

経営経済のための 最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第13回 均衡を厳密に求めるアルゴリズム

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡価格

- 定義: 価格ベクトル p^* は **均衡価格**

↔ 財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ が存在して

$$X_i \in D_i(p^*) \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{かつ} \quad p(j) = 0 \quad (\forall j \in X_0)$$

↔ $m + 1$ 個の財の部分集合 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ が存在して

$$(A) \quad X_i \in D_i(p^*) \quad (i = 1, \dots, m)$$

かつ $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ は財の配分

$$(B) \quad p(j) = 0 \quad (\forall j \in X_0)$$

(つまり, 価格 > 0 の財がすべて $\cup_{i=1}^m X_i$ に含まれる)

均衡価格の必要十分条件: 単一需要モデルの場合

単一需要モデルにおいて, 価格ベクトル p が均衡価格である



① 任意の $Z \subseteq N$ に対し,

$$|Z| \geq (D_i(p) \subseteq Z \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{ の数})$$

② 任意の $Y \subseteq N'$ に対し, $(Y \text{ 内の財を欲しい入札者の数}) \geq |Y|$

均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

- 条件②を満たしつつ, ①に違反する Z を減らすよう, 価格を増やす

条件(A)と等価な条件

(A) $X_i \in D_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$) を満たす財配分を求めたい

財集合 $Z \subseteq N$ に対し,

$\eta(i, Z) \equiv$ 入札者 i が利得最大の財集合を得るとき,
 Z から選ぶ必要のある財の最小数

$$= \min\{|X \cap Z| \mid X \in D_i(p)\}$$

- $\sum_{i \in B} \eta(i, Z) > |Z| \quad \rightarrow Z$ の財は, 配分するには不足 (自明)
- $\forall Z \subseteq N: |Z| \geq \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$
 $\rightarrow X_i \in D_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$) を満たす
 財配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ が存在 (要証明)

命題 価格ベクトル p に対し, $X_i \in D_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$)
 を満たす財配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ が存在

$$\leftrightarrow \forall Z \subseteq N: |Z| \geq \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$$

条件(A)と等価な条件: 具体例1

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の
上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

価格=(0,0,0,0,0), $Z=\{1,2,3\}$ のとき

aの需要集合 = $\{1,2,3,4,5\}$ のみ $\rightarrow Z$ の財を3つ欲しい

bの需要集合 = $\{2,4\}$ を含む全ての集合 $\rightarrow Z$ の財を1つ欲しい

cの需要集合 = $\{1,2,3,4,5\}$ のみ $\rightarrow Z$ の財を3つ欲しい

よって, 不足分は $3+1+3 - 3 = 4 > 3 = |Z|$

$\therefore Z$ の財は, 配分するには不足

条件(A)と等価な条件: 具体例2

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の
上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

価格=(3,4,2,0,3), $Z=\{1,2,3\}$ のとき

aの需要集合 = $\{3,4,5\}$ or $\{2,3,4,5\}$ → Z の財を1つ欲しい

bの需要集合 = $\{2,4\}$ のみ → Z の財を1つ欲しい

cの需要集合 = $\{3,4\}$, $\{1,3,4\}$, または $\{3,4,5\}$

→ Z の財を1つ欲しい

よって, 不足分は $3 = |Z|$

ただし $Z=\{4\}$ に対して, 条件不成立

条件(A)と等価な条件：具体例3

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の
上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

価格=(4,4,3,4,4) のとき

aの需要集合 = 5 を含み{2,3,5}に含まれる任意の集合

b の需要集合 = {2} または {2,4}

c の需要集合 = {3}

∴ $\forall Z \subseteq N: |Z| \geq \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$ 成立

実際, $X_0 = \{1\}, X_1 = \{5\}, X_2 = \{2,4\}, X_3 = \{3\}$ は

$X_i \in D_i(p) (i = 1,2,3)$ を満たす

(しかし, $X_0 = \{1\}$ は価格>0の財を含む∴p は均衡価格ではない)

条件(B)と等価な条件

(B) $p(j) = 0$ ($\forall j \in X_0$) (つまり $N' \subseteq \bigcup_{i=1}^m X_i$) を満たす
 $X_0, X_1, \dots, X_m$ を求めたい
 ※ $X_0, X_1, \dots, X_m$ は共通部分があってもよい

