経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと
離散最適化

第9回 複数需要モデルとワルラス均衡

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

これまでの講義内容のまとめ

- 供給は複数，需要は単一のオークションモデル
  - ワルラス均衡の定義
  - 均衡の存在性
    - 常に存在
  - 均衡の性質
    - 均衡配分＝最大重みマッチング
    - 均衡価格＝双対問題の最適解（の一部）
  - 均衡の計算
    - 評価値が所与：最大重みマッチングを利用
    - 評価値が不明，需要集合の要素が所与：
      均衡を近似に求めるアルゴリズム
    - 評価値が不明，需要集合全体が所与：
      均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

今後の講義内容

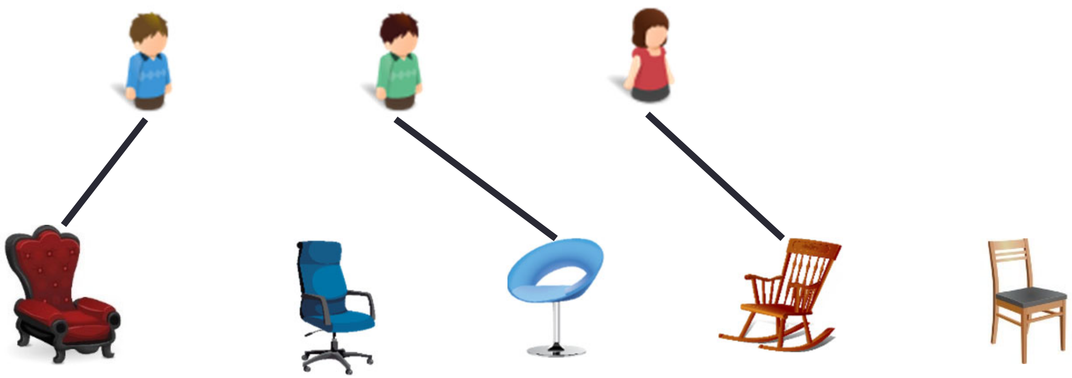
- 供給は複数，需要も複数のオークションモデル
  - ワルラス均衡の定義
  - 均衡の存在性
    - 存在するとは限らない
    - 評価値が粗代替性を満たす→存在
  - 均衡の性質
    - 均衡配分＝総評価値最大の財の配分
    - 均衡価格＝双対問題の最適解（の一部）
  - 粗代替性と等価な性質：単改良性，M凹性
  - 均衡の計算
    - 評価値が所与：総評価値最大の財の配分を求めるアルゴリズム
    - 評価値が不明，需要集合の要素が所与：
      均衡を近似に求めるアルゴリズム
    - 評価値が不明，需要集合全体が所与：
      均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

複数財オークション：複数需要モデル

複数財を　同時に　オークション

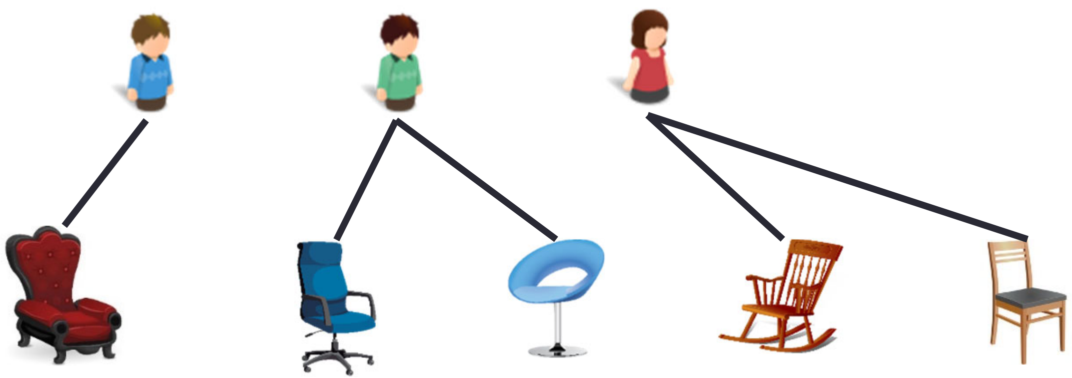
これまで授業で扱ったモデル：単一需要モデル

- 入札者は　高々1つの財　が欲しい（割当モデル）



これから扱うモデル：複数需要モデル

- 入札者は複数の財を得ることが可能



具体例の一部：
- 周波数の割当
- 空港の離発着権
- トラック配送の請負

評価関数とその分類

財集合の評価関数

- 財の評価

単一需要モデル

- 入札者は各財を評価 → 財ごとに評価値 v(i,j)

