

幾何学概論第一 (MTH.B211)

4: フルネ・セレの公式 (補足)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/29

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と、単位ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ を固定する。このとき、 \mathbf{v} に直交する平面 $\Pi_{\mathbf{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういときか。さらに、そのとき $\det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \mathbf{v}) \neq 0$ となるための γ の曲率・撓率の条件は何か。

問題 4-1 (正射影)

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$: 単位ベクトル ($|\mathbf{v}| = 1$) .

$\Pi_{\mathbf{v}} :=$ (原点を通り \mathbf{v} に直交する平面) $= \{P \in \mathbb{R}^3; \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} = 0\}$

$\Pi_{\mathbf{v}}$ への正射影:

$$\pi_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$$

注: $\Pi_{-\mathbf{v}} = \Pi_{\mathbf{v}}$; $\pi_{-\mathbf{v}} = \pi_{\mathbf{v}}$.

問題 4-1

$\gamma(s)$: 空間曲線; s は弧長. $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$: 単位ベクトル

$$\sigma(s) := \pi_{\mathbf{v}} \circ \gamma(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$$

問題

$\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういときか。

$$\begin{aligned} \sigma'(s_0) &= \gamma'(s_0) - (\gamma'(s_0) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{e}(s_0) - (\mathbf{e}(s_0) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{v} &= \pm \mathbf{e}(s_0). \end{aligned}$$

問題 4-1

$\gamma(s)$: 空間曲線; s は弧長. $\mathbf{v} = \mathbf{e}(s_0) \in \mathbb{R}^3$: $s = s_0$ における単位接ベクトル

$$\sigma(s) := \pi_{\mathbf{v}} \circ \gamma(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$$

問題

$\det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \mathbf{v}) \neq 0$ となるのはいつか?

フルネ枠 $(\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, κ を曲率, τ を撓率を用いると, フルネ・セレの公式

$$\mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{e} + \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$$

の公式から

$$\gamma'' = \mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n},$$

$$\gamma''' = (\kappa \mathbf{n})' = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' = \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{e} + \kappa \tau \mathbf{b}$$

問題 4-1

$$\sigma(s) := \pi_{\mathbf{v}} \circ \gamma(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \quad (\mathbf{v} = \mathbf{e}(s_0)) \gamma'' = \mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n}$$

$$\gamma''' = (\kappa \mathbf{n})' = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' = \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{e} + \kappa \tau \mathbf{b}$$

$$\gamma''(s_0) \cdot \mathbf{e}(s_0) = 0,$$

$$\gamma'''(s_0) \cdot \mathbf{e}(s_0) = -\kappa(s_0)^2$$

$$\sigma''(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0),$$

$$\sigma'''(s_0) = \kappa'(s_0) \mathbf{n}(s_0) + \kappa(s_0) \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0)$$

$$\det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \mathbf{e}(s_0))$$

$$= \det(\kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0), \kappa(s_0) \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0), \mathbf{e}(s_0))$$

$$= \kappa(s_0)^2 \tau(s_0)$$

問題 4-1

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と、単位ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ を固定する。このとき、 \mathbf{v} に直交する平面 $\Pi_{\mathbf{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういときか。さらに、そのとき $\det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \mathbf{v}) \neq 0$ となるための γ の曲率・撓率の条件は何か。

▶ $\mathbf{v} = \pm \mathbf{e}(s_0)$.

▶ $\kappa(s_0) = 0$ のときは $\det(\dots)$ は零になる .

▶ $\kappa(s_0) \neq 0$ のとき $\det(\sigma'', \sigma''', \mathbf{v})(s_0) = \kappa(s_0)^2 \tau(s_0)$

問題 4-1

▶ σ : 平面 $\Pi_{\mathbf{v}}$ 上の曲線 .

▶ $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ とすれば, $\sigma(s) = (x(s), y(s), 0)$.

▶ $\hat{\sigma}(s) := (x(s), y(s))$ とする .

とくに

$$\det(\sigma'', \sigma''', \mathbf{v}) = \det(\hat{\sigma}'', \hat{\sigma}''').$$

事実 (カスプの判定条件; 問題 1-2)

平面曲線 $\hat{\sigma}(s)$ が $s = s_0$ にカスプをもつ

$$\Leftrightarrow \hat{\sigma}(s_0) = \mathbf{0} \text{ かつ } \det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0)) \neq 0 .$$

常螺旋線の例:

Q

- ▶ 空間内の閉曲線についても平面上の閉曲線のように「回転数」というのは定義されているのでしょうか。個人的には問題 4-1 のように正射影を考えて、それについての回転数が空間内の閉曲線の「回転数」になるかと思ったのですが、射影をとる平面によって回転数が変わるのではと考えています。
- ▶ 一般の m 次直交空間における閉曲線のガウス写像は定義できますか？また、全曲率とどのような関係を持ちますか。