財集合 $Y \subseteq N' \equiv \{j \in N \mid p(j) > 0\}$ に対し,

$\mu(i, Y) \equiv$ 入札者 i が利得最大の財集合を得るとき,
 Y から受け取ることが可能な財の最大数

$$= \max\{|X \cap Y| \mid X \in D_i(p)\}$$

- $\sum_{i \in B} \mu(i, Y) < |Y| \rightarrow Y$ の財は, 配分するには多すぎ (自明)
- $\forall Y \subseteq N': \sum_{i \in B} \mu(i, Y) \geq |Y|$
 $\rightarrow p(j) = 0$ ($\forall j \in X_0$) を満たす財配分が存在 (要証明)

命題 価格ベクトル p に対し, $p(j) = 0$ ($\forall j \in X_0$)
 を満たす $X_0, X_1, \dots, X_m$ が存在

$\leftrightarrow \forall Y \subseteq N': \sum_{i \in B} \mu(i, Y) \geq |Y|$

条件(B)等価な条件: 具体例1

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の
上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

価格=(4,4,3,4,4), $Y=\{1,4\}$ のとき

aの需要集合 = 5 を含み{2,3,5}に含まれる任意の集合

→ Y の財を0個受け取り可能

b の需要集合 = {2} または {2,4} → Y の財を1個受け取り可能

c の需要集合 = {3} → Y の財を0個受け取り可能

よって, 受け取り可能な数は $0+1+0 = 1 < 2 = |Y|$

∴ Y の財は配分するには多すぎる

条件(B)と等価な条件: 具体例2

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の
上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

価格=(3,4,2,0,3)

aの需要集合 = {3,4,5} or {2,3,4,5}

bの需要集合 = {2,4} のみ

cの需要集合 = {3,4}, {1,3,4}, または {3,4,5}

$\therefore \forall Y \subseteq N': \sum_{i \in B} \mu(i, Y) \geq |Y|$ 成立

実際, $X_0 = \emptyset, X_1 = \{3,4,5\}, X_2 = \{2,4\}, X_3 = \{1,3,4\}$ は

$p(j) = 0 \ (\forall j \in X_0)$ を満たす

(しかし (X_0, X_1, X_2, X_3) は財配分ではない $\therefore p$ は均衡価格ではない)

均衡価格の必要十分条件

命題 価格ベクトル p に対し, $X_i \in D_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$)
 を満たす財配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ が存在
 $\longleftrightarrow \forall Z \subseteq N: |Z| \geq \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$

命題 価格ベクトル p に対し, $p(j) = 0$ ($\forall j \in X_0$)
 を満たす $X_0, X_1, \dots, X_m$ が存在
 $\longleftrightarrow \forall Y \subseteq N': \sum_{i \in B} \mu(i, Y) \geq |Y|$



定理 価格ベクトル p に対し,
 $X_i \in D_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$) および $p(j) = 0$ ($\forall j \in X_0$)
 を満たす財配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ が存在 (つまり, p は均衡価格)
 $\longleftrightarrow$

- ① $\forall Z \subseteq N: |Z| \geq \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$
- ② $\forall Y \subseteq N': \sum_{i \in B} \mu(i, Y) \geq |Y|$

アルゴリズムの概要

Gul-Stacchetti (2000) が提案
アルゴリズムの考え方

価格ベクトル p^* は **均衡価格**

$\longleftrightarrow$ ① $\forall Z \subseteq N: |Z| \geq \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$ ② $\forall Y \subseteq N': \sum_{i \in B} \mu(i, Y) \geq |Y|$

条件②を満たしつつ, ①に違反する Z を減らすよう, 価格を増やす

- 価格 $p = (0, 0, \dots, 0)$ のとき, $N' = \emptyset$ なので②は成立
- ①に違反する $Z \longleftrightarrow Z$ の財を欲しい入札者が多すぎる
 $\therefore Z$ に含まれる(幾つかの)財の価格を増やせば,
 欲しい入札者を減らせる(かもしれない)

Z の選び方

- $|Z| < \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$ を満たす Z の中で極小なもの, または
- 不足分 $\sum_{i \in B} \eta(i, Z) - |Z|$ が最大の Z (の中で極小なもの)

アルゴリズムの実行例(1-1)

