

光物性基礎とデバイス応用 演習 01 解答例

担当：渡辺正裕 (watanabe@ee.e.titech.ac.jp)

ステップ 1.

Maxwell 方程式から、媒質中を伝搬する波の方程式を導出しよう。

(a) (準備) Maxwell 方程式：

3 次元 xyz 直交座標で、電界ベクトルと磁界ベクトルを $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ と表す。表の一番右の欄に、Maxwell 方程式の各式を、 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ の成分で表記しなさい。

ただし、自由空間を想定して次の仮定をおく。

○ $\mathbf{E}$: 電界ベクトル, 誘電率 ϵ と表すと、電束密度 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 。また、 $\mathbf{H}$: 磁界ベクトル, 透磁率 μ と表すと磁束密度 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 。

○ ϵ, μ は方向によらず一定値とする。

○ 空間電荷と電流は無いものとする、すなわち、 $\rho=0, \mathbf{i}=0$ 。

	通称, 意味	$\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z), \mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$ を用いた成分表記(自由空間)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	ガウスの法則： 電荷密度 ρ により電束密度 (電界)が生じる。(時間変化がなくても生じる)	$\epsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \rho \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ ($\Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	磁気単極子は無い	$\mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ ($\Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	ファラデーの法則： 磁束密度の時間変化により電界が生じる	(x 成分) $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$
		(y 成分) $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$
		(z 成分) $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}$	アンペア・マクスウェルの法則： 電束密度の時間変化, または電流密度 $\mathbf{i}$ により磁界が生じる	(x 成分) $\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$
		(y 成分) $\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$
		(z 成分) $\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$

(b) ファラデーの法則の両辺の $\nabla \times$ を取った式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$ の左辺に、ベクトル解析の

公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ を適用せよ。

(左辺)

公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ に、(a)表のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を代入すると、
 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$

また、右辺は $\nabla \times$ と時間微分を交換した後、アンペアマクスウェルの法則を適用することにより、次に示す電界ベクトルに関する微分方程式

$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ を導け。

(右辺)

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

(左辺)=(右辺) より, $\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$ が導かれた.

(c) 上記で求めた方程式の, 電界 $\mathbf{E}$ の x 方向成分 (E_x に対する方程式) を示しなさい.

ベクトルの方程式 $\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$ は, x, y, z 方向の成分を持つ. x 方向成分のみ表示すると

$\nabla^2 E_x - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$ となる. ここで E_x はベクトルではなく, 電界ベクトル $\mathbf{E}$ の x 成分.

ここに, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を代入すると, $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})E_x - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$

(d) 電界 $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ が, x 方向成分 E_x のみ値を持つ ($E_y=E_z=0$) と仮定すると, 電界ベクトルは $\mathbf{E}=(E_x, 0, 0)$ と表される. さらに, E_x は一般には x, y, z, t の関数であるが, x, y 方向には 一様である

($\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$, $\therefore$ 2 階の偏微分も 0) と仮定する ($\mathbf{E}=(E_x(z, t), 0, 0)$ と省略して記す). これを (c) で求

めた式に代入して, E_x に関する微分方程式を導け. (空白を埋めて完成させる)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

(e) (a) で求めた Maxwell 方程式の成分表示に, (d) の仮定を直接適用して, (d) の結論の方程式を導出しなさい. ((b) で求めた 3 次元ベクトルの一般的な表式を介さずに導出してみなさい, という意味)

ファラデーの法則の成分表示 (表(a)) に, $E_y=E_z=0$, および, E_x が x, y 方向に一様 $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$

と仮定すると,

$$\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

より, $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$, $H_x=0, H_z=0$ (t に対して一定のところ, 初期状態を 0 と定めた)

一方, アンペア・マクスウェルの法則から

$$\cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} = \epsilon \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} = \epsilon \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial t}}$$

これに先程の, $H_x=0, H_z=0$ なども含めて全部代入すると, $-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$ のみ残る.

前頁の $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$ を両辺 z で偏微分し, 右辺で z と t の偏微分を交換して上式を代入すれば,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

を得る. (上記下線部分が, $\nabla \times$ と $\partial/\partial t$ を交換した操作に対応している.)

ステップ 2.

ステップ 1 で求めた微分方程式は, 任意の関数 $f(z)$ とすると, $f(z-vt)$ と $f(z+vt)$ を一般解として持つ. (z 座標に対して時間 t が進むと「前進」または「後進」に対応する)

ここで, $E_0 \cos kz$ という正弦波の関数形を考えると, 上記の結論から, 微分方程式の解として, $E_x(z,t)=E_0 \cos(k(z-vt))$ と $E_0 \cos(k(z+vt))$ が解となることがわかる. (代入して確かめよ)

(a) 波の速度 v を ϵ, μ で表す式を導け.

