経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化
第7回　均衡価格を計算するアルゴリズム

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡を近似的に計算するアルゴリズム:
近似精度の解析

アルゴリズムの性能評価

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了する

得られたマッチングの重み ≒ 最大重み

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し,
Mの重み ≧ 最大重みマッチングの重み − δ min{|B|, |N|}

得られた財の価格 ≒ 均衡価格

定理3 アルゴリズムにより得られた財の価格 p(j),
最小均衡価格 p*(j)
➔ |p(j) − p*(j) | ≦ δ min{|B|, |N|}

厳密な均衡を得る

評価値 v(i,j) がすべて整数
→ δ を調整して，均衡配分，均衡価格の厳密値を得ることが可能

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し，
M の重み ≧ 最大重みマッチングの重み − δ min{|B|, |N|}

δ <1/min{|B|, |N|} とする
→ M の重み > 最大重みマッチングの重み −1
→ マッチングの重みは整数なので，M の重み = 最大重み

定理3 アルゴリズムにより得られた財の価格 p(j),
最小均衡価格 p*(j) ➔ |p(j) − p*(j) | ≦ δ min{|B|, |N|}

δ <1/2 min{|B|, |N|} とする
→ |p(j) − p*(j) | < 0.5
→ p*(j) は整数なので，p(j) を最も近い整数に丸め = p*(j)

均衡を近似的に計算するアルゴリズム

δ: アルゴリズムのパラメータ, > 0

ステップ0 : 全ての財の価格 p(j) を 0 にする.
各入札者は財の割当なし, とする.

ステップ1 : 各入札者 i に対し,
財の割当あり or 最大利得≦0 ➔ 終了

ステップ2 : 財の割当なし, かつ 最大利得 > 0 なる
入札者 i を選ぶ.

ステップ3 : v(i,j)-p(j) 最大の j を選び, 入札者 i に財 j を割り当て.
入札者 k が既に財 j に割り当てられていた
→ k への j の割り当てを取消. p(j):=p(j) + δ
ステップ1へ.

定理1の証明

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了する

[証明]

- 各財の価格: 初期値＝0
- アルゴリズムの各反復:
  ある財 j の価格 p(j) が δ 増加 (→ v(i,j)-p(j) が δ 減少)
- すべての入札者 i に対し v(i,j)-p(j) ≦ 0
  ➔ 財 j の価格は今後変化しない

∴財 j の価格 p(j) の増加回数≦ $\max_{i \in B} v(i,j) / \delta$

定理2の証明:準備その1

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し,
Mの重み ≧ 最大重みマッチングの重み − δ min{|B|, |N|}

命題1: アルゴリズム終了時に,
誰にも割り当てられなかった財 j の価格 p(j) = 0

[証明] アルゴリズムの途中で, 財の価格が増加
⇔ その財の割当が, ある入札者から別の入札者に変更
∴アルゴリズム終了時に割り当てなしの財 j: p(j)=0

定義: 入札者 i は δ-happy ⇔条件 (a) or (b) を満たす

(a) [利得が「ほぼ」最大の財が割当]
i に財 j が割り当てられていて, $v(i,j) - p(j) \geq -\delta$
かつ $v(i,j) - p(j) \geq \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} - \delta$

(b) [最大利得が非正]
i に財の割当なし, かつ $\max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$

定理2の証明：準備その2

命題2：

(i) 財の配分と価格が均衡 ➔ すべての入札者は 0-happy

（∵ 均衡の第一条件は，(a) において δ=0 とおいたものに一致）

(ii) ステップ3で入札者 i に財 j が割り当てられた直後から，
財 j が他の入札者に奪われるまでずっと，入札者 i は δ-happy

（∵ 財 j を選んだ時点では，j は最大利得
→ 他の入札者から奪った場合，直後に価格が δ 減少.
他の入札者に奪われるまでは価格 p(j) 不変）

(iii) アルゴリズム終了時には，全員が δ-happy

（∵ 入札者に財の割り当てあり → (ii) より(a) 成立
なし → (b)成立）

定理2の証明(その1)

