

経営経済のための 最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第6回 最大重みマッチング問題の 最適性条件

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最大重みマッチングの最適性条件

双対問題の実行可能解を用いた最適性条件

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み

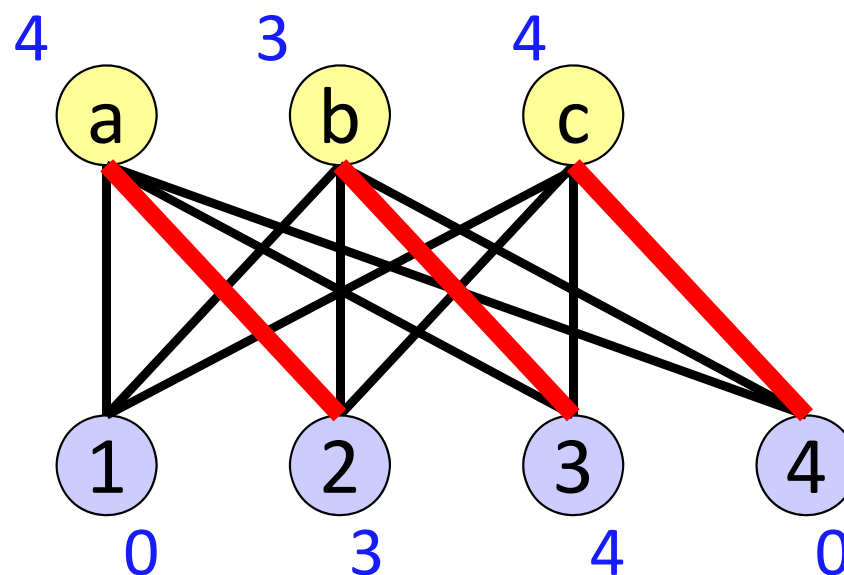
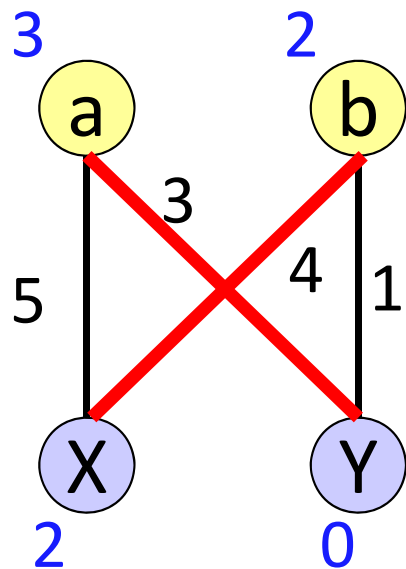
↔ 双対問題の実行可能解 (q, p) で,

条件 (a), (b), (c) を満たすものが存在:

(a) マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$

(b) $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$

(c) $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$



$v(i, j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

証明の概略

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み

↔ **双対問題の実行可能解** (q, p) で, 条件 (a), (b), (c) を満たすものが存在:

(a) マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$

(b) $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない → $q(i) = 0$

(c) $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない → $p(j) = 0$

← は比較的簡単. 弱双対定理を使う.

→ の証明の流れ:

入札者集合 B と財集合 N , および s を頂点にもつ補助グラフを作成

M は最大マッチング

→ 重み > 0 の交互路, 交互閉路が存在しない

→ 補助グラフに負閉路なし (要証明)

∴ 補助グラフにおいて, s から各頂点への最短路が存在

← これを使って, 所望の (q, p) を求める

最大重みマッチングの最適性条件： 交互路を用いた条件

命題 正の重みの交互路(交互閉路)が存在
→現在のマッチングMは最大重みではない
(対偶: マッチングMは最大重みマッチング
→正重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

逆も成り立つ

命題 正の重みの交互路(交互閉路)が存在
←現在のマッチングMは最大重みではない
(対偶: マッチングMは最大重みマッチング
←正重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

