

経営経済のための 最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第9回 複数需要モデルとワルラス均衡

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

これまでの講義内容のまとめ

- 供給は複数, 需要は単一のオークションモデル
 - ワルラス均衡の定義
 - 均衡の存在性
 - 常に存在
 - 均衡の性質
 - 均衡配分 = 最大重みマッチング
 - 均衡価格 = 双対問題の最適解 (の一部)
 - 均衡の計算
 - 評価値が所与: 最大重みマッチングを利用
 - 評価値が不明, 需要集合の要素が所与:
均衡を近似に求めるアルゴリズム
 - 評価値が不明, 需要集合全体が所与:
均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

今後の講義内容

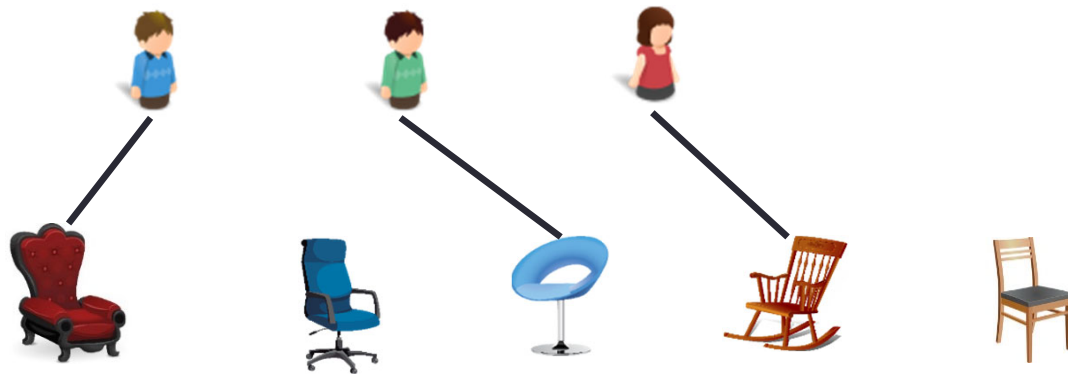
- 供給は複数, 需要も複数のオークションモデル
 - ワルラス均衡の定義
 - 均衡の存在性
 - 存在するとは限らない
 - 評価値が粗代替性を満たす→存在
 - 均衡の性質
 - 均衡配分 = 総評価値最大の財の配分
 - 均衡価格 = 双対問題の最適解 (の一部)
- 粗代替性と等価な性質: 単改良性, M凹性
- 均衡の計算
 - 評価値が所与: 総評価値最大の財の配分を求めるアルゴリズム
 - 評価値が不明, 需要集合の要素が所与:
均衡を近似に求めるアルゴリズム
 - 評価値が不明, 需要集合全体が所与:
均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

複数財オークション: 複数需要モデル

複数財を **同時に** オークション

これまで授業で扱ったモデル: **単一需要モデル**

- 入札者は **高々1つ**の財が欲しい(**割当モデル**)



これから扱うモデル: **複数需要モデル**

- 入札者は**複数の財**を得ることが可能



具体例の一部:

- 周波数の割当
- 空港の離発着権
- トラック配送の請負

評価関数とその分類

財集合の評価関数

- 財の評価

単一需要モデル

- 入札者は各財を評価 → 財ごとに評価値 $v(i,j)$

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数 (評価関数, valuation function)

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少: $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leq v_i(Y)$

評価関数の具体例



①



②



③



④



⑤

- ①を含む財集合は100, それ以外は0 (single-minded)
- 重み和 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) (additive)
- 財集合 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)
 $\{①, ②, ③\} \rightarrow$ 評価値70, $\{③, ④, ⑤\} \rightarrow$ 評価値100
- 財の数に依存 (symmetric)
(1つ: 100, 2つ: 180, 3つ: 240, 4つ: 280, 5つ: 300)

さまざまな評価関数の定義

- 一意専心 (single-minded) 評価関数:

特定の財集合 S とその価値 α を用いて,
$$v_i(X) = \begin{cases} \alpha & (X \supseteq S) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- 加法的 (additive) 評価関数: 各財 j の評価値 $v(i, j)$ を用いて

$$v_i(X) = \sum_{j \in X} v(i, j)$$

- 対称 (symmetric) 評価関数: 単調非減少関数 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて,

$$v_i(X) = \varphi(|X|)$$

(φ が上に凸 (concave) な場合 $\rightarrow$ 対称凹 (symmetric concave))

- 単一需要 (unit-demand) 評価関数:

各財 j の評価値 $v(i, j)$ を用いて

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v(i, j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

