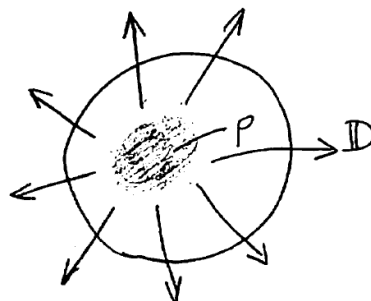


- Maxwell の方程式
- 電磁波 導出、光速、屈折率、偏光、周波数帯など

Maxwell 方程式

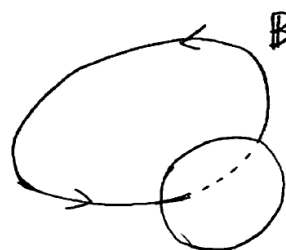
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

(ガウスの法則)



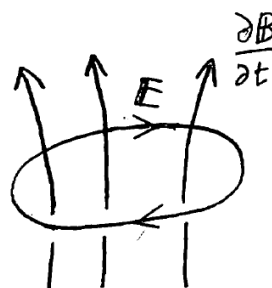
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(単極磁荷はない)



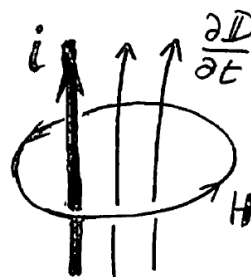
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(ファラデーの法則)



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

(アンペア・マクスウェルの法則)



電磁波

固体の性質を誘電率 ϵ と透磁率 μ に帰着させる。(真空の場合は ϵ_0 と μ_0)

自由空間 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{i} = 0$, $\rho = 0$ において

固体を構成する電子やイオンが電界に対してどのように応答するかで ϵ は決まる → 物性との関係 → 6 章

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{ベクトル公式 } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\parallel$$

$$0$$

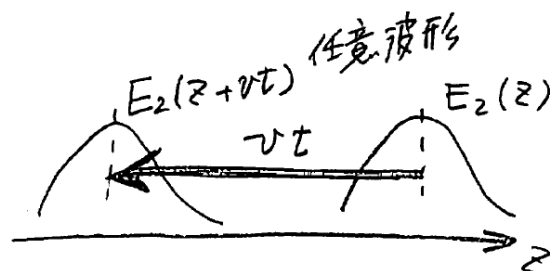
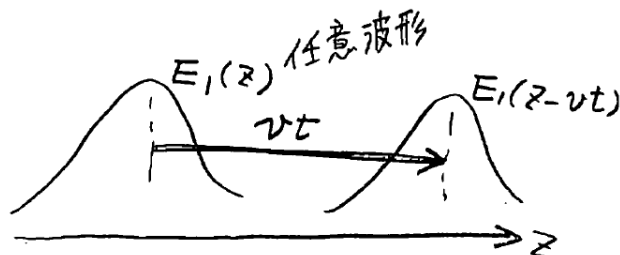
したがって

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{直角座標 } \mathbf{E}(x, y, z) \text{ では } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0) \quad (x \text{ 成分のみで、かつ、} x \text{ と } y \text{ 方向には一様) とすると、} \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

一般解は $E_x(z, t) = E_1(z - vt) + E_2(z + vt)$

ただし、 $E_1(z)$ と $E_2(z)$ は任意の関数、 $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 。



形は変わらずそのまま移動

E_1 だけ考え、さらに、 $E_1(z) = E_0 \cos kz$ とする

このとき、

$$E_x(z, t) = E_0 \cos\{k(z - vt)\} = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