記号の定義

$\alpha(i)$ $(i \in B)$: アルゴリズム終了時の財の配分

B_α = アルゴリズム終了時に財が配分された入札者の集合

➔$\{\alpha(i) | \, i \in B_\alpha\}$ = アルゴリズム終了時，入札者に配分された財の集合

$\alpha^*(i)$ $(i \in B)$: 最大重みマッチング M* に対応する財の配分

B^* = M* において，財が配分された入札者の集合

➔ $\{\alpha^*(i) | \, i \in B^*\}$ = M* において入札者に配分された財の集合

示したい不等式

$$\sum_{i \in B_\alpha} v(i, \alpha(i)) \geq \sum_{i \in B_{\alpha^*}} v\big(i, \alpha^*(i)\big) - \delta \min\{|B|, |N|\}$$

この不等式の代わりに，以下の等価な不等式を示す:

① $\sum_{i \in B_\alpha} v(i, \alpha(i)) - \sum_{j \in N} p(j)$

$$\geq \sum_{i \in B_{\alpha^*}} v\big(i, \alpha^*(i)\big) - \sum_{j \in N} p(j) - \delta \min\{|B|, |N|\}$$

定理2の証明(その2)

① を示すために，以下の不等式を示す(証明は後ほど)：

② i に割り当てられた財は，ほぼ利得最大

$$v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq v\big(i,\alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) - \delta \quad (\forall i \in B_\alpha \cap B^*)$$

③ i に割り当てられた財は，ほぼ利得≧0

$$v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq -\delta \quad (\forall i \in B_\alpha \setminus B^*)$$

④ 財の割り当てのない入札者 i については，

均衡においても利得≦0

$$0 \geq v\big(i,\alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) \quad (\forall i \in B^* \setminus B_\alpha)$$

⑤ 誰にも割り当てられない財の価格＝0

$$-p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha(i) | \, i \in B_\alpha\})$$

⑥ 財の価格≧0　　$0 \geq -p(j) \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha^*(i) | \, i \in B^*\})$

②--⑥を辺々加える ➔ ① が得られる

定理2の証明(その3)

②--⑥を辺々加えたときの

左辺 = $\sum_{i\in B_\alpha}[v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i))] - \sum_{j\in N\setminus\{\alpha(i)|\, i\,\in\, B_\alpha\}} p(j)$

$= \sum_{i\in B_\alpha} v(i,\alpha(i)) - \sum_{j\in N} p(j)$

右辺 = $\sum_{i\in B_\alpha\cap B^*}[v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) - \delta] - \delta|B_\alpha \setminus B^*|$

$+ \sum_{i\in B^*\setminus B_\alpha}[v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))] - \sum_{j\in N\setminus\{\alpha^*(i)|\, i\,\in\, B^*\}} p(j)$

$= \sum_{i\in B^*}[v(i,\alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))] - \sum_{j\in N\setminus\{\alpha^*(i)|\, i\,\in\, B^*\}} p(j) - \delta|B_\alpha|$

$= \sum_{i\in B^*} v(i,\alpha^*(i)) - \sum_{j\in N} p(j) - \delta|B_\alpha|$

$\geq \sum_{i\in B^*} v(i,\alpha^*(i)) - \sum_{j\in N} p(j) - \delta \min\{|B|,|N|\}$

(最後の不等号は $|B_\alpha| \leq \min\{|B|,|N|\}$ より)

∴ ①成立

定理2の証明(その4)

② $v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq v\big(i,\alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) - \delta \quad (\forall i \in B_\alpha \cap B^*)$

③ $v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq -\delta \quad (\forall i \in B \setminus B^*)$　　　　の証明

入札者 $i \in B_\alpha$ は, アルゴリズム終了時に

δ-happy の条件 (a) を満たす(∵命題2 (iii))

$$v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq -\delta \quad \Rightarrow ③$$

⑦ $v(i,\alpha(i)) - p\big(\alpha(i)\big) \geq \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} - \delta$

$i \in B_{\alpha^*}$に対して　$\max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \geq v\big(i,\alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big)$

この式と⑦ ➔ ②

定理2の証明(その5)

⑤ $-p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha(i) | \, i \in B_\alpha\})$
⑥ $0 \geq -p(j) \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha^*(i) | \, i \in B^*\})$　　の証明

⑥はアルゴリズムでの価格の非負性より自明.