単一需要モデル
に対応

割当評価関数

割当 (assignment) 評価関数: 最大重みマッチングで評価値が定まる

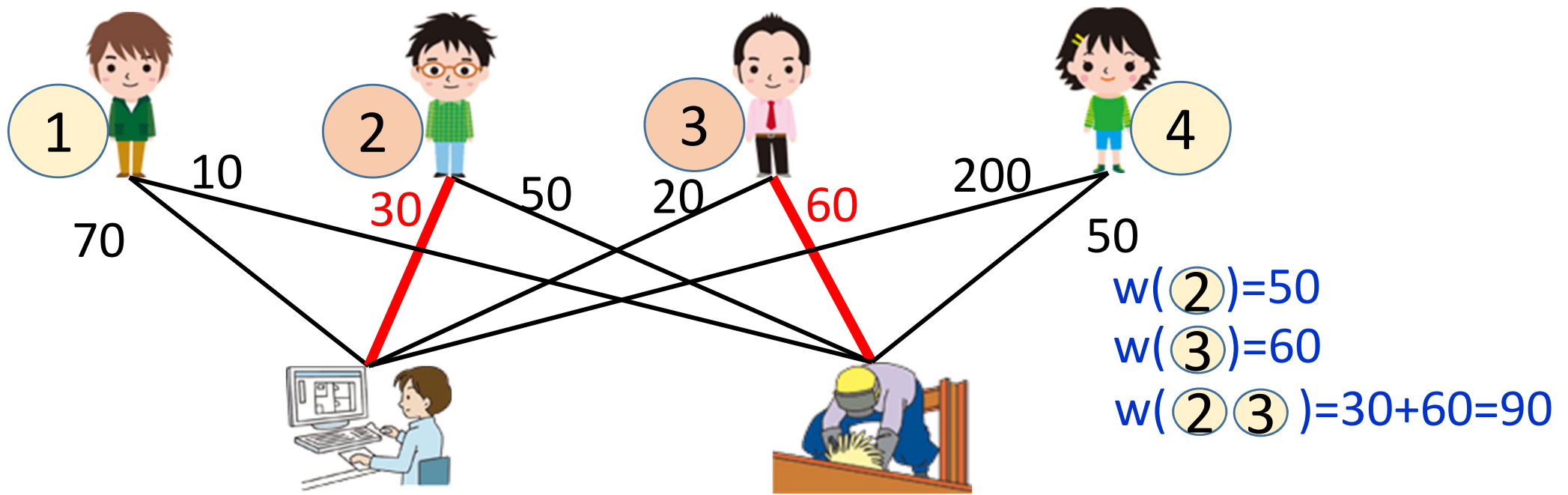
イメージ: ある工場の就職担当が,

k人の労働者(「財」)を雇って, k個の仕事に割り当てる

w_{jh} = 労働者 j を仕事 $h \in \{1, 2, \dots, k\}$ に割り当てたときの利益

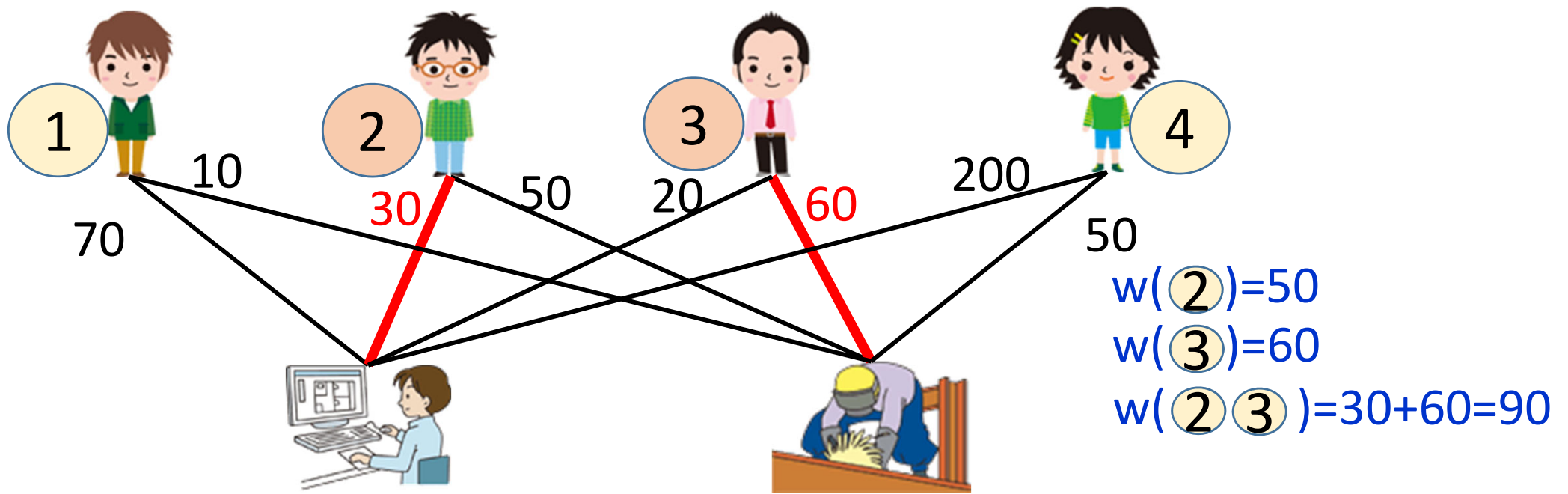
$v_i(X)$ = 労働者 X を仕事 $\{1, 2, \dots, k\}$ に割り当てたときの最大利益

