

# 幾何学概論第一 (MTH.B211)

0: ユークリッド空間

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

[www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/](http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/)

東京工業大学理学院数学系

2010/10/01

## 定理

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の等長変換は

$$\varphi: \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \quad A \in O(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される.

# ユークリッド空間

## 定義

1. ユークリッド空間:  $\mathbb{R}^n$  に標準的な内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を与えたもの。
2. 大きさ:  $v \in \mathbb{R}^n$  に対して  $|v| = \sqrt{v \cdot v}$ .
3. 角度:  $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  に対して

Schwartz

$$\angle(v, w) := \cos^{-1} \frac{v \cdot w}{|v| |w|}$$

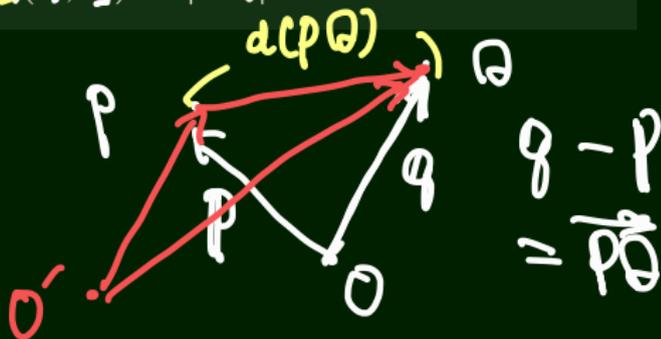
$$\frac{v \cdot w}{|v| |w|} = \frac{v \cdot w}{\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}}$$

- ④ 2点  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  に対して  $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$ .

注:

ユークリッド空間

- ▶  $v \cdot w = \sum_{i=1}^n v_i w_i$
- ▶  $(\mathbb{R}^n, d)$  は距離空間。



# 直交行列

## 定義

実数を成分とする  $n$  次正方行列が直交行列であるとは

$${}^tAA = A^tA = I \quad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

$$\begin{aligned} AB &= I \\ \Rightarrow BA &= I \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow {}^tAA = I$$

- ▶ 直交行列  $\Leftrightarrow$  内積を保つ線形変換:  $(Av) \cdot (Aw) = v \cdot w$
- ▶ 直交行列  $\Leftrightarrow$  大きさを保つ線形変換:  $|Av| = |v|$
- ▶  $(a_1, \dots, a_n)$  が直交行列  $\Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$  が  $\mathbb{R}^n$  の正規直交系

$$A^t A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 1$$

$$A^t(Ax \cdot Ay) = {}^t(AA)x \cdot y = {}^tIx = x \cdot y$$

$$x \cdot y = \frac{1}{4} (|x+y|^2 - |x-y|^2) \quad \text{正交}$$

# 直交群

## 命題

直交行列の行列式は 1 または  $-1$  である。

$$\left. \begin{aligned} \det({}^tAA) &= \det I \\ (\det {}^tA)(\det A) &= 1 \\ (\det A)^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

*orthogonal*  
 $O(n) := \{n \text{ 次直交行列} \}$

直交群

*special*  
 $SO(n) := \{A \in O(n); \det A = 1\}$

特殊直交群

- ▶  $O(n)$  は行列の積に関して群をなす。
  - ▶  $A, B \in O(n) \Rightarrow AB \in O(n)$  (結合則  $(AB)C = A(BC)$ )
  - ▶  $I \in O(n)$
  - ▶  $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$ .
- ▶  $SO(n)$  は行列の積に関して群をなす ( $O(n)$  の部分群)

## 2次直交行列

### 命題

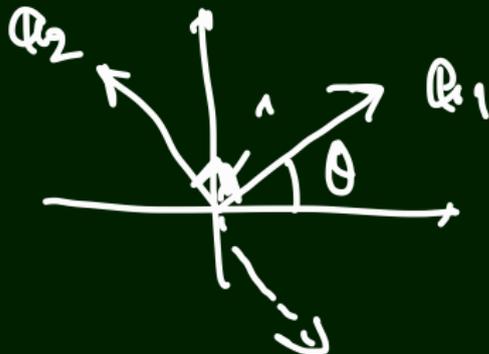
$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

