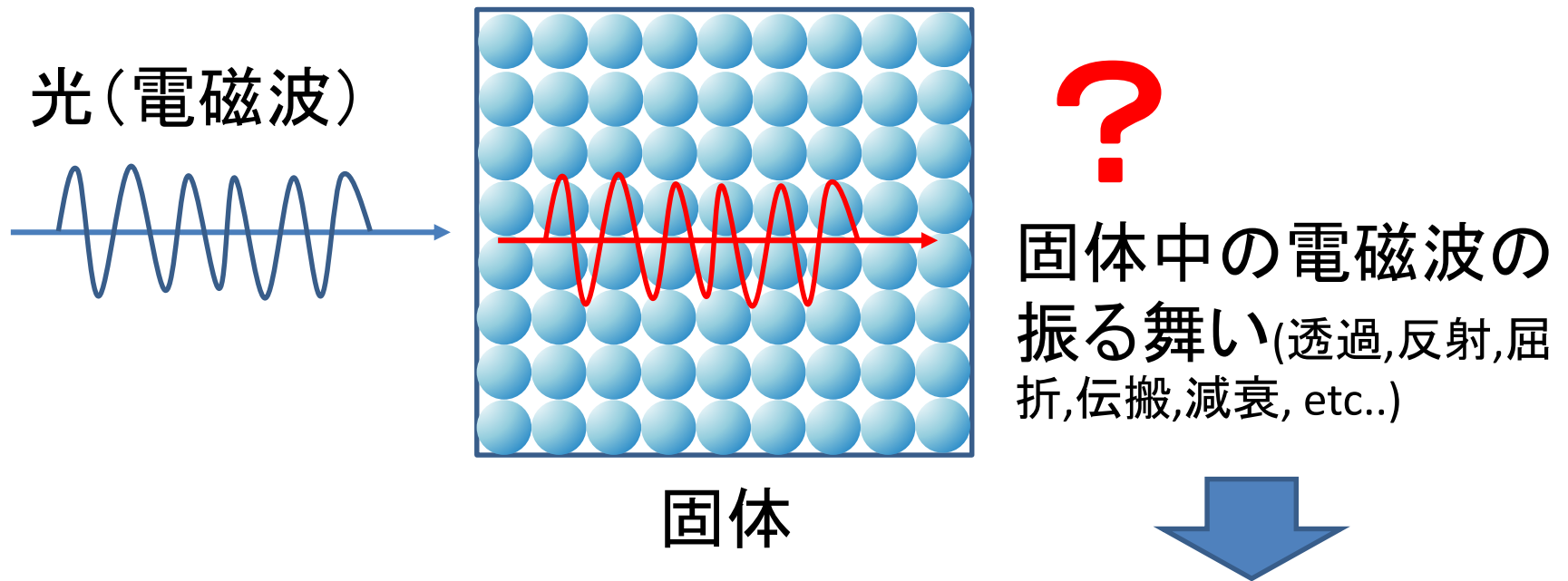


光物性基礎とデバイス応用

固体中の電磁波

- Maxwell方程式から電磁波を導出する
- 真空中を伝搬する電磁波
- 固体中を伝搬する電磁波
- 光速, 誘電率, 屈折率, 偏光
- 周波数帯と応用

固体中の光(電磁波)

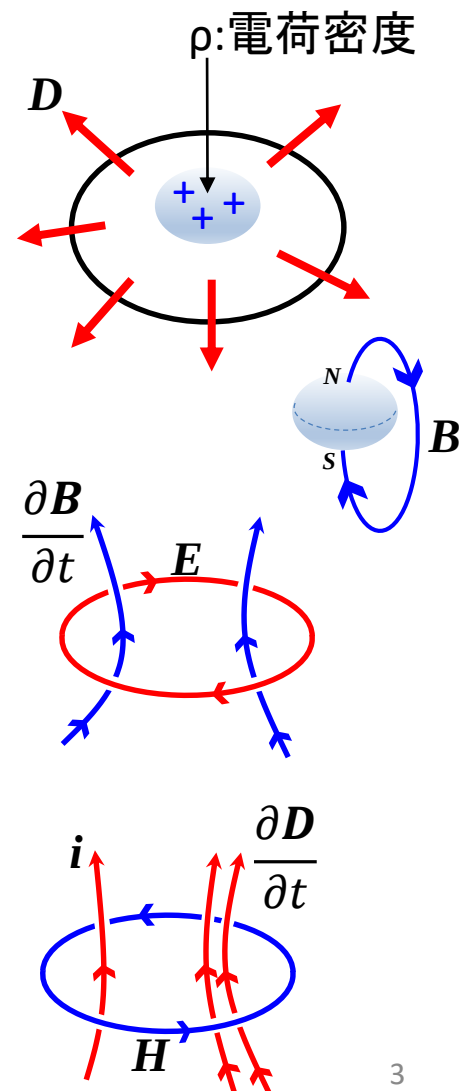


電磁波の振る舞いは
Maxwell 方程式に聞け！

Maxwell方程式

D :電束密度, E :電界
 B :磁束密度, H :磁界
 ρ :電荷密度, i :電流密度

	通称, 意味
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	ガウスの法則: 電荷密度 ρ により電束密度(電界)が生じる。(時間変化がなくても生じる)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	磁気単極子はない
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	ファラデーの法則: 磁束密度の時間変化により電界が生じる
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}$	アンペア・マクスウェルの法則: 電束密度の時間変化, または電流密度 i により磁界が生じる