$j \in N \setminus \{\alpha(i) | i \in B_\alpha\}$はアルゴリズム終了時に割り当てられていない財
➔ 命題1より p(j)=0 ➔ ⑤

均衡を厳密に計算するアルゴリズム

均衡を厳密に計算する

- 入札者の評価値の情報を陽に使わず，均衡（価格）を厳密に計算
- 使える情報：

  価格 (p(1), p(2),…,p(n)) を入札者に提示

  → 最も欲しい財（v(i,j)-p(j)≧0 かつ v(i,j)-p(j)最大の財）を全て答える

仮定：評価値 v(i,j) はすべて整数

- 計算の方針
  - 現在の価格ベクトルが均衡か否かを判定
    - 最大マッチング問題を利用
  - 均衡価格でない → 価格を更新
    - 最大マッチング問題の結果を利用，価格を更新する財を選ぶ

均衡条件の書き換え（その1）

定義: 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格

⇔ 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在

ただし $q(i) \equiv \max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）

➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$

② 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha(i) = 0$） ➔ $q(i) \le 0$

③ 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

マッチングを用いて，均衡条件の書き換えが可能

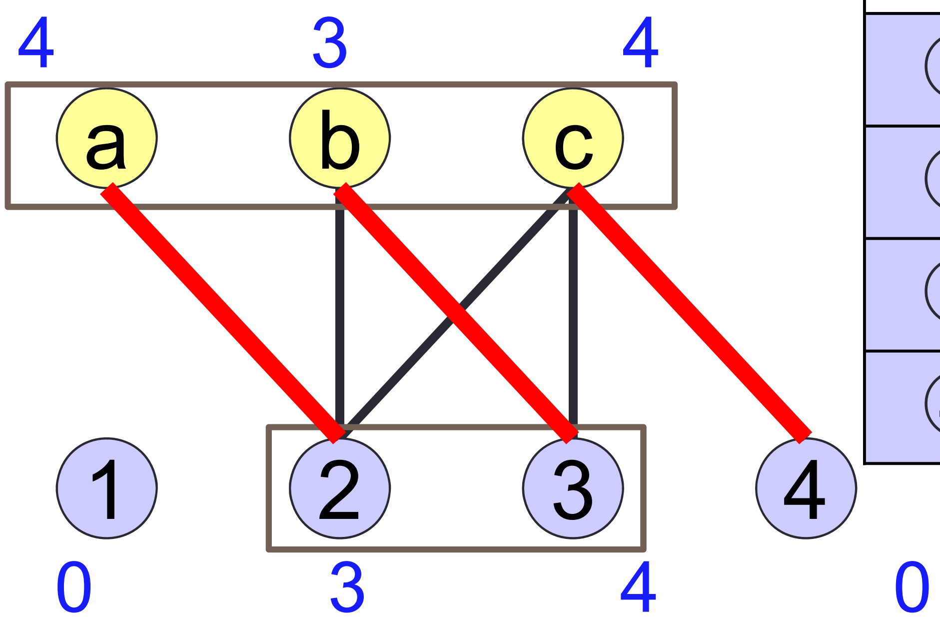
均衡条件の書き換え（その2）

定義： 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は **均衡価格**

⇔ 頂点集合 B∪N，枝集合 E の二部グラフにおいて，
頂点集合 B'∪N' をカバーするマッチングが存在

$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, \quad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$$

$$E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \leq v(i,j) - p(j) = q(i)\}$$



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

v(i,j)-p(j)	a	b	c
①	3	1	0
②	4	3	4
③	-3	3	4
④	0	0	4

⇒ 均衡価格である

均衡条件の書き換え(その3)