マッチングが最適解であるための必要十分条件

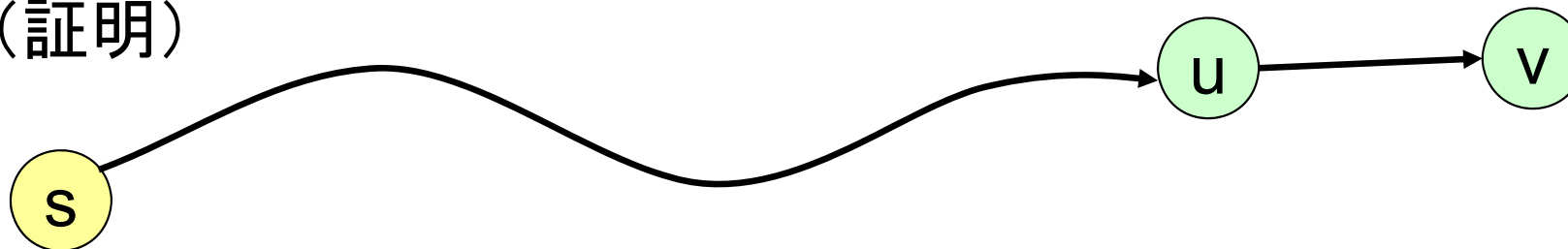
定理: マッチング M は最大重みマッチング
↔正重みの交互路および交互閉路は存在しない

最短路の性質

命題 任意の枝 (u,v) に対し,
 v への最短路長 $d(v) \leq u$ への最短路長 $d(u) + l(u,v)$

命題 頂点 s から頂点 v への最短路が枝 (u,v) を含むとき,
 v への最短路長 $d(v) = u$ への最短路長 $d(u) + l(u,v)$

(証明)



P : 頂点 s から v への最短路 $\rightarrow d(v) = P$ の長さ
このとき, P の s から u への部分路は u への最短路
よって, この部分の長さ $= d(u)$ ■

補助グラフの作り方: アイディア

- 入札者集合 B と財集合 N , s を頂点とするグラフをつくる
- グラフが負閉路をもたないことを証明
 - 最大重みマッチングに関する,
重み > 0 の交互路・交互閉路が存在しない, という事実を使う
 - 交互路・交互閉路を閉路に対応させる
そのとき, 閉路の長さ $= (-1) \times \text{重み}$ となるように枝長を設定
- グラフが負閉路をもたない $\rightarrow s$ から各頂点への最短路が存在
- 各頂点への最短路長を用いて, 所望の q, p を求める

補助グラフの作り方

与えられたマッチング M に対応する

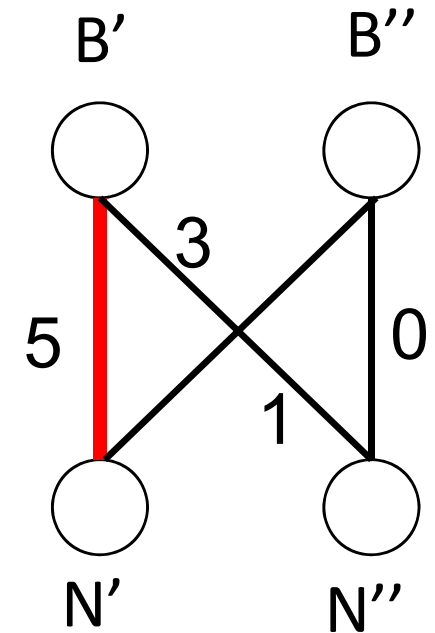
補助グラフをつくる

仮定：元の2部グラフにおいて、

各頂点には1つ以上の枝が接続

(存在しない場合は、その頂点を削除してよい)

- 頂点集合 = $B \cup N \cup \{s\}$ (s は新たな頂点)
- B' = マッチング枝が接続する B の頂点の集合
- B'' = マッチング枝が接続しない B の頂点の集合
- N' = マッチング枝が接続する N の頂点の集合
- N'' = マッチング枝が接続しない N の頂点の集合



