経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと離散最適化

第11回　均衡の存在判定

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡配分の判定

複数不可分財のオークションにおいて，
- 与えられた財の配分が均衡配分か否かを判定したい
- 与えられた均衡配分に対応する均衡価格を計算したい

定義：財の配分$(X_1, \ldots, X_m)$　は 均衡配分
⟷ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在
$X_i \in D_i(p)$ $(\forall i = 1, \ldots, m)$

この条件は，
- 一般には差分不等式系にはならない：3つ以上の変数が現れる
  $v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p(j) \geq v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j)$ $(\forall Y \subseteq N)$
  - 不等式の数が膨大：2^n 個
- 評価関数が粗代替性をもつとき，差分不等式系になる
  ← 単改良性を使う
  - 不等式の数も激減する：n^2 個程度

単改良性の書き換え

定義： 単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall p \in \mathbb{R}^N$, $\forall X \subseteq N$,

$X \notin D_i(p)$ ➔ $\exists Y \subseteq N$ such that $v_i(Y) - \sum_{j\in Y} p_j > v_i(X) - \sum_{j\in X} p_j$

& $|Y \setminus X| \leq 1$, $|X \setminus Y| \leq 1$

単改良性の条件の対偶より，

利得最大であるための必要十分条件が得られる：

$\forall p \in \mathbb{R}^N$, $\forall X \subseteq N$,

（＊） $v_i(Y) - \sum_{j\in Y} p_j \leq v_i(X) - \sum_{j\in X} p_j$ が

$|Y \setminus X| \leq 1$, $|X \setminus Y| \leq 1$ を満たす任意の $Y \subseteq N$ について成立

⬅➔ $X \in D_i(p)$

※ 上記の「➔」の逆は自明に成り立つ.

単改良性の書き換え（つづき）

$\forall p \in \mathbb{R}^N$, $\forall X \subseteq N$,
（＊） $v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j \le v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$ が
$|Y \setminus X| \le 1$, $|X \setminus Y| \le 1$ を満たす任意の $Y \subseteq N$ について成立
$\Leftrightarrow$ $X \in D_i(p)$

$$v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j \le v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j \in X \setminus Y} p_j - \sum_{j \in Y \setminus X} p_j \le v_i(X) - v_i(Y)$$

上の関係より，条件（＊）は下記の条件と等価：

$p_h - p_k \le v_i(X) - v_i(X - h + k)$ $(\forall h \in X, k \in N \setminus X)$
$p_h \le v_i(X) - v_i(X - h)$ $(\forall h \in X)$
$-p_k \le v_i(X) - v_i(X + k)$ $(\forall k \in N \setminus X)$

均衡条件の書き換え

評価関数がすべて粗代替性を満たす場合,
均衡配分の条件をより簡単に書き換え可能:

財の配分$(X_1, \ldots, X_m)$ は 均衡配分
⇔ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

$\forall i = 1, \ldots, m$:

$$p_h - p_k \leq v_i(X_i) - v_i(X_i - h + k) \ \ (\forall h \in X_i, k \in N \setminus X_i)$$

$$p_h \leq v_i(X_i) - v_i(X_i - h) \ \ (\forall h \in X_i)$$

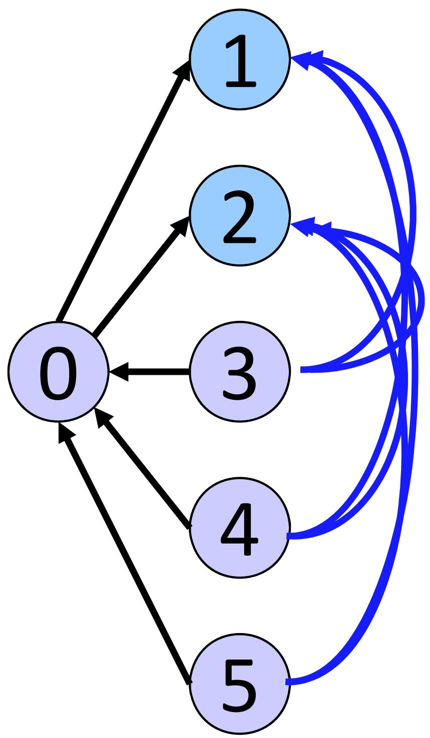
$$-p_k \leq v_i(X_i) - v_i(X_i + k) \ \ (\forall k \in N \setminus X_i)$$