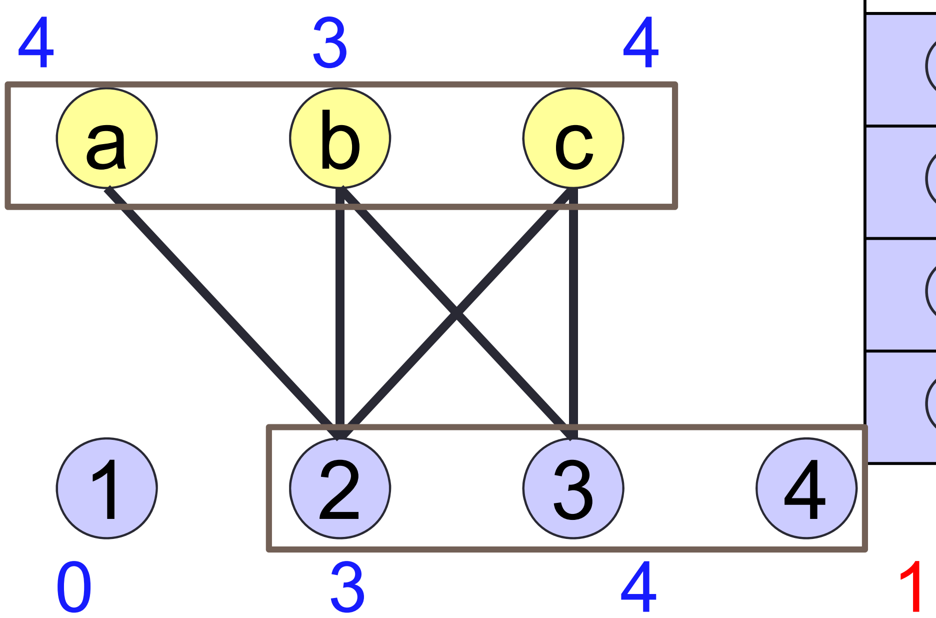
定義: 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は **均衡価格**

⇔ 頂点集合 B∪N, 枝集合 E の二部グラフにおいて,

頂点集合 B'∪N' をカバーするマッチングが存在

$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\},\quad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$$

$$E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)\}$$



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

v(i,j)-p(j)	a	b	c
①	3	1	0
②	4	3	4
③	-3	3	4
④	-1	-1	3

⇨ 均衡価格ではない

均衡条件の書き換え(その4)

過去の授業で示した定理より，以下が成立

頂点集合 B∪N，枝集合 E の二部グラフにおいて，
頂点集合 B'∪N' を同時にカバーするマッチングが存在

⇕

・B' をカバーするマッチングが存在
・N' をカバーするマッチングが存在

⇕ （ホールの定理）

- 任意のX⊆B'に対し，X の隣接頂点の数 ≧ |X|
  （X 内の入札者が欲しい財の数 ≧ |X|）
- 任意のY⊆N'に対し，Y の隣接頂点の数 ≧ |Y|
  （Y 内の財を欲しい入札者の数 ≧ |Y|）

均衡条件の書き換え（その5）

入札者に関する条件 ➔ 財に関する条件に書き換え

定義: $D_i(p)$ ≡ 価格 p の下で入札者 i が最も欲しい財の集合

命題: 以下の3条件は等価:

(i) B' をカバーするマッチング $M \subseteq E$ が存在

(ii) 任意の $X \subseteq B'$ に対し, X 内の入札者が欲しい財の数 ≧ |X|

(iii) 任意の $Z \subseteq N$ に対し, $|Z| \geqq (D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)

(iii) の条件の意味:

B' 内の入札者のうち, Z の中の財のみ欲しい人の集合を Y とすると $|Y| \leqq |Z|$

（これが成り立たないと, Y の入札者全員に欲しい財の割り当てが出来ない）

このことより, (i) ➔ (iii) が成立.

(i) ⇔ (ii) はホールの定理より成立.