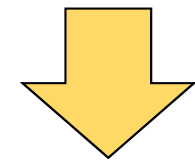
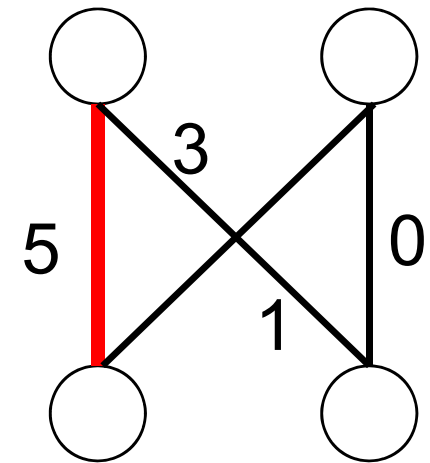
補助グラフの作り方

- 非マッチング枝をB側からN側に向き付け

長さ = - (枝重み)

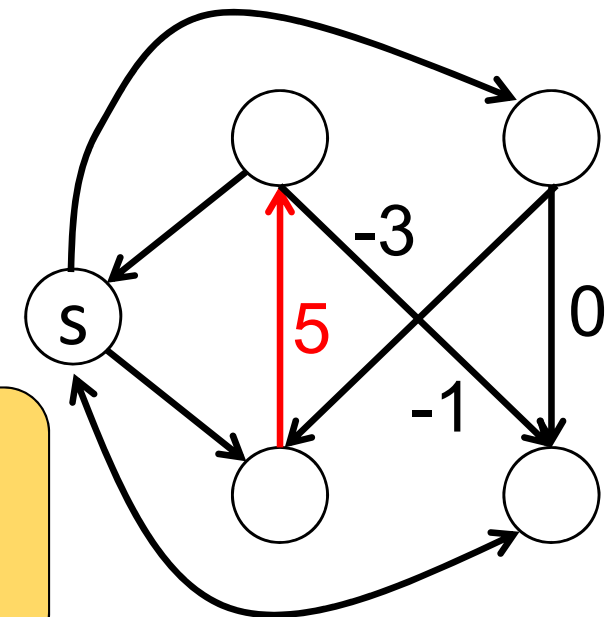
- マッチングMの枝をN側からB側に向き付け

長さ = 枝重み



- $u \in B'$ に対し, (u, s) をおく
- $u \in B''$ に対し, (s, u) をおく
- $v \in N'$ に対し, (v, s) をおく
- $v \in N''$ に対し, $(s, v), (v, s)$ をおく

長さ = 0



枝 (s, v) ($v \in N''$) を含む閉路は $\{(s, v), (v, s)\}$ のみ
 $\therefore v$ から出る枝は (v, s) のみ

有向閉路と交互路・交互閉路の対応

- 補助グラフの枝数3以上の閉路は、交互路または交互閉路に対応
 - s の通過の有無, および s を通過するときのパターンで分類
- マッチングの枝が少ない交互路(増加路)
 - $\leftrightarrow$ s を通過する有向閉路, N の頂点 $\rightarrow s \rightarrow B$ の頂点
- マッチング枝数が非マッチング枝数と同じ交互路
 - $\leftrightarrow$ s を通過する有向閉路, B の頂点 $\rightarrow s \rightarrow B$ の頂点
(または N の頂点 $\rightarrow s \rightarrow N$ の頂点)
- マッチングの枝が多い交互路
 - $\leftrightarrow$ s を通過する有向閉路, B の頂点 $\rightarrow s \rightarrow N$ の頂点
- 交互閉路
 - $\leftrightarrow$ s を通過しない有向閉路