これは差分不等式系 ➔ 最短路問題に帰着して,
解の存在性の判定が可能

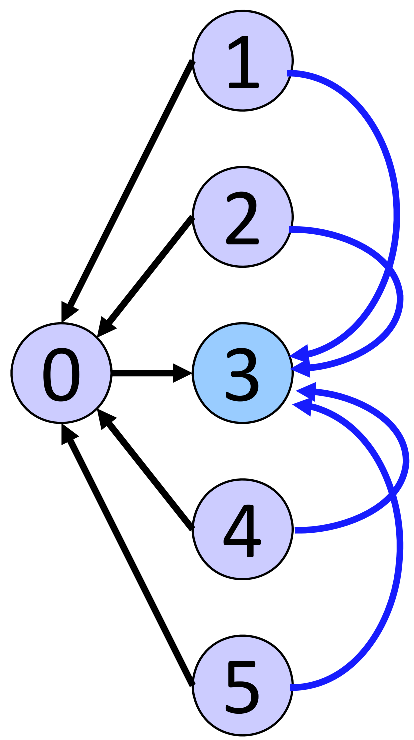
均衡配分チェックに使うグラフ

具体例: 入札者 A, B, C, 財1,...,5, $X_A = \{1,2\}, X_B = \{3\}, X_C = \{4,5\}$

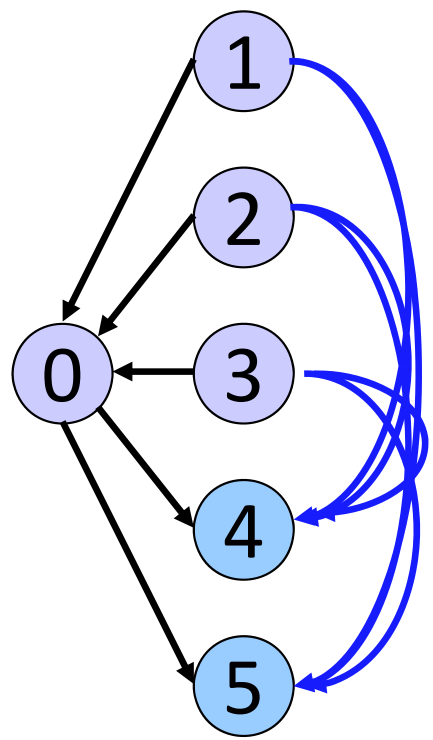
➔ 以下の枝をすべて合わせたグラフ(枝長は省略)