均衡条件の書き換え（その6）

定義: $D_i(p)$ ≡ 価格 p の下で入札者 i が最も欲しい財の集合

命題: 以下の3条件は等価:

(i) B′ をカバーするマッチング $M \subseteq E$ が存在

(ii) 任意の $X \subseteq B'$ に対し, X 内の入札者が欲しい財の数 ≧ $|X|$

(iii) 任意の $Z \subseteq N$ に対し, $|Z| \geqq$ ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)

[(ii)🡐(iii)]　Z = X 内の入札者が欲しい財の集合

W = 「$D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$」の集合　とおくと,

$i \in X \Rightarrow D_i(p) \subseteq Z \Rightarrow i \in W \quad \therefore X \subseteq W$

また, (iii) より $|Z| \geqq |W| \geqq |X| \quad \therefore$ (ii) 成立

アルゴリズムの方針

満たすべき条件：

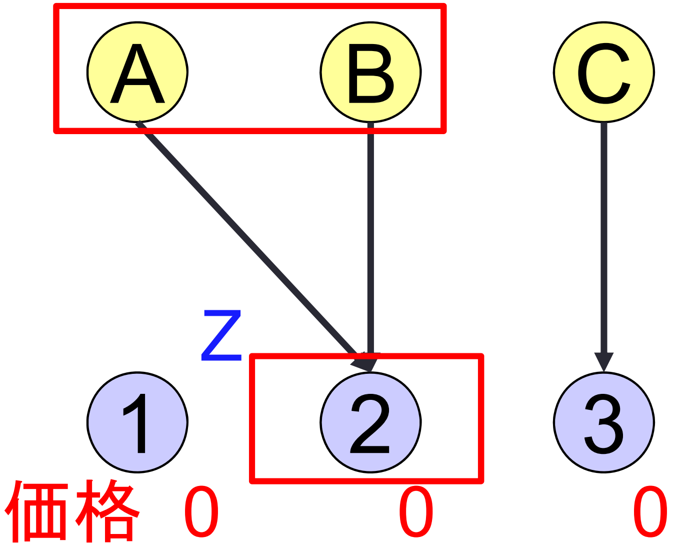
① 任意の $Z \subseteq N$ に対し，

$|Z| \geqq (D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)

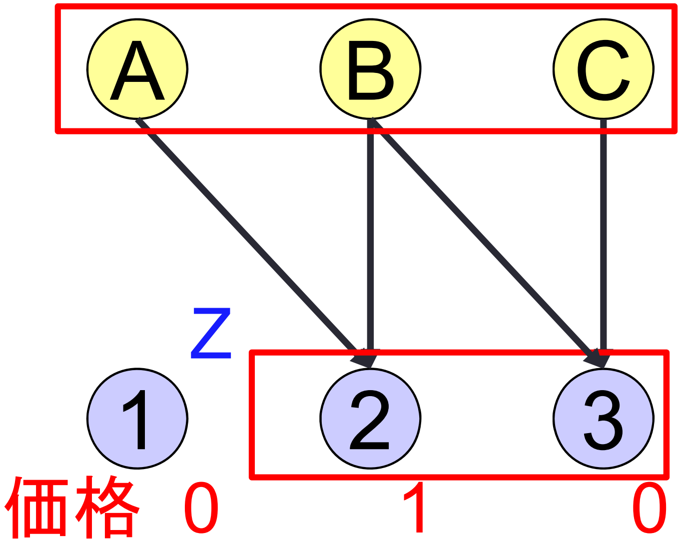
② 任意の$Y \subseteq N'$に対し，（Y 内の財を欲しい入札者の数）$\geqq |Y|$

- 条件②を満たしつつ，①に違反する Z を減らすよう，価格を増やす
  - 価格 p=(0,0,･･･,0) のとき，N'=∅ なので②は成立
  - ①に違反する Z ←→ Z のみを欲しい入札者が多すぎる
    ∴ Z に含まれる（幾つかの）財の価格を増やせば，
    欲しい入札者を減らせる（かもしれない）
  - ①に違反する Z の中で極小なものを選び，
    Z 内の全ての財の価格を増やす
    →条件②は満たされたまま（要証明）