振幅

波数

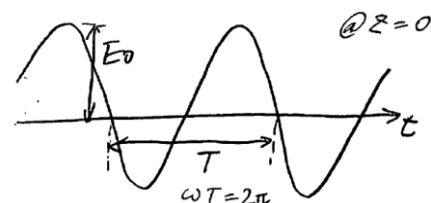
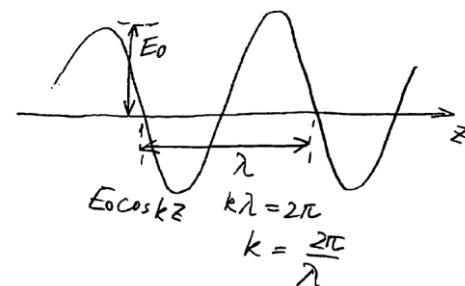
角周波数

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ : 波長

$$\omega = kv \equiv 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f : 周波数、 T : 周期



$E_y = E_z = 0$ を $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_x \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_z \end{aligned} \right\}$$

時間的に一定な成分は扱わないとして
($t=0$ においてそれらが 0 として)

$$H_z = H_x = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) = E_0 \operatorname{Re}[e^{j(kz - \omega t)}] = E_0 \operatorname{Re}[e^{-jkz} e^{j\omega t}] \quad \text{であるから}$$

いちばん最後の式で $e^{jkz} e^{-j\omega t}$ ではなく $e^{-jkz} e^{j\omega t}$ としているのは、 $e^{j\omega t}$ を使う電気系の慣習。
今後、 Re と $e^{j\omega t}$ を書かない表記法を使う。このとき、 $E_x = E_0 e^{-jkz}$ と書かれることになる。
また、常に $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ および $\int dt = \frac{1}{j\omega}$ となるので、これも使う。

$$\text{このとき、} H_y = -\frac{1}{\mu} \int \frac{\partial E_x}{\partial z} dt = \frac{k}{\mu\omega} E_0 e^{-jkz} = \frac{1}{\mu v} E_0 e^{-jkz} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 e^{-jkz} \equiv H_0 e^{-jkz}$$

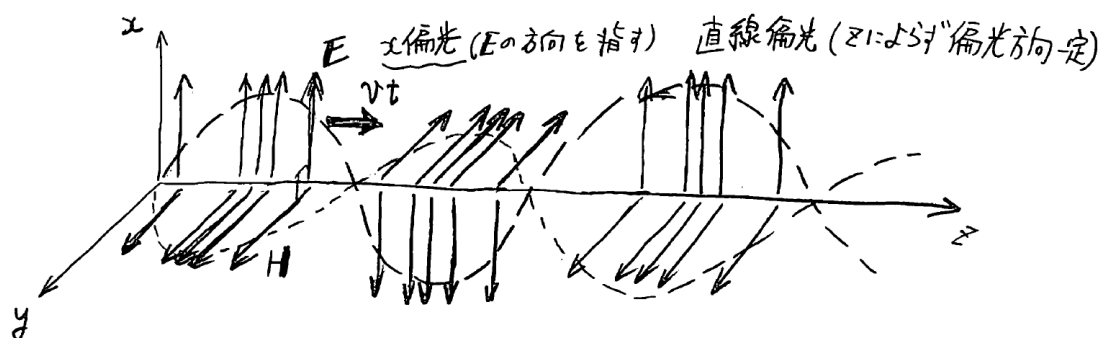
まとめると

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_0 e^{-jkz}, E_y = E_z = 0 \\ H_y = H_0 e^{-jkz}, H_z = H_x = 0, H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \\ \text{光速 } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n} = f\lambda = f\frac{\lambda_0}{n} \end{array} \right.$$

λ_0 は真空中の波長

$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ は真空中の光速 $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \cong \sqrt{\varepsilon_r}$ は屈折率
 ε_r と μ_r は比誘電率と比透磁率

- ・電界(x 方向)と磁界(y 方向)と進行方向(z 方向)はすべて互いに直交している。
- ・電界の方向(面)を偏光方向(面)という(この場合は x 方向)
- ・電界振幅/磁界振幅は $\sqrt{\mu/\varepsilon} = 120\pi$ (単位はオーム $[\Omega]$)で、これは界インピーダンスと呼ばれる。



任意の方向へ進む電磁波の表現

$\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ とおくと、 $\mathbf{k}$ の方向に進む電磁波は