入札者Aに対応



入札者Bに対応



入札者Cに対応

※価格の非負条件に対応する枝も加える

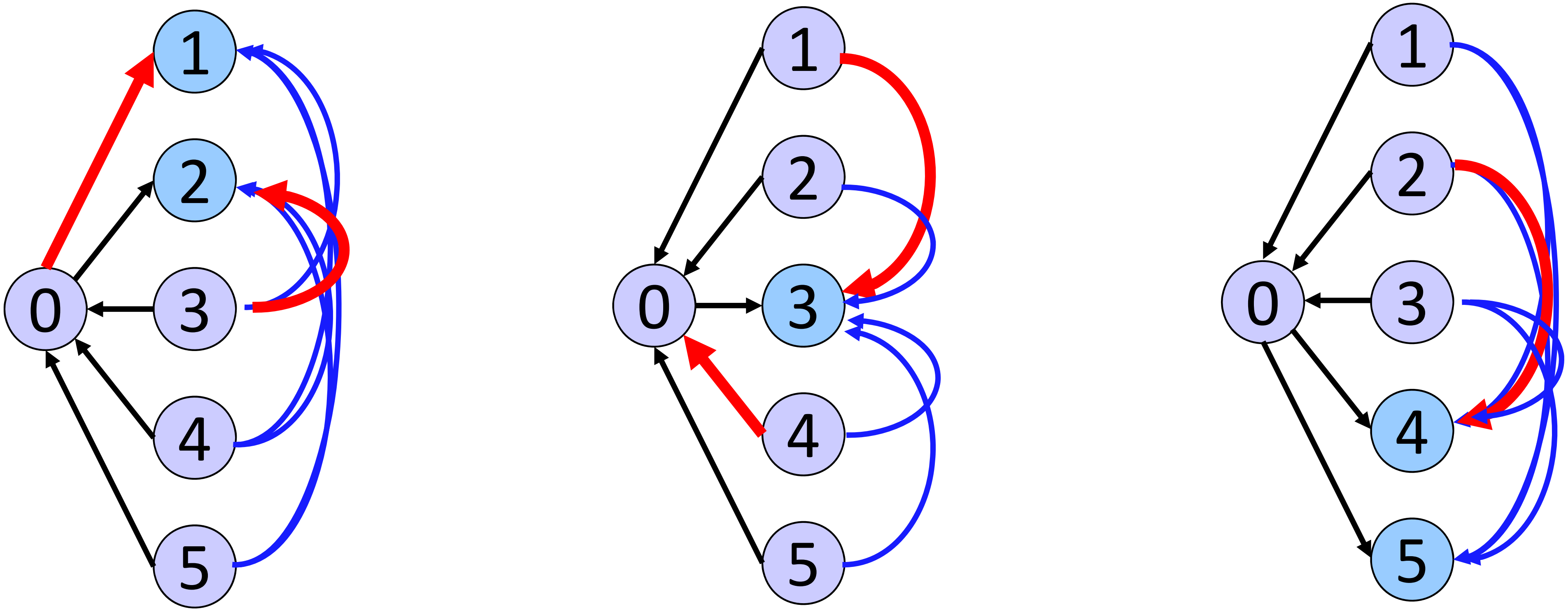
均衡配分チェックのグラフの閉路

このグラフの有向閉路は，

入札者の間での財の（ある種の）交換に対応

例： $X_A = \{1,2\}, X_B = \{3\}, X_C = \{4,5\}$

➔ $X_A = \{3\}, X_B = \{1,4\}, X_C = \{2,5\}$ へ変更した場合



入札者Aに対応　入札者Bに対応　入札者Cに対応

均衡価格の判定

複数不可分財のオークションにおいて,
- 与えられた財の価格が均衡価格か否かを判定したい
- 与えられた均衡価格に対応する均衡配分を計算したい

定義:財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡配分

⟺ 均衡条件 $X_i \in D_i(p) \ (\forall i = 1, \dots, m)$

を満たす財の配分$(X_1, \dots, X_m)$が存在

この条件は,
- 一般には判定が困難
- 評価関数が粗代替性をもつとき,「上手な」判定方法が存在
  - 最大マッチングを一般化した問題に帰着可能
  - $D_i(p)$ のもつ良い組合せ構造を利用

需要集合の組合せ構造

命題: 評価関数 v_i が粗代替性を満たすとき,
任意の価格ベクトル p での需要集合 $D_i(p)$ は以下の条件を満たす:
$\forall X, Y \in D_i(p), \forall i \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:
(i) $X - i, Y + i \in D_i(p)$,
(ii) $\exists j \in Y \setminus X$: $X - i + j, Y + i - j \in D_i(p)$

この条件を満たす集合族は**一般化マトロイド**（または**M♮凸集合**）とよばれる

この構造を利用することで,
条件 $X_i \in D_i(p)$ を満たす財の配分$(X_1, \ldots, X_m)$ の
存在性判定を「上手に」行うことができる

均衡条件を満たす配分の求め方

均衡条件 $X_i \in D_i(p)$ $(\forall i = 1, \dots, m)$を満たす
財の配分$(X_1, \dots, X_m)$ の存在判定および計算のアルゴリズムの流れ

Step 0: $X_i \in D_i(p)$ $(i = 1, \dots, m)$ を,
$\sum_i |X_i| = n$ の条件の下で自由に選ぶ.

Step 1: $(X_1, \dots, X_m)$ に重複がなければ終了（財の配分である）.