$$= \max \left\{ \sum_{(j,h) \in M} w_{jh} \mid M: \text{マッチング, } X \text{ をカバー} \right\}$$



割当評価関数

{}	0	{1,4}	210	{2,3,4}	260
{1}	70	{2,3}	90	{1,2,3,4}	260
{2}	50	{2,4}	250		
{3}	60	{3,4}	260		
{4}	200	{1,2,3}	130		
{1,2}	120	{1,2,4}	250		
{1,3}	130	{1,3,4}	260		



ワルラス均衡の定義

需要集合

定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$

$$D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$$

常に

$$\max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\} \geq v_i(\emptyset) = 0$$

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: ①を含む財集合は100, それ以外は0

→ $D_A(p) = \{ \{1\} \}$

(欲しい財以外は, 価格>0ならば選ばない)

- Bさん: 重み和 (①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100)

→ $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$

(評価値>価格なら選ぶ, 評価値<価格なら選ばない)

- Cさん: 財の数依存 (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

→ $D_C(p) = \{\text{財の数2または3}\}$

価格 p の下で
最も欲しい
財集合 の集合

ワルラス均衡

財 $N=\{1,2,\dots,n\}$ を入札者 $M = \{1,2,\dots,m\}$ に配分

→ $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と表記

- X_i = 入札者 i へ割り当てられた財集合 ($i=1,2,\dots,n$)
- X_0 = 誰にも割り当てられなかった財集合

定義: 価格ベクトル p^* と財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ の組は **ワルラス均衡**

$$\iff X_i \in D_i(p^*) \ (i = 1, \dots, m), \quad p(j) = 0 \ (j \in X_0)$$

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: $D_A(p) = \{ \{1\} \}$
- Bさん: $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
- Cさん: $D_C(p) = \{ \text{財の数2または3} \}$

→ p と配分 $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ はワルラス均衡

ワルラス均衡が存在しない例

ワルラス均衡は存在するとは限らない

均衡が存在すると仮定：

- $X_0 = \emptyset$ なる均衡が存在
- A, B で財を分割する場合
対称性より, A に財①, B に財②を割り当て

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
$\emptyset$	0	0
①	3	0
②	3	0
①, ②	4	5

- 財①を A に割当

→ Aにとって {①}の利得 $\geq$ {①, ②}の利得 → 財②の価格 ≥ 1

- 財②を B に割当

→ Bにとって財②の利得 ≥ 0 → 財②の価格 = 0 (矛盾)

∴ 可能な割当は, 入札者 A または B に全部

- B に全部 → {①, ②}の総価格 ≤ 5

そのとき, A へ空集合が割り当てられる → ①(②)の価格 ≥ 3

→ {①, ②}の総価格 ≥ 6 (矛盾)

- A に全部割り当てたときの証明も同様.

ワルラス均衡の定義の書き換え

定義: 価格ベクトル p^* と財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ の組は **ワルラス均衡**

$$\iff X_i \in D_i(p^*) \ (i = 1, \dots, m), \quad p(j) = 0 \ (j \in X_0)$$

※各評価関数が単調非減少のとき,

均衡において $X_0 = \emptyset$ と仮定できる.

実際, $X_0 \neq \emptyset$ であっても, $X_1 \cup X_0 \in D_1(p^*)$ が成り立つので,

X_1 を $X_1 \cup X_0$ に置き換えればよい.