$E_x(z-vt)$ で, $z-vt \equiv X$ などと変数変換すると, z および t に関する E_x の 2 階微分は下記のように表される.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial X^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial X^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial X^2} v^2$$

これらをステップ 1 で得られた偏微分方程式に代入すると, $1 - \epsilon \mu v^2 = 0 \Leftrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

これは, 媒質の ϵ と μ が同じなら, どのような形状の関数形に対しても, 進む速さが同じであることを意味している.

(b) 次に, 時間 t の経過に伴い, x の正方向に進む解 $E_0 \cos(k(z-vt))$ のみに注目する. この式を $E_0 \cos(kz - \omega t)$ と表したとき, 速度 v を ω と k で表せ. (v が媒質の性質 (ϵ と μ) で決まっているので, 角周波数 ω と波数 k は独立ではない. ちなみに k は $k=2\pi/\lambda$ により波長の逆数に比例した量である.)

$$k(z-vt) = kz - \omega t \quad \text{なので, } \Leftrightarrow kv = \omega \Leftrightarrow v = \omega/k$$

(問題 1) $E(x, y, z) = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ に対して, $\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ および $\nabla \times \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ となることを示せ.
 これらの式と Maxwell の方程式から, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ および $(\mathbf{k}/k) \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu/\epsilon} \mathbf{H}$ となることを示せ.
 これらの結果は何を意味しているか説明しなさい.

$$\mathbf{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$$

$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と定義する. スカラー積 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ である. この時,

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (E_x, E_y, E_z) = (E_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}, E_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}, E_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)})$$

演算の定義に基づいて, $\nabla \cdot$ を計算する.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} E_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + \frac{\partial}{\partial y} E_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + \frac{\partial}{\partial z} E_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= E_{0x} \frac{\partial}{\partial x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + E_{0y} \frac{\partial}{\partial y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} + E_{0z} \frac{\partial}{\partial z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -jk_x E_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - jk_y E_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - jk_z E_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

ガウスの法則で $\rho = 0$ と仮定したので, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. よって上式の結論から, 常に $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ が成り立つ.
 これは, 波の進行方向 $\mathbf{k}$ に対して, 電界ベクトル $\mathbf{E}$ の振動方向が必ず直交していることを意味する. つまり, 電界の波は常に横波としてしか存在しえない (縦波は許されない). ステップ 1 では, $E_y = E_z = 0$ など, 特殊な状況を仮定した結果として, x 方向に振動する電界の波が z 方向に進む, すなわち, 進行方向と電界の振動方向が直交していることを導いたが, これは特殊な仮定の下でのみ成り立つことではなく, 一般に成り立つことであることがわかる.

次に $\nabla \times$ を計算する. x 成分のみ計算すると

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_{x\text{成分}} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} E_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - \frac{\partial}{\partial z} E_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -jk_y E_{0z} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} - (-jk_z) E_{0y} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -jk_y E_z - (-jk_z) E_y \\ &= -j(\mathbf{k} \times \mathbf{E})_{x\text{成分}} \end{aligned}$$

y 方向, z 方向についても同様に成り立つことが示される.

ファラデーの法則によれば, $\nabla \times \mathbf{E}$ は磁界ベクトルの方向と一致している. つまり, 磁界ベクトルが $\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ に比例するということは, 磁界は常に電界と進行方向の両方に直交しているということを意味している. j が比例係数に出ているのは, 電界と磁界の位相が 90 度ずれている ($e^{j\frac{\pi}{2}}$) ことに起因する.

(問題2) 真空中の波長が λ_0 でx軸と偏光面のなす角が 45° の直線偏光した光がz方向に進行している。この光を、x方向とy方向に偏光した光に対する屈折率がそれぞれ n_e と n_o である物質に入射させたとき、出口で円偏光になるために必要な長さを求めよ。

ステップ2で求めた $\omega = kv$ の関係を使う。真空中では $v=c$ (光速)であり、 $k=2\pi/\lambda_0$ だから、

電磁波の角周波数は $\omega = \frac{2\pi}{\lambda_0}c$ である。媒質中では電磁波の速度 v は c/n になるので、 $v_e = \frac{c}{n_e}$, $v_o = \frac{c}{n_o}$

これに対応する波数 k は、 $k_e = \frac{\omega}{v_e} = \frac{\omega n_e}{c}$, $k_o = \frac{\omega}{v_o} = \frac{\omega n_o}{c}$

$$E_e = E_0 e^{-jk_e z}$$

$$E_o = E_0 e^{-jk_o z}$$

$z=0$ のときに振幅は等しく位相差は0である。座標 z における位相差は $\text{Arg}(E_e/E_o)=z(k_e-k_o)$ と表され、これがちょうど $\pi/2$ のときに円偏光となる。すなわち、

$$z(k_e-k_o)=\pi/2 \Leftrightarrow z = \pi/2(k_e-k_o)=c\pi/2\omega(n_e-n_o)$$