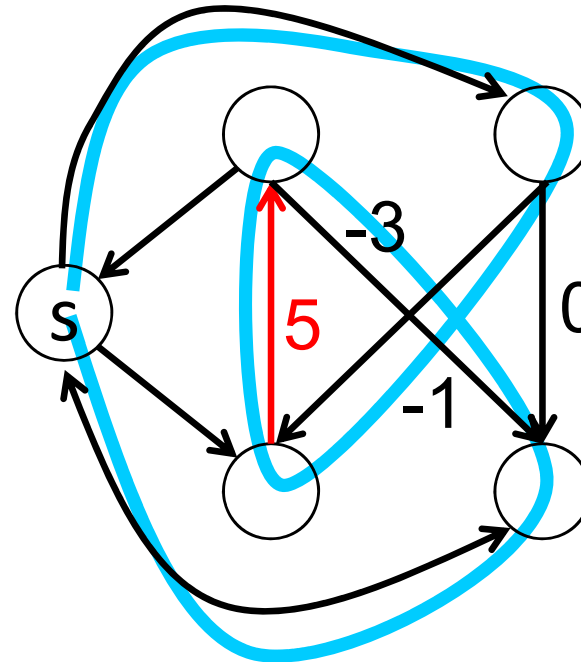
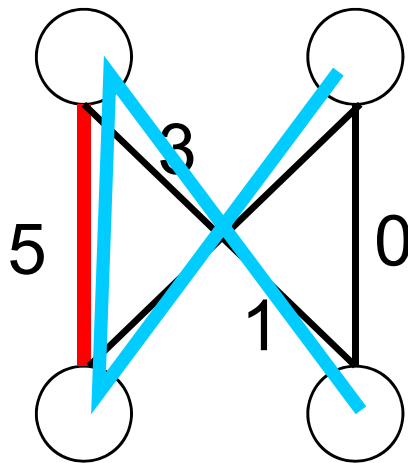
有向閉路と交互路の対応1

マッチングの枝が少ない交互路(増加路)

$\leftrightarrow$ s を通過する有向閉路

交互路に対応する有向路 + N の頂点 $\rightarrow s \rightarrow B$ の頂点

有向閉路の長さ = $(-1) \times$ 交互路の重み



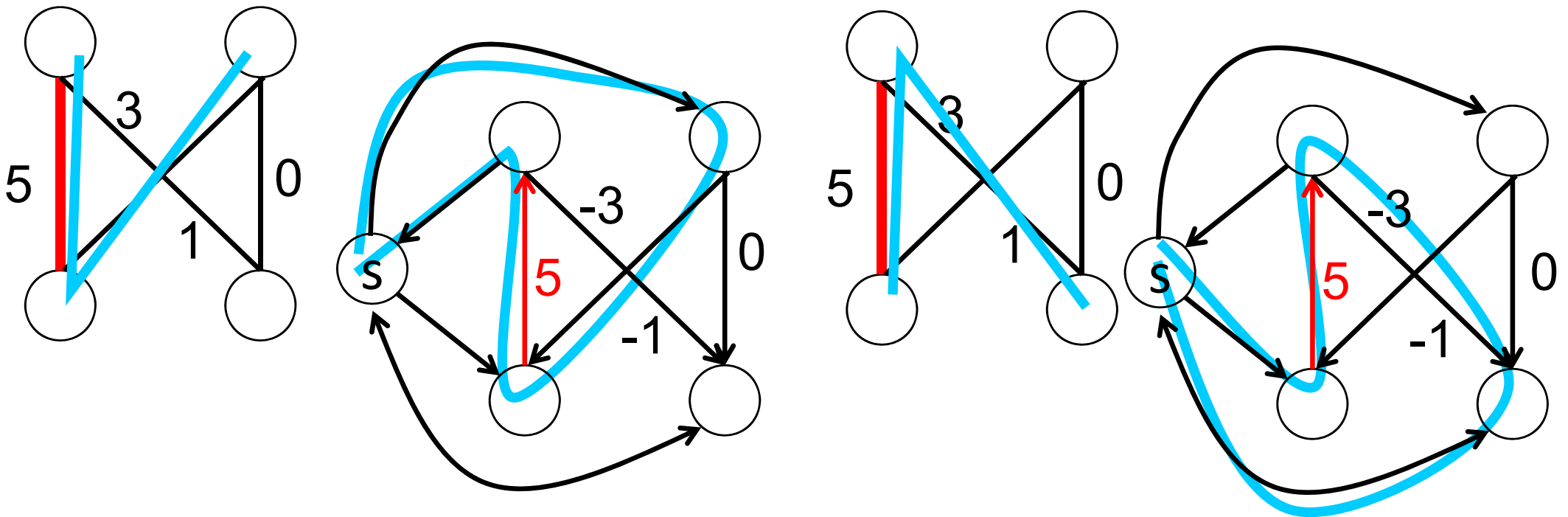
有向閉路と交互路の対応2

マッチング枝数が非マッチング枝数と同じ交互路

$\leftrightarrow$ s を通過する有向閉路

交互路に対応する有向路 + B の頂点 $\rightarrow s \rightarrow B$ の頂点
(または N の頂点 $\rightarrow s \rightarrow N$ の頂点)