固体の性質はMaxwell方程式の どこに反映するか？

- 誘電率: $D = \epsilon E = \epsilon_r \epsilon_0 E$

真空の誘電率 比誘電率: 固体の性質を反映
- 透磁率: $B = \mu H = \underline{\mu_s} \mu_0 H$ (光ではほぼ $\mu \sim \mu_0$)
- 電流と電圧(電界)の関係: $i \Leftrightarrow E$
たとえば, オームの法則など



電子, イオンの
振動(力学から
解明)

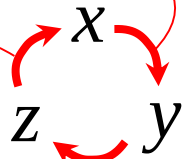
電磁波の導出へ向けた ベクトル解析の復習

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) \quad \text{のとき,}$$

$$\text{内積} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\text{外積} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\underline{A_y B_z - A_z B_y}, \underline{A_z B_x - A_x B_z}, \underline{A_x B_y - A_y B_x})$$

$$\text{演算子} \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$



$$\text{上記を組み合わせて,} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y, \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z, \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right)$$

$$(\text{ベクトル公式}) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Maxwell方程式(真空中)

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

ε_0 : 真空の誘電率

μ_0 : 真空の透磁率

	通称, 意味	$\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z), \mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ を 用いた成分表記
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	ガウスの法則: 電荷密度 ρ により電束密度(電界)が生じる。(時間変化がなくても生じる)	$\varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \rho$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	磁気単極子はない	$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	ファラデーの法則: 磁束密度の時間変化により電界が生じる	(x成分) $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$
		(y成分) $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$
		(z成分) $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}$	アンペア・マクスウェルの法則: 電束密度の時間変化, または電流密度 $\mathbf{i}$ により磁界が生じる	$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + i_x$
		$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + i_y$
		$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + i_z$

Maxwell方程式(真空中,自由空間)

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ \mathbf{i} = 0 \end{cases}$$

	通称, 意味	$E=(E_x, E_y, E_z), H=(H_x, H_y, H_z)$ を 用いた成分表記
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	ガウスの法則: 電荷密度 ρ により電束密度(電界)が生じる。(時間変化がなくても生じる)	$\varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	磁気単極子はない	$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	ファラデーの法則: 磁束密度の時間変化により電界が生じる	(x成分) $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$
		(y成分) $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$
		(z成分) $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}$	アンペア・マクスウェルの法則: 電束密度の時間変化, または電流密度 $\mathbf{i}$ により磁界が生じる	$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$
		$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$
		$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$

Maxwell方程式(固体中,自由空間)

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ \mathbf{j} = 0 \end{cases}$$

- 真空の誘電率 ε_0 を、固体中では ε とする. 透磁率についても同様.
- 固体も、誘電率の異なる「真空」のような媒質、と見なす.
- メリット: 固体中ではなぜ誘電率が真空中と異なるか、その具体的な物理メカニズムを完全に無視して、媒質ごとに ε, μ を変えることで、電磁気学(Maxwell方程式)のみで完結できる.
- 注意点: 誘電率が固体中で変わって見える物理メカニズムは、電界によって、物質を構成する原子中の電子やイオンの位置が変位することなので、一般には、 ε は、電界の強さや、時間変化の速さに依存して変化することに注意する.
(真空の誘電率 ε_0 にそんなことは起こらない)
- 工学的な問題解決のために必要な ε を実現するには、どのような材料を選べばよいか、という問いには、このような方法である程度こたえられる.

Maxwell方程式(固体中,自由空間)

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ \mathbf{i} = 0 \end{cases}$$

	通称, 意味	$E=(E_x, E_y, E_z), H=(H_x, H_y, H_z)$ を 用いた成分表記
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	ガウスの法則: 電荷密度 ρ により電束密度(電界)が生じる。(時間変化がなくても生じる)	$\varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	磁気単極子はない	$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	ファラデーの法則: 磁束密度の時間変化により電界が生じる	(x成分) $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$
		(y成分) $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$
		(z成分) $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}$	アンペア・マクスウェルの法則: 電束密度の時間変化, または電流密度 $\mathbf{i}$ により磁界が生じる	$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$
		$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$
		$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$

電磁波の導出

ファラデーの法則の両辺 $\nabla \times$ を取る。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla \times} (\nabla \times \mathbf{E}) = \boxed{\nabla \times} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

次のベクトル公式を上式の左辺に適用する。

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

ガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を代入

$$= -\nabla^2 \mathbf{E}$$

$\rho=0$ と仮定した

(右辺の計算)

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \times E) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) \\
 &\quad \parallel \nabla \times \text{と } \frac{\partial}{\partial t} \text{ を交換する} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times B) \\
 &\quad \parallel \\
 &= \mu (\nabla \times H) \\
 &\quad \parallel \text{アンペア・マクスウェル} \\
 &= \mu \frac{\partial D}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\
 \text{結局 (右辺)} &= -\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

(左辺) = (右辺)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

波動方程式 (E_x, E_y, E_z の3成分を持つことに注意する)

$$E_x \text{ 分のみ表記すると } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x$$

まとめ

- Maxwell方程式から電磁波を導出できる
- 真空中と固体中を伝搬する電磁波の相違について説明できる.
 - 光速, 誘電率, 屈折率, 偏光
- 周波数帯とその応用を理解した