Step 2: 下記の要領で重複度を1減らすことを試みる.
減らせなかったら終了
（均衡条件を満たす財の配分は存在しない）

※最大マッチング問題に対する増加路アルゴリズムに対応

均衡条件を満たす配分の求め方

Step 2: 以下の条件を満たす入札者 $i_1, \ldots, i_k$（重複があっても可）と

財$j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}$（重複は不可）を探す.

財 j_1 は複数の入札者がもつ.

財 j_1 を含む X_{i_1} から j_1 を取って，含まれない j_2 を追加すると

$$X_{i_1} - j_1 + j_2 \in D_{i_1}(p) .$$

財 j_2 を含む X_{i_2} から j_2 を取って，含まれない j_3 を追加すると

$$X_{i_2} - j_2 + j_3 \in D_{i_2}(p) .$$

:

財 j_k を含む X_{i_k} から j_k を取って，含まれない j_{k+1} を追加すると

$$X_{i_k} - j_k + j_{k+1} \in D_{i_k}(p) .$$

財 j_{k+1} は $X_1, \ldots, X_m$ に含まれない.

存在したら，この要領で $X_1, \ldots, X_m$ を更新 → 重複が1つ減る.

存在しなかったら終了（条件を満たす配分なし）.

複数需要モデルでの総評価値最大化問題と双対問題

総評価値最大化問題

最大化 $\sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i)$　　条件 $(Y_0, Y_1, \dots, Y_m)$は財の配分

その双対問題

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

雇用者 i が労働者の集合 Y を雇って得られる収益 $v_i(Y)$ より,

{i}∪Y への配分額総額の方が大きい（または等しい）

均衡配分と最大化問題の関係

単一需要モデルのとき: 均衡配分 ←→ 最大重みマッチング
（総評価値を最大にする配分）

定理: α^* は均衡配分 → α^* に対応するマッチングは最大重み
均衡が存在するとき, α は最大重みマッチング → α は均衡配分

複数需要モデルのときも同様の関係:
均衡配分 ←→総評価値最大化問題の最適解
最大化: $\sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i)$ 条件: $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)$は財の配分

定理:
(i) $(X_0, X_1, \ldots, X_m)$は均衡配分 →総評価値最大化問題の最適解
(ii) 均衡が存在するとき,
$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$は総評価値最大化問題の最適解→均衡配分

均衡価格と双対問題の関係

単一需要モデルのとき: 均衡価格 ←→ 双対最適解の一部

定理: 任意の均衡価格 p に対し, q(i) (i∈B) を

$$q(i) = \max\left[0, \max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$$

により定義すると, (q,p) は最適解

均衡が存在するとき,
双対問題の任意の最適解 (q′,p′) に対し, p′ は均衡価格

複数需要モデルのときも同様の関係

均衡価格と双対問題の関係

複数需要モデルのときも同様の関係：

均衡価格 ←→ 双対最適解の一部

定理： 任意の均衡価格 p に対し, q(i) (i∈B) を

$$q(i) = \max\left[0, \max_{Y \subseteq N}\left\{v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j)\right\}\right]$$