不足分最大の
Zを利用

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 初期価格 (0,0,0,0,0)
 - a の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
 - b の需要集合 = {2,4} を含む任意の財集合
 - c の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
- Z = {1,2,3,4,5} とすると, 不足分が最大 $5+2+5-5=7$
- 価格 (1,1,1,1,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,5}, {1,2,3,4,5}
 - b の需要集合 = {2,4} のみ
 - c の需要集合 = {1,2,3,4,5} または要素数4の任意の財集合
- Z = {1,2,3,4,5} とすると, 不足分が最大 $4+2+4-5=6$

アルゴリズムの実行例(1-2)

不足分最大の
Zを利用

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 価格 (2,2,2,2,2)
 - a の需要集合 = {2,3,5}, {1,2,3,5}
 - b の需要集合 = {2,4} のみ
 - c の需要集合 = 要素数3または4の任意の財集合
- $Z = \{2,3,4,5\}$ とすると, 不足分が最大 $3+2+2-4=3$
- 価格 (2,3,3,3,3)
 - a の需要集合 = {2,5}, {1,2,5}, {2,3,5}, {1,2,3,5}
 - b の需要集合 = {2,4} のみ
 - c の需要集合 = {1}を含む, 要素数1,2または3の任意の財集合
- $Z = \{2\}$ とすると, 不足分が最大 $1+1+0-1=2$

アルゴリズムの実行例(1-3)

不足分最大の
Zを利用

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 価格 (2,4,3,3,3)
 - a の需要集合 = {5}を含み{4}を含まない, 任意の財集合
 - b の需要集合 = {2,4} のみ
 - c の需要集合 = {1}を含み{2}を含まない,
要素数1, 2または3の任意の財集合
- 全ての Z に対し, 不足数 ≤ 0
- $X_a = \{5\}$, $X_b = \{2,4\}$, $X_c = \{1,3\}$ は各入札者の利得最大の財集合
→ 均衡配分

定理 $(p^*(1), \dots, p^*(n))$: 極小均衡価格 とすると,
アルゴリズムの反復回数 $= \max_j p^*(j)$

アルゴリズムの実行例(2-1)

極小なZを利用

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 初期価格 (0,0,0,0,0)
 - a の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
 - b の需要集合 = {2,4} を含む任意の財集合
 - c の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
- Z = {5} とすると, 不足分 $1+0+1-1=1$ (かつ不足分 >0 の中で極小)
- 価格 (0,0,0,0,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
 - b の需要集合 = {2,4} を含み 5 を含まない任意の集合
 - c の需要集合 = {1,2,3,4} または {1,2,3,4,5}
- Z = {1} とすると, 不足分 $1+0+1-1=1$

アルゴリズムの実行例(2-2)

極小なZを利用

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 価格 (1,0,0,0,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
 - b の需要集合 = $\{2,4\} \subseteq X \subseteq \{2,3,4\}$ なる任意のX
 - c の需要集合 = {1,2,3,4} または {2,3,4,5}
- Z = {2} とすると, 不足分 $1+1+1-1=2$
- 価格 (1,1,0,0,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
 - b の需要集合 = $\{2,4\} \subseteq X \subseteq \{2,3,4\}$ なる任意のX
 - c の需要集合 = {1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {2,3,4,5}, または {1,2,3,4,5}
- Z = {3} とすると, 不足分 $1+0+1-1=1$

アルゴリズムの実行例(2-3)

極小なZを利用

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 価格 (1,1,1,0,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,4,5} のみ
 - b の需要集合 = {2,4}のみ
 - c の需要集合 = 要素数4または5の任意の集合
- Z = {4} とすると, 不足分 $1+1+0-1=1$
- 価格 (1,1,1,1,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,5}または{1,2,3,4,5}
 - b の需要集合 = {2,4}のみ
 - c の需要集合 = 要素数4または5の任意の集合
- Z = {2} とすると, 不足分 $1+1+0-1=1$

アルゴリズムの実行例(2-4)

極小なZを利用

- 入札者a: 重み和(①:2, ②:4, ③:3, ④:1, ⑤:5)
- 入札者b: 財集合(①:2, ②:5, ③:1, ④:4, ⑤:3) の中の上位2つの財に依存
- 入札者c: 財の数に依存(1つ:4, 2つ:7, 3つ:10, 4つ:12, 5つ:13)