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数（評価関数, valuation function）

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少： $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leqq v_i(Y)$

評価関数の具体例


①


②


③


④


⑤

- ①を含む財集合は100，それ以外は0 (single-minded)
- 重み和（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）(additive)
- 財集合（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）の中の

  一番良い財にのみ依存 (unit-demand)

  {①, ②, ③}➔評価値70, {③, ④, ⑤}➔評価値100
- 財の数に依存 (symmetric)

  （1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300）

さまざまな評価関数の定義

- 一意専心(single-minded)評価関数:

特定の財集合 S とその価値 α を用いて, $v_i(X) = \begin{cases} \alpha & (X \supseteq S) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

- 加法的(additive)評価関数: 各財 j の評価値 $v(i,j)$ を用いて

$$v_i(X) = \sum_{j \in X} v(i,j)$$

- 対称(symmetric)評価関数: 単調非減少関数 $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ を用いて,

$$v_i(X) = \varphi(|X|)$$

(φ が上に凸(concave)な場合➔対称凹(symmetric concave))

- 単一需要(unit-demand) 評価関数:

各財 j の評価値 $v(i,j)$ を用いて

単一需要モデル
に対応

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v(i,j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

割当評価関数

割当(assignment)評価関数：最大重みマッチングで評価値が定まる

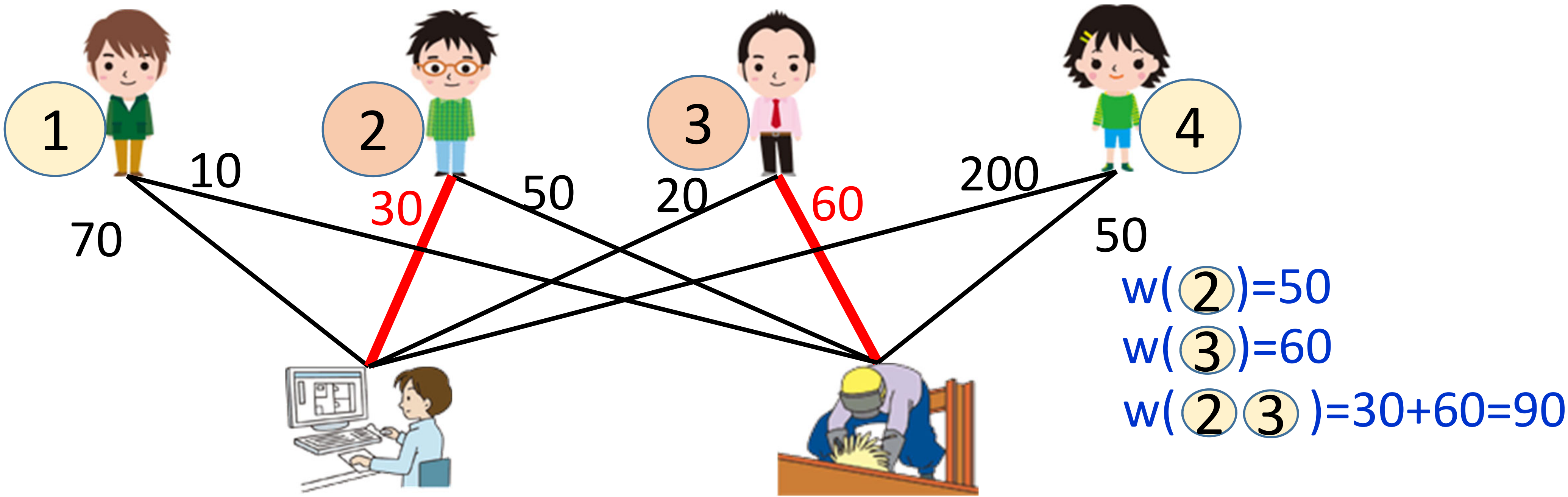
イメージ：ある工場の就職担当が，

k人の労働者(「財」)を雇って，k個の仕事に割り当てる

w_{jh} =労働者 j を仕事 h∈{1,2,…,k} に割り当てたときの利益

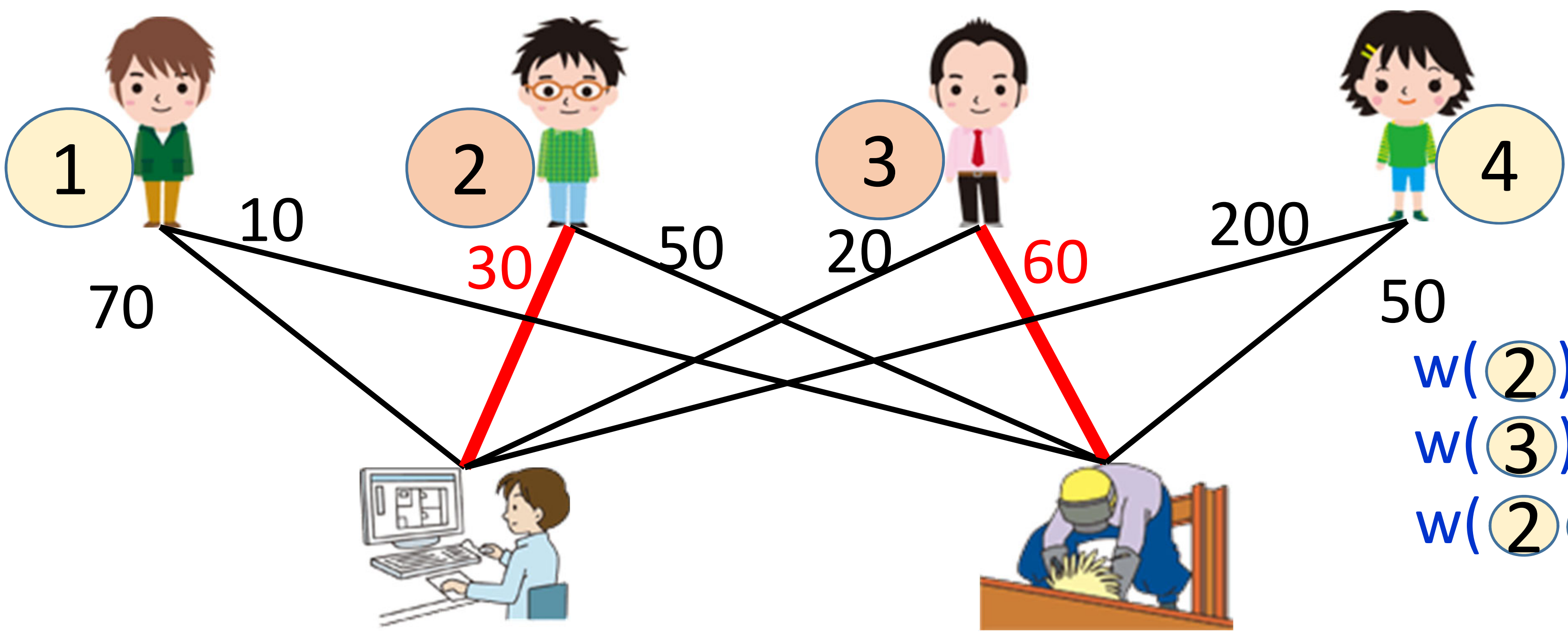
$v_i(X)$ =労働者 X を仕事{1,2,…,k} に割り当てたときの最大利益

$= \max\{\sum_{(j,h)\in M} w_{jh} \mid M$: マッチング， Xをカバー$\}$



割当評価関数

{}	0	{1,4}	210	{2,3,4}	260
{1}	70	{2,3}	90	{1,2,3,4}	260
{2}	50	{2,4}	250		
{3}	60	{3,4}	260		
{4}	200	{1,2,3}	130		
{1,2}	120	{1,2,4}	250		
{1,3}	130	{1,3,4}	260		



w(2)=50
w(3)=60
w(2 3)=30+60=90

ワルラス均衡の定義

需要集合

常に
$\max\{v_i(X) - \sum_{j\in X} p(j)\,|X \subseteq N\}$
$\geq v_i(\emptyset) = 0$