により定義すると, (q,p) は最適解

均衡が存在するとき,

双対問題の任意の最適解 (q’,p’) に対し, p’ は均衡価格

均衡の存在の証明：方針

均衡の存在性の仮定をせずに，

「$(X_1, \ldots, X_m)$は総評価値最大化問題の最適解 ➔ 均衡配分」

を証明できればよい．

つまり，最適解 $(X_1, \ldots, X_m)$ に対し，

均衡条件を満たす財の価格が存在することを示せばよい．

← 均衡配分チェックのところで使ったグラフ（補助グラフとよぶ）

に基づく，総評価値最大化問題の最適解の特徴付けを利用

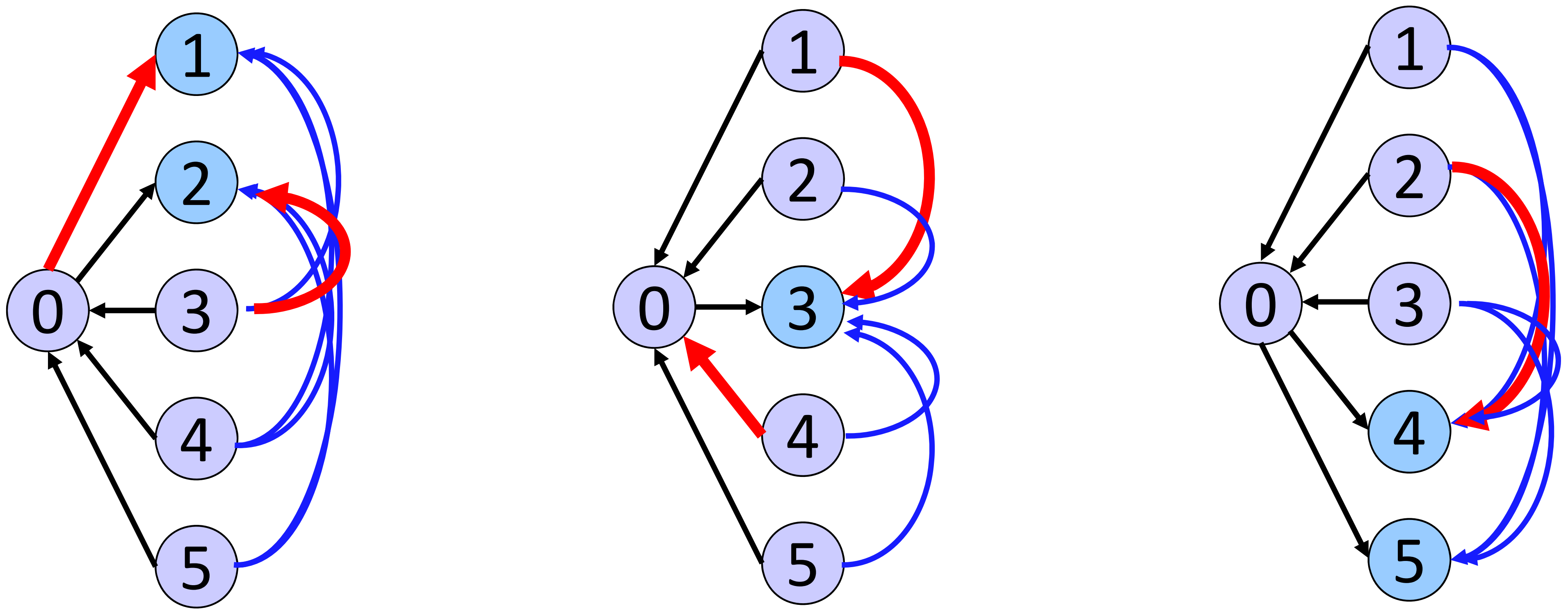
均衡配分チェックのグラフの閉路(再掲)