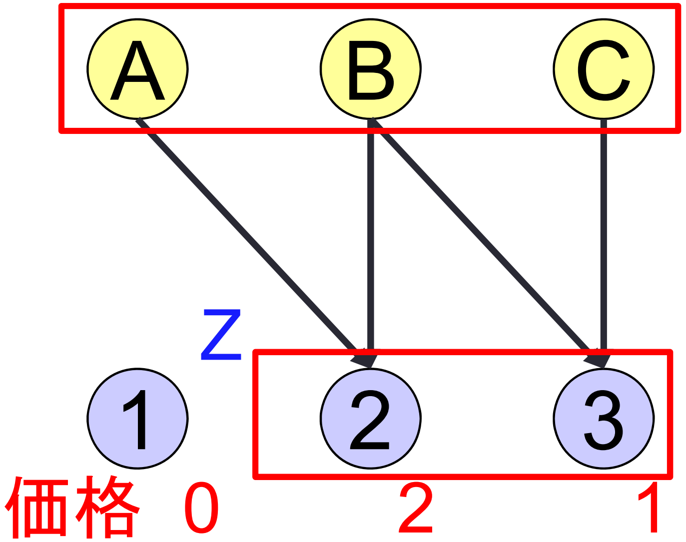
アルゴリズムの実行例(1)



v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

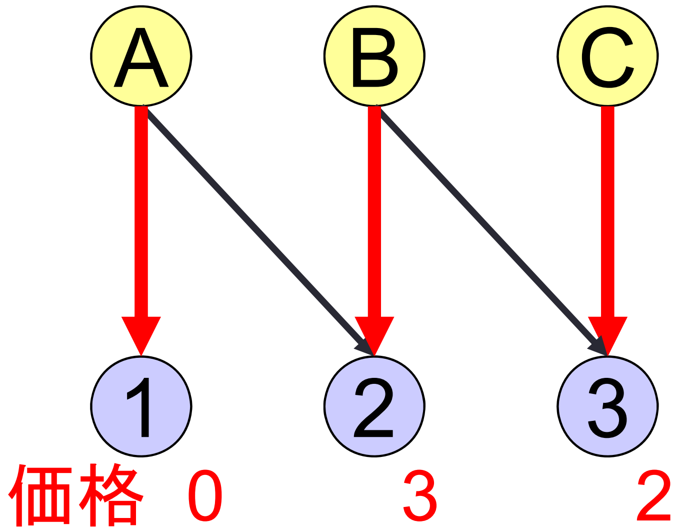


利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	1	3	3

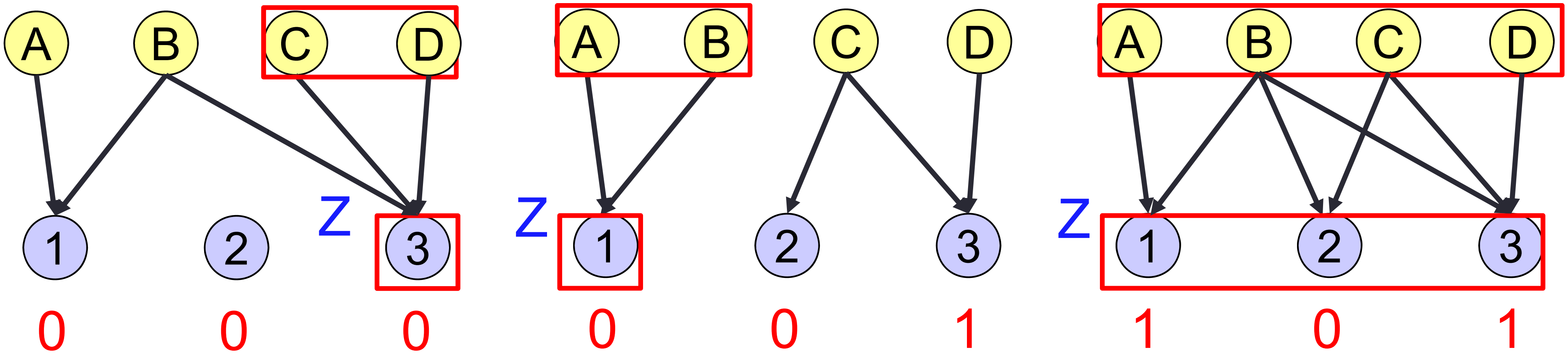
アルゴリズムの実行例(1)