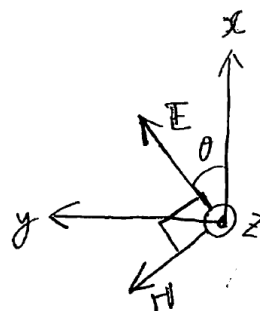
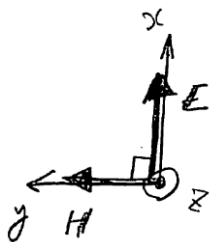
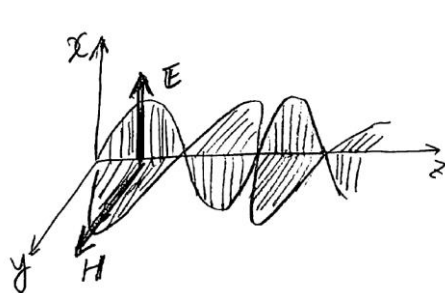
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

ただし、上記と同様に Re と $e^{j\omega t}$ を省略している。また、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトルであり、 $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$ 。

(問) $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ に対して、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ および $\nabla \times \mathbf{E} = j\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ となることを示せ。
 これらの式と Maxwell の方程式から、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ および $(\mathbf{k}/k) \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu/\varepsilon} \mathbf{H}$ となることを示せ。これらの結果は何を意味しているか。