定義：需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$

$$D_i(p) = \arg\max\{v_i(X) - \sum_{j\in X} p(j)\,|X \subseteq N\}$$

価格 p の下で
最も欲しい
財集合　の集合

例：$p = (60,60,60,60,60)$ のとき

- Aさん：①を含む財集合は100，それ以外は0
  ➔ $D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
  （欲しい財以外は，価格>0ならば選ばない）
- Bさん：重み和（①：50，②：70，③：40，④：30，⑤：100）
  ➔ $D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
  （評価値>価格なら選ぶ，評価値<価格なら選ばない）
- Cさん：財の数依存（1つ：100, 2つ：180, 3つ：240, 4つ：280, 5つ：300）
  ➔ $D_C(p) = \{$財の数2または3$\}$

ワルラス均衡

財 N={1,2,…,n} を入札者 M = {1,2,…,m} に配分

→ $(X_0, X_1, \ldots, X_m)$ と表記

- X_i = 入札者 i へ割り当てられた財集合 (i=1,2,…,n)
- X_0 = 誰にも割り当てられなかった財集合

定義：価格ベクトルp^*と財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$の組はワルラス均衡

⇔ $X_i \in D_i(p^*)\ (i = 1, \ldots, m), \quad p(j) = 0\ (j \in X_0)$

例：$p = (60,60,60,60,60)$のとき

- Aさん：$D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
- Bさん：$D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
- Cさん：$D_C(p) = \{$財の数2または3$\}$

➔ p と配分 $\{\emptyset, \{1\},\ \{2,5\},\ \{3,4\}\ \}$ はワルラス均衡

ワルラス均衡が存在しない例

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
∅	0	0
①	3	0
②	3	0
①, ②	4	5

ワルラス均衡は存在するとは限らない

均衡が存在すると仮定:

- X_0=∅ なる均衡が存在
- A, B で財を分割する場合
  対称性より, A に財①, Bに財②を割り当て
- 財①を A に割当

→Aにとって {①}の利得≧{①, ②}の利得 → 財②の価格≧1

- 財②を B に割当

→ Bにとって財②の利得≧0 → 財②の価格=0 (矛盾)

∴ 可能な割当は, 入札者 A または B に全部

- B に全部 → {①, ②}の総価格≦5
  そのとき, A へ空集合が割り当てられる → ①(②)の価格≧3
  → {①, ②}の総価格≧6 (矛盾)
- A に全部割り当てたときの証明も同様.

ワルラス均衡の定義の書き換え

定義：価格ベクトルp^*と財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$の組はワルラス均衡

$\Leftrightarrow$ $X_i \in D_i(p^*)\ (i=1,\ldots,m), \quad p(j)=0\ (j \in X_0)$

※各評価関数が単調非減少のとき，

均衡において$X_0 = \emptyset$ と仮定できる.

実際，$X_0 \neq \emptyset$ であっても，$X_1 \cup X_0 \in D_1(p^*)$ が成り立つので，

X_1 を $X_1 \cup X_0$ に置き換えればよい.

$X_1 \cup X_0 \in D_1(p^*)$ の証明：

評価関数が単調非減少なので $v_1(X_1 \cup X_0) \geq v_1(X_1)$

$p(j)=0\ (j \in X_0)$ なので $\sum_{j \in X_1 \cup X_0} p(j) = \sum_{j \in X_1} p(j)$

$\therefore\ v_1(X_1 \cup X_0) - \sum_{j \in X_1 \cup X_0} p(j) \geq v_1(X_1) - \sum_{j \in X_1} p(j)$

$X_1 \cup\!\in D_1(p^*)$ なので，$v_1(X_1) - \sum_{j \in X_1} p(j) = \max\{v_1(X) - \sum_{j \in X} p(j)\,|X \subseteq N\}$

$\therefore\ X_1 \cup X_0 \in D_1(p^*)$

ワルラス均衡の定義の修正版

※各評価関数が単調非減少のとき,

均衡において$X_0 = \emptyset$と仮定できる.