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	0	2	2

①の条件に違反するZなし
→ アルゴリズム終了
所望のマッチング存在

アルゴリズムの実行例(2)

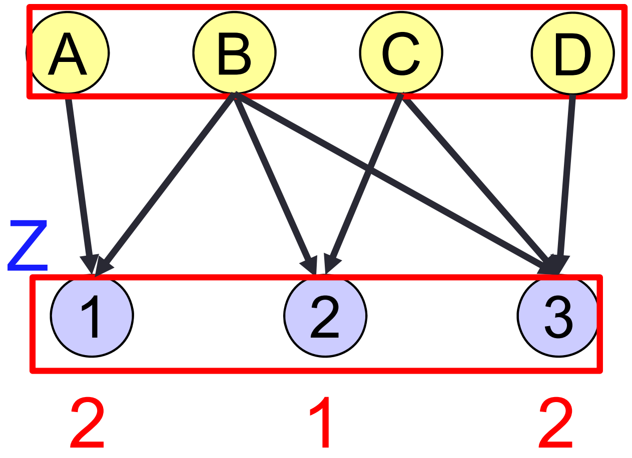


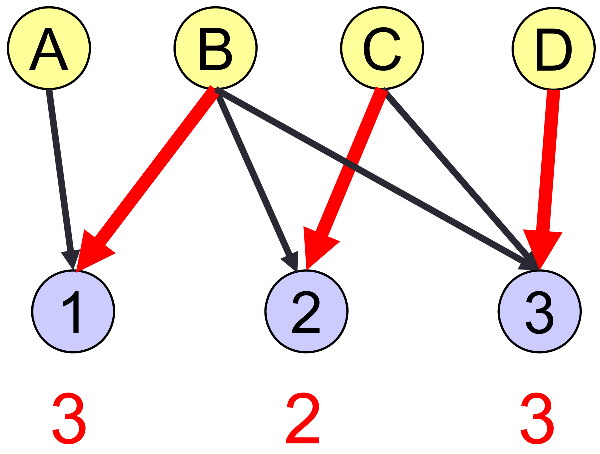
v(i,j)	A	B	C	D
①	3	7	1	0
②	1	6	7	0
③	0	7	8	4

利得	A	B	C	D
①	3	7	1	0
②	1	6	7	0
③	-1	6	7	3

利得	A	B	C	D
①	2	6	0	-1
②	1	6	7	0
③	-1	6	7	3

アルゴリズムの実行例(2)





利得	A	B	C	D
①	1	5	-1	-2
②	0	5	6	-1
③	-2	5	6	2

利得	A	B	C	D
①	0	4	-2	-3
②	-1	4	5	-2
③	-3	4	5	1

①の条件に
違反するZなし
→ アルゴリズム終了
所望の
マッチング存在

Aの最大利得=0

演習問題

問1：下記のように評価値が与えられたとき，δ＝1として，均衡を近似的に計算するアルゴリズムを適用して均衡の近似解を計算せよ.
結果，および各反復における財の配分と価格を書けばよい.

(1)

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

(2)

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

(3)

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

それぞれの極小均衡価格は以下の通り
問1：p(1)=2, p(2)=6
問2：p(1)=0, p(2)=4, p(3)=5
問3：p(1)=0, p(2) =3, p(3)=4, p(4)=0

演習問題

問2：下記のように評価値が与えられたとき，均衡を厳密に計算するアルゴリズムを適用して均衡価格を計算せよ．
結果及び各反復における価格を書けばよい．

問1

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

問2

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

問3

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4