有向閉路の長さ = $(-1) \times$ 交互路の重み



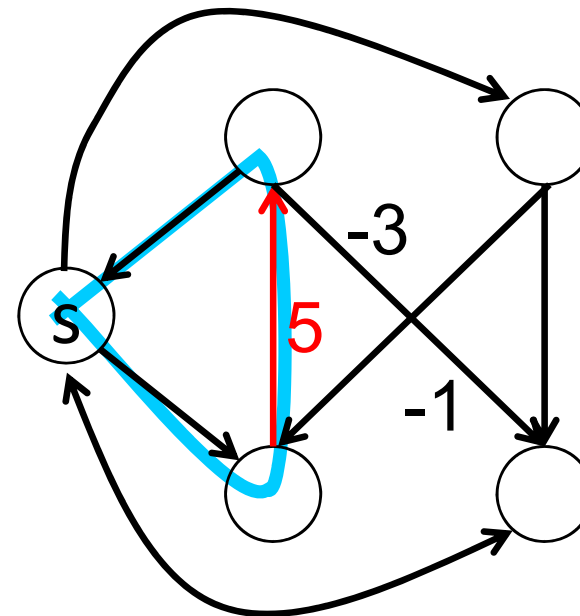
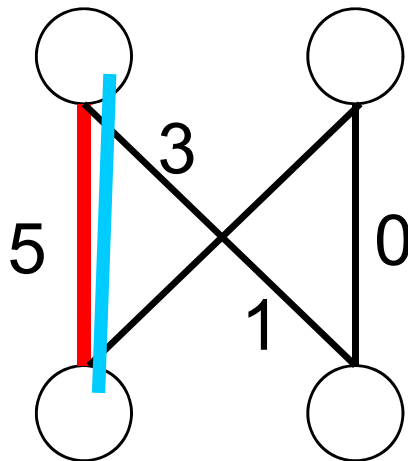
有向閉路と交互路の対応3

マッチングの枝が多い交互路

$\leftrightarrow$ s を通過する有向閉路

交互路に対応する有向路 + B の頂点 $\rightarrow s \rightarrow N$ の頂点

有向閉路の長さ = $(-1) \times$ 交互路の重み

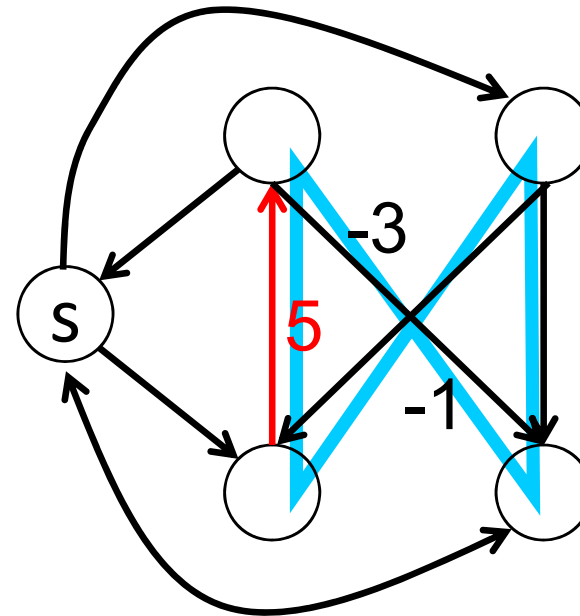
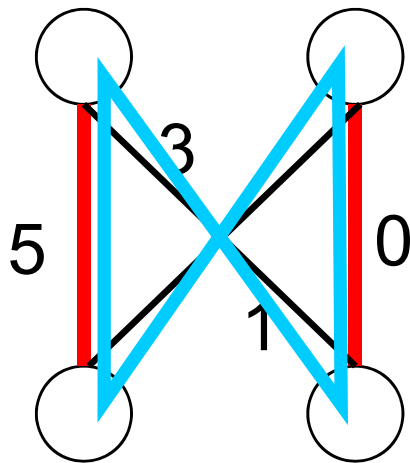