- 価格 (1,2,1,1,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,5}または{1,2,3,4,5}
 - b の需要集合 = {2,4}のみ
 - c の需要集合 = {1,3,4,5}のみ
- Z = {4} とすると, 不足分 $0+1+1-1=1$
- 価格 (1,2,1,2,1)
 - a の需要集合 = {1,2,3,5}のみ
 - b の需要集合 = {2,4}または{2,5}
 - c の需要集合 = {1,3,5}, {1,2,3,5},または{1,3,4,5}
- Z = {3} とすると, 不足分 $1+0+1-1=1$

まだまだ続く

関数最小化と均衡の関係

総評価値最大化問題の双対問題

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + p(N)$

条件 $q(i) + p(Y) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$
 $p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

定理 最適解における $p \leftrightarrow$ 均衡価格
 さらに, 評価値が整数値 $\rightarrow$ 整数最適解が存在

リアプノフ関数

関数最小化問題に書き換えできる

最小化 $\sum_{i \in B} \max\{v_i(Y_i) - p(Y_i) | Y_i \subseteq N\} + p(N)$

条件 $p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

定理[Ausubel 2006] リアプノフ関数の最小解 $\leftrightarrow$ 均衡価格
 さらに, 評価値が整数値 $\rightarrow$ 整数最小解が存在

均衡計算＝リアプノフ関数最小化

Gul-Stacchetti (2006)の均衡計算のアルゴリズム

＝リアプノフ関数 $L(p) = \sum_{i \in B} \max\{v_i(Y_i) - p(Y_i) | Y_i \subseteq N\} + p(N)$

の最小化に対する降下法

(関数値を徐々に減らしていくアルゴリズム)

財集合 Z の価格 p における不足分 $\sum_{i \in B} \eta(i, Z) - |Z|$

＝財集合 Z の価格を1ずつ上げたときの、関数値の減少量

均衡計算での Z の選び方

- $|Z| < \sum_{i \in B} \eta(i, Z)$ を満たす Z の中で極小なもの → 単なる降下法
- 不足分 $\sum_{i \in B} \eta(i, Z) - |Z|$ が最大の Z (の中で極小なもの)
→ 最急降下法

解析において鍵となる性質

定理 リアプノフ関数はL_H凸性(離散中点凸性)をもつ

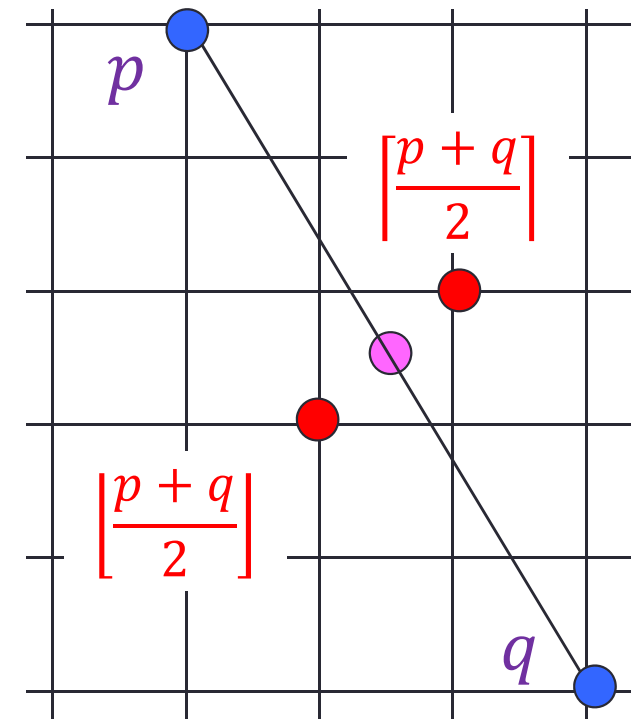
$$\forall p, q \in \mathbb{Z}^n: g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right)$$

一般のL_H凸関数 $g: \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
最急降下アルゴリズムが適用可能

ステップ0: 初期ベクトル $p=(0, \dots, 0)$

ステップ1: $g(p + e_X) - g(p)$ 最小
の $X \subseteq N$ を求める.

ステップ2: $g(p + e_X) = g(p)$ ならば終了,
そうでなければ $p := p + e_X$ とおきステップ1へ.



定理 $(p^*(1), \dots, p^*(n))$: 極小最小解 とすると,
アルゴリズムの反復回数 $= \max_j p^*(j)$