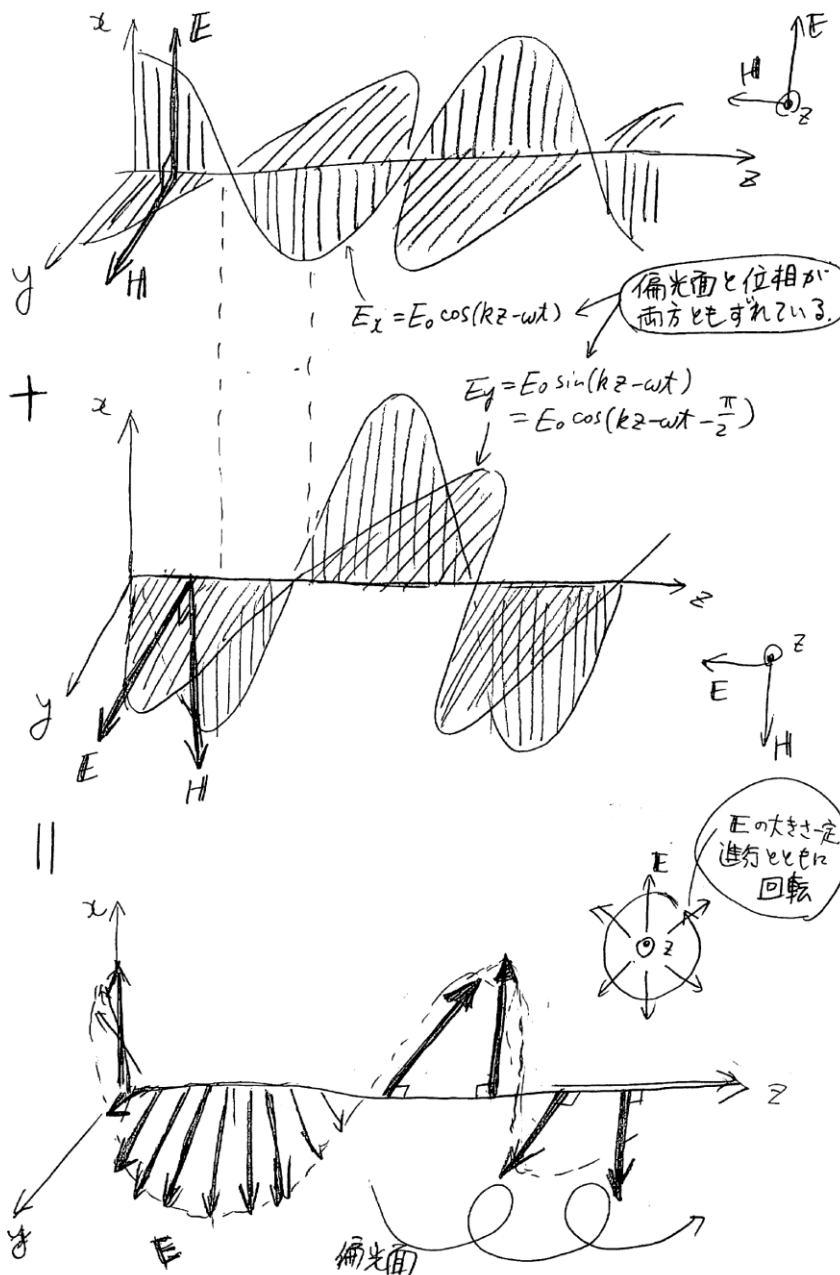
直線偏光と円偏光

直線偏光



一般的な直線偏光
Eはx軸と θ の
角度をなしている

円偏光



2つの直線偏光の重ね合わせ。これらの振幅が同じで位相が 90° ずれていると円偏光。
位相差の正負 ($\pm 90^\circ$) によって回転方向が変わる (各自考えてみること)。
重ね合わせる位相差と振幅の違いで、直線～楕円～円偏光と変化し、回転方向も変わる。

x 方向と y 方向の電界に対して誘電率が異なる物質（＝屈折率が異なる物質、つまり屈折率異方性のある物質）に z 方向に直線偏光の光を通すと楕円偏光になる。

(問) 真空中の波長が λ_0 で x 軸と偏光面のなす角が 45° の直線偏光した光が z 方向に進行している。
この光を、 x 方向と y 方向に偏光した光に対する屈折率がそれぞれ n_e と n_o である物質に入射させたとき、
出口で円偏光になるために必要な長さを求めよ。

電磁波の周波数帯と用途

周波数	波長	呼び名	用途など
30kHz 以下	10km 以上	超長波 (VLF)	電波時計など
30kHz～300kHz	1km～10km	長波 (LF)	船舶、航空機ビーコン、潜水艦通信、標準電波など
300kHz～ 3MHz	100m～1km	中波 (MF)	船舶、中波ラジオ放送、船舶・航空機ビーコンなど
3MHz～ 30MHz	10m～100m	短波 (HF)	船舶・航空機通信、短波ラジオ放送、アマチュア無線など
30MHz～ 300MHz	1m～10m	超短波 (VHF)	FM ラジオ放送、マルチメディア放送、防災行政無線、 消防無線、警察無線、航空機管制塔、アマチュア無線など
300MHz～ 3GHz	10cm～1m	極超短波 (UHF)	携帯電話、MCA、タクシー無線、テレビ放送、防災行政無線、 移動体衛星通信、警察無線、列車無線、レーダー、 アマチュア無線、無線 LAN、コードレス電話、ISM 機器など
3GHz～ 30GHz	1cm～10cm	センチ波 (マイクロ波) (SHF)	マイクロ波中継、衛星通信、衛星放送、レーダー、電波天文、 加入者系無線アクセス、無線 LAN、ISM 機器など
30GHz～300GHz	1mm～1cm	ミリ波 (EHF)	衛星通信、電波天文、車載レーダーなど 開発中
300GHz～3THz	0.1mm～ 1mm	サブミリ波 (テラヘルツ波、 遠赤外線)	開発中
3THz～370THz	810nm～ 0.1mm	赤外線	光ファイバー通信、加熱機器など
370THz～ 790THz	380nm～ 810nm	可視光	—
790THz～30P (ペタ)Hz	10nm～ 380nm	紫外線	殺菌
30PHz～300E (エクサ)Hz	0.001nm～ 10nm	X 線	レントゲンなど
3EHz 以上	0.1nm 以下	γ 線	放射線

電波

光