∴財の配分を　$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$　から　$(X_1, \ldots, X_m)$　に置き換えてよい

修正した定義:

価格ベクトルp^*と財の配分$(X_1, \ldots, X_m)$の組はワルラス均衡

$\Leftrightarrow$ $X_i \in D_i(p^*)\ (i = 1, \ldots, m)$

今後は
こちらの定義も
しばしば使う

単一需要と複数需要のモデルでの均衡の関係

単一需要と複数需要の場合の均衡の比較

- 単一需要モデルにおけるワルラス均衡

  ≒ 複数需要モデルで単一需要評価関数の場合のワルラス均衡

  単一需要評価関数: 各財 j の評価値 $v_i(i,j)$ を用いて

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v_i(i,j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

より具体的には,

- 一方のワルラス均衡から, 他方のワルラス均衡を簡単に作れる
- 一方の均衡価格は, 他方でも均衡価格

∴ 単一需要モデルは, 複数需要モデルの特殊ケースと見なせる

準備：単一需要評価関数の需要集合

単一需要評価関数 $v_i(X) = \max_{j \in X} v_i(i,j)$ の場合における需要集合の性質

以下，$p(X') \equiv \sum_{j \in X'} p(j)$，

$v_i(i,j) - p(j)$ を最大にする財 j の集合を J とおく

命題1： 非空な財の集合 X に対して，

X の利得 $v_i(X) - p(X)$ が最大（つまり $X \in D_i(p)$ ）

➔ (i) $\max_{j \in N}\{v_i(i,j) - p(j)\} \geq 0$　　(ii) X∩J≠∅

命題2： $\max_{j \in N}\{v_i(i,j) - p(j)\} \geq 0$ のとき，j∈J に対して X={j} とおくと，

X の利得 $v_i(X) - p(X)$ は最大（つまり $X \in D_i(p)$ ）

命題3： X=∅ の利得 $v_i(X) - p(X)$ が最大（つまり $\emptyset \in D_i(p)$ ）

⇔ $\max_{j \in N}\{v_i(i,j) - p(j)\} \leq 0$

命題1の「➔」の証明

非空なX の利得 $v_i(X) - p(X)$ が最大

➔ $v_i(X) - p(X) \geq v_i(\emptyset) - p(\emptyset) = 0$

$v_i(X) = v(i, k)$ を満たす財k∈X に対し,

$v(i, k) - p(k) \geq v_i(X) - p(X) \geq 0$ ∴(i)成立.

$v_i(i, j) - p(j)$ を最大にする財 j∈J を任意に選び, j* とおく.

また, Y*={j*} とおく ← Y* の利得は $v(i, j^*) - p(j^*)$.

財集合 X が X∩J=∅ を満たすとき,

$v_i(X) = v(i, k)$ を満たす財k∈X に対し, k∉J なので

$v_i(X) - p(X) \leq v(i, k) - p(k) < v(i, j^*) - p(j^*) = v_i(Y^*) - p(Y^*)$

∴X は利得最大ではない

∴ (ii)成立.

単一需要の均衡 ➔ 複数需要の均衡

財の配分$\alpha(i)$ $(i \in B)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ の組からなる

単一需要モデルの均衡を考える.

財の配分$(X_0, X_1, \dots, X_m)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ を以下の様に定義:

$\alpha(i) \neq 0$ のとき $X_i = \{\alpha(i)\}$,　$\alpha(i) = 0$ のとき $X_i = \emptyset$

X_0=残りの財

➔ $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と $p(j)$ $(j \in N)$ は　複数需要モデルの均衡

（証明）X_0 の各財はもともと誰にも割り当てられていない

➔単一需要モデルの均衡の条件より，価格＝0

$\alpha(i) \neq 0$ のとき，均衡配分の条件より

財 $j = \alpha(i)$ は $v_i(i,j) - p(j)$ を最大にする.

∴ 命題2より，$X_i \in D_i(p^*)$ 成立.