$X_1 \cup X_0 \in D_1(p^*)$ の証明:

評価関数が単調非減少なので $v_1(X_1 \cup X_0) \geq v_1(X_1)$

$p(j) = 0 \ (j \in X_0)$ なので $\sum_{j \in X_1 \cup X_0} p(j) = \sum_{j \in X_1} p(j)$

$\therefore v_1(X_1 \cup X_0) - \sum_{j \in X_1 \cup X_0} p(j) \geq v_1(X_1) - \sum_{j \in X_1} p(j)$

$X_1 \in D_1(p^*)$ なので, $v_1(X_1) - \sum_{j \in X_1} p(j) = \max\{v_1(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

$\therefore X_1 \cup X_0 \in D_1(p^*)$

ワルラス均衡の定義の修正版

※各評価関数が単調非減少のとき,

均衡において $X_0 = \emptyset$ と仮定できる.

∴財の配分を $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ から $(X_1, \dots, X_m)$ に置き換えてよい

修正した定義:

価格ベクトル p^* と財の配分 $(X_1, \dots, X_m)$ の組は **ワルラス均衡**

$$\iff X_i \in D_i(p^*) \quad (i = 1, \dots, m)$$

今後は
こちらの定義も
しばしば使う

単一需要と複数需要のモデルでの 均衡の関係

単一需要と複数需要の場合の均衡の比較

- 単一需要モデルにおけるワルラス均衡
≡ 複数需要モデルで単一需要評価関数の場合のワルラス均衡
単一需要評価関数：各財 j の評価値 $v(i, j)$ を用いて

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v(i, j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

より具体的には,

- 一方のワルラス均衡から, 他方のワルラス均衡を簡単に作れる
- 一方の均衡価格は, 他方でも均衡価格

∴ 単一需要モデルは, 複数需要モデルの特殊ケースと見なせる

単一需要の均衡 → 複数需要の均衡

財の配分 $\alpha(i)$ ($i \in B$) と価格 $p(j)$ ($j \in N$) の組からなる

単一需要モデルの均衡を考える.

財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と価格 $p(j)$ ($j \in N$) を以下の様に定義:

$\alpha(i) \neq 0$ のとき $X_i = \{\alpha(i)\}$, $\alpha(i) = 0$ のとき $X_i = \emptyset$

X_0 = 残りの財

→ $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と $p(j)$ ($j \in N$) は 複数需要モデルの均衡

(証明) X_0 の各財はもともと誰にも割り当てられていない

→ 単一需要モデルの均衡の条件より, 価格 = 0

よって, あとは各 $i=1, \dots, n$ に対して

$v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p(j) \geq v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) \quad (\forall Y \subseteq N)$ を示せばよい

単一需要の均衡 → 複数需要の均衡(続き)

以下, ★ $v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p(j) \geq v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) \quad (\forall Y \subseteq N)$ を示す.

- $\alpha(i) \neq 0$ のとき $X_i = \{\alpha(i)\}$

$$\therefore v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p(j) = v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(j))$$

単一需要モデルの均衡条件より, $v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(j)) \geq 0$,

$$v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(j)) \geq v(i, h) - p(h) \quad (\forall h \in N)$$

よって, $Y = \emptyset$ のときは $v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) = 0 \leq v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(j))$

$Y \neq \emptyset$ のときは, $v(i, k) = \max_{h \in Y} v(i, h), k \in Y$ とすると,

価格の非負性より

$$v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) \leq v(i, k) - p(k) \leq v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(j))$$

よって, ★ が成立.

- $\alpha(i) = 0$ のときの証明は省略

複数需要の均衡 → 単一需要の均衡

- 複数需要モデルの場合の均衡から,

単一需要モデルの均衡を作る方法

財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と価格ベクトル p の組からなる

(複数需要モデルにおける) ワルラス均衡を考える

→ 定義より $X_i \in D_i(p^*)$ ($i = 1, \dots, m$), $p(j) = 0$ ($\forall j \in X_0$)

以下, 簡単のために, 各 X_i ($i=1,2,\dots,m$) は非空と仮定

示すこと: 各 X_i ($i=1,2,\dots,m$) の中に

価格 > 0 の財 j^* は高々1つ存在し, その財は X_i の中で評価値最大
このとき, $v(i, j^*) - p(j^*) = v_i(X_i) - p(X_i) \geq v_i(\{j\}) - p(\{j\}) = v(i, j) - p(j)$

$$v(i, j^*) - p(j^*) = v_i(X_i) - p(X_i) \geq v_i(\{\}) = 0$$

∴ 配分を $\alpha(i) = X_i$ の中で評価値最大の財 とすると,

この配分と価格 $p(j)$ は単一需要モデルの均衡

単一需要関数の需要集合の性質

示すこと: 各 X_i ($i=1,2,\dots,m$) の中に

価格 >0 の財 j^* は高々1つ存在し, その財は X_i の中で評価値最大

(証明) $v_i(X)$ は単一需要評価関数なので

$$\begin{aligned} D_i(p) &= \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\} \\ &= \arg \max \{ \max_{j \in X} v(i, j) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N \} \end{aligned}$$