このグラフの有向閉路は,

入札者の間での財の(ある種の)交換に対応

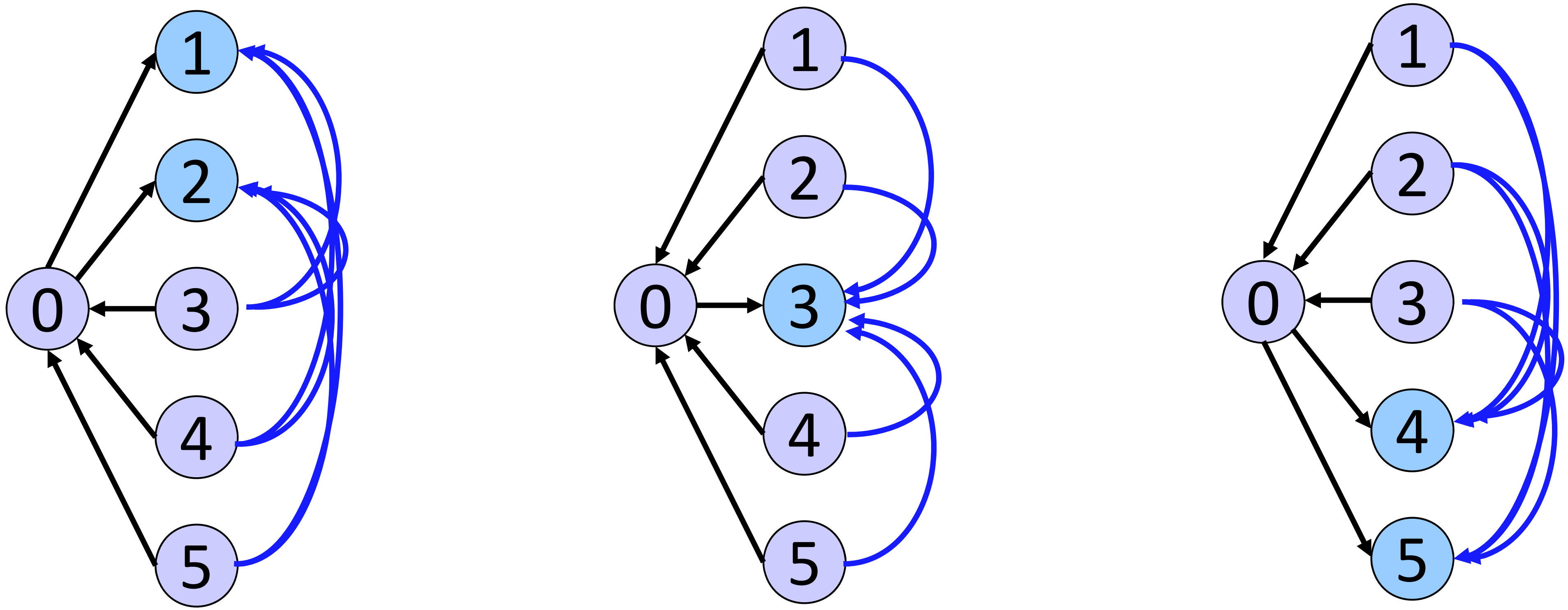
例: $X_A = \{1,2\}, X_B = \{3\}, X_C = \{4,5\}$

➔ $X_A = \{3\}, X_B = \{1,4\}, X_C = \{2,5\}$ へ変更した場合



入札者Aに対応　　入札者Bに対応　　入札者Cに対応

総評価値最大化の特徴付け



入札者Aに対応　入札者Bに対応　入札者Cに対応

定理： $(X_1, \ldots, X_m)$は総評価値最大化問題の最適解
⇔ $(X_1, \ldots, X_m)$ に関する補助グラフに負閉路が存在しない

➔（の対偶）の証明は比較的簡単.
負閉路が存在したら，それに対応する財の交換を行うと，評価値減少

均衡の存在の証明

定理： $(X_1, \ldots, X_m)$は総評価値最大化問題の最適解
⇔ $(X_1, \ldots, X_m)$ に関する補助グラフに負閉路が存在しない

最短路問題のところで示した結果より，
$(X_1, \ldots, X_m)$ に関する補助グラフに負閉路が存在しない
⇔ 補助グラフにおけるポテンシャルが存在
⇔ 均衡配分であるための条件を満たす価格が存在

∴総評価値最大化問題の最適解は均衡配分

レポート問題

問1: 入札者がA, B, C, 財が1,2,3,4のとき,
財の配分 X_1={1}, X_2={4}, X_3={2,3} が均衡配分であることを示したい.

Aさんの評価関数: ①を含む財集合は100, それ以外は0
Bさんの評価関数: 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:100
Cさんの評価関数:財の数依存
(1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280)

この配分が均衡配分であるための,
財の価格の条件(スライド5参照)をすべて書きなさい.

ヒント:不等式の数は20個以上になります.
また, 不等式系の解のひとつは (60,60,60,60)になります.

レポート問題

問2: 対称凹評価関数 $v(X) = \varphi(|X|)$（ φ は凹関数）がM♮凹性を満たすことを証明せよ．なお，φ に関する次の不等式を使ってよい：
$x < y$ ならば $\varphi(x) + \varphi(y) \leq \varphi(x+1) + \varphi(y-1)$

問3: 単一需要評価関数 $v_i(X) = \max_{j \in X} v(i,j)$（ $v(i,j)$ は非負）に対し，下記の条件が成り立つことを証明せよ：
要素数の等しい財集合 X, Y および任意の j∈X-Y に対し，ある k∈Y-X が存在して，

$$v_i(X) + v_i(Y) \leq v_i(X - j + k) + v_i(Y + j - k)$$