*det = 1*

$$O(2) = SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

*det = -1*

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



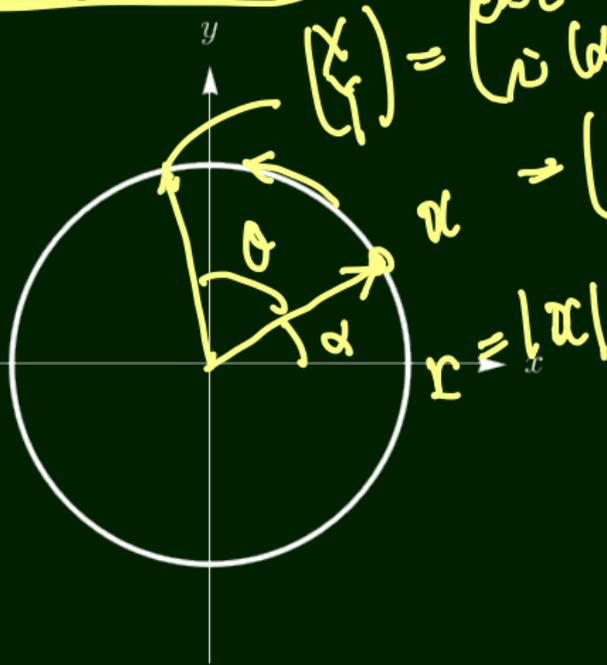
# 回転

$e^{\pm i\theta}$   
 $\text{SO}(2)$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}$$

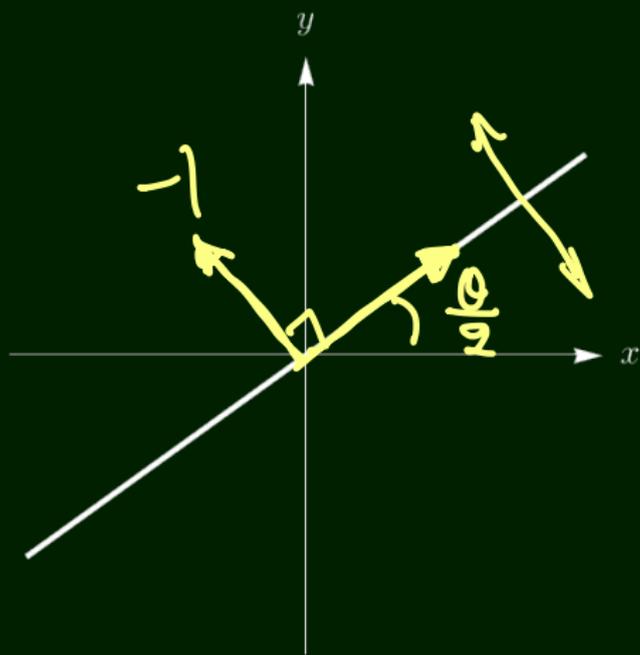
原点からの  
角  $\alpha$   
の回転



# 折返し

$$\sigma(O(2) \setminus SO(2))$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \pm 1$$



1-回転軸

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

# 3次直交行列

## 問題

$A \in \text{SO}(3)$  ならば, ある  $P \in \text{SO}(3)$  が存在して

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- ▶  $A$  の固有値の一つは  $1$ . その単位固有ベクトルを  $\mathbf{a}_1$  とする.
- ▶  $\mathbf{a}_1$  に直交する単位ベクトル  $\mathbf{a}_2$  をひとつとる.
- ▶  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  (ベクトル積) とする.
- ▶  $P = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  とおく.

# 等長変換

## 定義

写像  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が等長変換であるとは

$$\underline{d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)} \quad (P, Q \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つこと。

- ▶  $\mathbb{R}^n$  の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす。

## 補題

直交行列  $A \in O(n)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  に対して写像

$$\varphi_{A,a}: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \varphi_{A,a}(x) = \underline{Ax + a} \in \mathbb{R}^n$$

は等長変換。

せぬかて？

# 等長変換の決定

## 定理

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の等長変換は

$$\underline{\varphi: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax + a \in \mathbb{R}^n} \quad A \in \underline{O(n)}, \quad a \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \quad \psi = \varphi - \underline{\varphi(0)} \quad \underline{\psi(0) = 0} \\ \quad \psi: \text{等長} \\ \cdot \quad \underline{|\psi(v)| = |v|} \quad \underline{\psi(v) \cdot \psi(w) = v \cdot w} \\ \star \quad \psi: \text{線型} \quad \underline{|\psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y)|} \\ \quad \underline{\psi(x) = Ax} \quad \underline{= 0} \end{array} \right.$$

# 合同変換

$\mathbb{R}^n$  の 等長変換 を 合同変換 ということもある。等長変換  $x \mapsto Ax + a$  ( $A \in O(n)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ) が

- ▶ 向きを保つ合同変換  $\Leftrightarrow A \in SO(n)$ .
- ▶ 向きを反転する合同変換  $\Leftrightarrow A \in O(n) \setminus SO(n)$ .

$$n=2, n=3$$