A

- ▶ 問題 4-1 のように射影をとると特異点ができることもある。
- ▶ ガウス写像は $\gamma': I \rightarrow S^{m-1}$ (S^{m-1} は $m-1$ 次元球面) として平面曲線と同様に定義できます。全曲率はその像の弧長。

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ は零点をもたず、撓率 τ は κ の m 倍 (m は定数) とする。このとき、大きさ 1 の定ベクトル v で $\gamma'(s)$ と一定の角度を成すものが存在することを示しなさい。

- ▶ フルネ枠 (e, n, b) をとる。
- ▶ $v(s) = a(s)e(s) + b(s)n(s) + c(s)b(s)$ とおく。
- ▶ 大きさの条件: $v \cdot v = 1$ 。
- ▶ 角度一定の条件: $v \cdot \gamma'$ が一定。
- ▶ v が定ベクトルである条件: $v' = 0$ 。

問題 4-2

問題

$M(n, \mathbb{R})$: \mathbb{R} 係数の n 次正方行列全体; $[X, Y] := XY - YX$
 $\text{Alt}(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$: 交代行列全体

- $X, Y \in \text{Alt}(n, \mathbb{R}) \Rightarrow [X, Y] \in \text{Alt}(n, \mathbb{R})$.
- とくに $n = 3$ のとき,

$$\iota: \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \text{Alt}(3, \mathbb{R})$$

とおくと $\iota(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = [\iota(\mathbf{x}), \iota(\mathbf{y})]$.

- $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し
 $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} + (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
- 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\text{SO}(n)$ への C^∞ -級写像 \mathcal{F} に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列 .

問題 4-2

問題

$M(n, \mathbb{R})$: \mathbb{R} 係数の n 次正方行列全体; $[X, Y] := XY - YX$
 $\text{Alt}(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$: 交代行列全体

- $X, Y \in \text{Alt}(n, \mathbb{R}) \Rightarrow [X, Y] \in \text{Alt}(n, \mathbb{R})$.
- $A \in \text{Alt}(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t A = -A$.
- ${}^t AB = {}^t B^t A$

注意:
 交換子積 $[\cdot, \cdot]$ は、ベクトル空間 $\text{Alt}(n, \mathbb{R})$ の双線形かつ交代的な積を与える。

問題 4-2

問題

$M(n, \mathbb{R})$: \mathbb{R} 係数の n 次正方行列全体; $[X, Y] := XY - YX$
 $\text{Alt}(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$: 交代行列全体

- とくに $n = 3$ のとき,

$$\iota: \mathbb{R}^3 \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \text{Alt}(3, \mathbb{R})$$

とおくと $\iota(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = [\iota(\mathbf{x}), \iota(\mathbf{y})]$.

そのまま計算すればよいが,
 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ において

$$\iota(e_1 \times e_2) = \iota(e_3), \quad [\iota(e_1), \iota(e_2)] = \iota e_3$$

などを示せばよい (双線型性, 交代性から 3 通りを示せばよい)

問題 4-2

問題

$M(n, \mathbb{R})$: \mathbb{R} 係数の n 次正方行列全体; $[X, Y] := XY - YX$
 $\text{Alt}(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$: 交代行列全体

- $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} + (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

$X := \iota(\mathbf{x})$, $Y = \iota(\mathbf{y})$, $Z = \iota(\mathbf{z})$ とすると

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = \cdots = O. \quad (*)$$

- ▶ 双線形・交代的な積 $[\cdot, \cdot]$ で (*) を満たすものが与えられている線型空間をリー環, リー代数という。
- ▶ ι はリー代数 (\mathbb{R}^3, \times) から $(\text{Alt}(3), [\cdot, \cdot])$ の間の同型を与える。

ベクトル三重積の公式 (テキスト付録 A-3) を用いてもよい。

問題 4-2

問題

- 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\text{SO}(n)$ への C^∞ -級写像 \mathcal{F} に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列 .

- ▶ \mathcal{F} は直交行列に値をとるから ${}^t \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$.
- ▶ $I = {}^t \mathcal{F} \mathcal{F}'$ の両辺を t で微分して

$$O = {}^t \mathcal{F}' \mathcal{F} + {}^t \mathcal{F} \mathcal{F}' = {}^t ({}^t \mathcal{F} \mathcal{F}') + {}^t \mathcal{F} \mathcal{F}' .$$

事実

直交群 $\text{SO}(n)$ のリー環は $\text{Alt}(n, \mathbb{R})$.

質問と回答

Q

問題 4-2 (4) の \mathcal{F}^{-1} とは「写像 \mathcal{F} の逆像」ではなく「直交行列の逆行列」という意味でとらえていますが、あっていますか？

A

文脈で考えてみよう。もし「逆像」だったとして、それと \mathcal{F} を「かける」というのはどういう意味でしょう。 $\mathcal{F}: I \rightarrow \text{SO}(n)$ なので、逆像は I の部分集合。