$\alpha(i) = 0$ のとき，均衡配分の条件より，$\max_{j \in N}\{v_i(i,j) - p(j)\} \leq 0$

∴ 命題2より，$\emptyset \in D_i(p^*)$ 成立.　■

単一需要の均衡 ➔ 複数需要の均衡

$(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と $p(j)$ $(j \in N)$ は　複数需要モデルの均衡

（証明）

X_0 の各財はもともと誰にも割り当てられていない

➔単一需要モデルの均衡の条件より，価格＝0

さらに，各 i=1,…,n に対し，X_i の選び方より下記が成立：

(i) $v_i(i, j) - p(j)$ を最大にする財 j=j* を X_i は含む

（∵ αは単一需要モデルの均衡配分）

(ii) X_i に含まれる j* 以外の財の価格は 0（∵財が1つのみだから）

∴前のスライドの命題より，$X_i \in D_i(p^*)$ $(i = 1, \dots, m)$ 成立　■

複数需要の均衡 ➔ 単一需要の均衡

- 複数需要モデルの場合の均衡から，
  単一需要モデルの均衡を作る方法

財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$と価格ベクトル p の組からなる
（複数需要モデルにおける）ワルラス均衡を考える

➔ 定義より　$X_i \in D_i(p^*)\ (i = 1, \ldots, m),\quad p(j) = 0\ (\forall j \in X_0)$

以下，簡単のために，各 X_i (i=1,2,…,m) は非空と仮定

➔ 命題1より，X_i は $v_i(i,j) - p(j)$ を最大にする財 j=j_i を含む

∴ $\alpha(i) = j_i\ (i = 1, \ldots, n)$ とおくと，単一需要モデルの均衡配分.

p は単一需要モデルでも均衡価格.

均衡配分の性質

ワルラス均衡と総評価値最大化

単一需要モデルの場合： 均衡配分←→総評価値最大

定理：

(i) 財の配分$\alpha(i)$ $(i \in B)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ の組が均衡のとき
配分$\alpha(i)$ は最大重みマッチング

(ii) 任意の最大重みマッチングは均衡配分

複数需要モデルの場合： 均衡配分←→総評価値最大

定理：

(i) 財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$と価格$p(j)$ $(j \in N)$ の組が均衡のとき
$\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) = \max\{\sum_{i=1}^{m} v_i(Y_i) \mid (Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)$は財の配分$\}$

(ii) 均衡が存在するとき,
上記式の右辺の最適解 $(Y_0^*, Y_1^*, \ldots, Y_m^*)$ は均衡配分

均衡配分ならば総評価値最大

(i) の証明：任意の配分$(Y_0, Y_1, \dots, Y_m)$に対し
$\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) \geq \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i)$ を証明すれば良い.
仮定より，各iについて $v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j \geq v_i(Y_i) - \sum_{j \in Y_i} p_j$
片々足すと,

$$(*)\quad \sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) - \sum_{j \in N} p_j = \sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) - \sum_{j \in N \setminus X_0} p_j$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i) - \sum_{j \in N \setminus Y_0} p_j \geq \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i) - \sum_{j \in N} p_j$$

(ii) の証明：$Y_i = Y_i^*$ のとき，$\sum_{i=1}^{m} v_i(X_i) = \sum_{i=1}^{m} v_i\,(Y_i)$
∴ 不等式(＊)の不等号は等号で成立
∴$v_i(Y_i^*) - \sum_{j \in Y_i} p_j = v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j$ よって $Y_i^* \in D_i(p)$
　$p(j) = 0 \;\; (\forall j \in Y_0^*)$

ワルラス均衡が存在しない例(再掲)

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
∅	0	0
①	3	0
②	3	0
①, ②	4	5

- ワルラス均衡は存在するとは限らない

均衡が存在すると仮定
➔ 命題より，均衡配分では
　Bに財を全て割り当て，
　Aには財を割り当てないことになる
Bに財を全て割り当てたときの利得≧0
　➔ ①の価格＋②の価格≦5
Aに財を割り当てないときの利得＝0≧財①(②)の利得
　➔ 財①(②)の価格≧3　➔ ①の価格＋②の価格≧6(矛盾)

演習問題

問1: 評価関数v_1, v_2, v_3, v_4が以下のように与えられたとき,
　均衡が存在しないことを示せ.

$v_1(X)$ の値

{}	{1}	{2}	{3}	{12}	{23}	{13}	{123}
0	4	6	8	10	8	8	10

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset, \{3\}) \\ 3 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 0.5 & (1 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_4(X) = \begin{cases} 0.5 & (2 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

問2: 評価関数v_1, v_2, v_3が以下のように与えられたとき,
　均衡を求めよ.

$v_1(X)$ の値: 問1と同じ

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 4 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 5 & (|X| = 1) \\ 7 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$