$\therefore X \in D_i(p)$ のとき

X の中に価格 > 0 の財 j^* は高々1つ

($\because$ 2つ以上存在 $\rightarrow$ 1つを除いて削除した方が利得大)

$v(i, j^*) = \max_{j \in X} v(i, j)$ を満たす

($\because$ 評価値最大でない財の価格 $>0 \rightarrow$ 削除した方が利得大)

均衡配分の性質

ワルラス均衡と総評価値最大化

単一需要モデルの場合： 均衡配分 $\longleftrightarrow$ 総評価値最大

定理：

- (i) 財の配分 $\alpha(i)$ ($i \in B$) と価格 $p(j)$ ($j \in N$) の組が均衡のとき
配分 $\alpha(i)$ は最大重みマッチング
- (ii) 任意の最大重みマッチングは均衡配分

複数需要モデルの場合： 均衡配分 $\longleftrightarrow$ 総評価値最大

定理：

- (i) 財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と価格 $p(j)$ ($j \in N$) の組が均衡のとき

$$\sum_{i=1}^m v_i(X_i) = \max \{ \sum_{i=1}^m v_i(Y_i) \mid (Y_0, Y_1, \dots, Y_m) \text{ は財の配分} \}$$
- (ii) 均衡が存在するとき,
 上記式の右辺の最適解 $(Y_0^*, Y_1^*, \dots, Y_m^*)$ は均衡配分

均衡配分ならば総評価値最大

(i) の証明: 任意の配分 $(Y_0, Y_1, \dots, Y_m)$ に対し

$\sum_{i=1}^m v_i(X_i) \geq \sum_{i=1}^m v_i(Y_i)$ を証明すれば良い.

仮定より, 各 i について $v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j \geq v_i(Y_i) - \sum_{j \in Y_i} p_j$

片々足すと,

$$\begin{aligned} (*) \quad \sum_{i=1}^m v_i(X_i) - \sum_{j \in N} p_j &= \sum_{i=1}^m v_i(X_i) - \sum_{j \in N \setminus X_0} p_j \\ &\geq \sum_{i=1}^m v_i(Y_i) - \sum_{j \in N \setminus Y_0} p_j \geq \sum_{i=1}^m v_i(Y_i) - \sum_{j \in N} p_j \end{aligned}$$

(ii) の証明: $Y_i = Y_i^*$ のとき, $\sum_{i=1}^m v_i(X_i) = \sum_{i=1}^m v_i(Y_i)$

$\therefore$ 不等式 $(*)$ の不等号は等号で成立

$\therefore v_i(Y_i^*) - \sum_{j \in Y_i} p_j = v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j$ よって $Y_i^* \in D_i(p)$

$$p(j) = 0 \quad (\forall j \in Y_0^*)$$

ワルラス均衡が存在しない例(再掲)

- ワルラス均衡は存在するとは限らない

均衡が存在すると仮定

→ 命題より, 均衡配分では

Bに財を全て割り当て,

Aには財を割り当てないことになる

Bに財を全て割り当てたときの利得 ≥ 0

→ ①の価格 + ②の価格 ≤ 5

Aに財を割り当てないときの利得 $= 0 \geq$ 財①(②)の利得

→ 財①(②)の価格 ≥ 3 → ①の価格 + ②の価格 ≥ 6 (矛盾)

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
$\emptyset$	0	0
①	3	0
②	3	0
①, ②	4	5

演習問題

問1: 評価関数 v_1, v_2, v_3, v_4 が以下のように与えられたとき,
均衡が存在しないことを示せ.

$v_1(X)$ の値	$\{\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{23\}$	$\{13\}$	$\{123\}$
	0	4	6	8	10	8	8	10

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset, \{3\}) \\ 3 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 0.5 & (1 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_4(X) = \begin{cases} 0.5 & (2 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

問2: 評価関数 v_1, v_2, v_3 が以下のように与えられたとき,
均衡を求めよ.

$v_1(X)$ の値: 問1と同じ

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 4 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 5 & (|X| = 1) \\ 7 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$