有向閉路と交互閉路の対応

交互閉路

↔ s を通過しない有向閉路 (交互閉路にそのまま対応)

有向閉路の長さ = $(-1) \times$ 交互路の重み



最適性条件の証明

補助グラフでは,

- s から各頂点への有向路が存在
 - 負閉路が存在しない
- $\therefore s$ から各頂点への最短路が存在

各頂点 v への最短路長を $d(v)$ とおく.

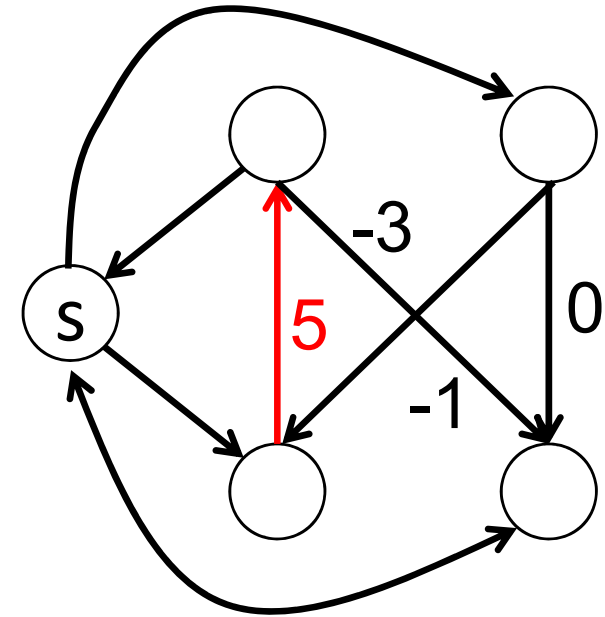
s は始点なので $d(s) = 0$.

B'' の各頂点 u に対し, u に入る枝は (s, u) のみ

$\therefore$ 前述の最短路の性質より, $d(u) = d(s) + l(s, u) = 0$

B' の各頂点 u に対し, 枝 (u, s) が存在するので,

最短路長の性質より $d(s) - d(u) \leq l(u, s) \therefore d(u) \geq d(s) + l(u, s) = 0$



最適性条件の証明(つづき)

s は始点なので $d(s) = 0$.

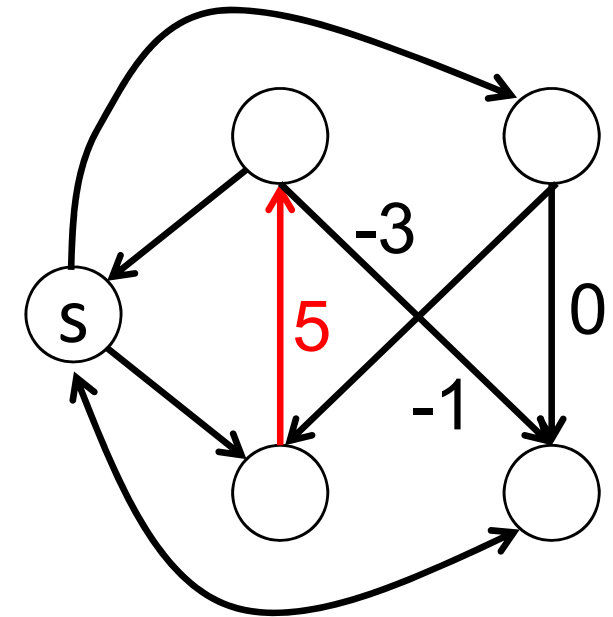
N の各頂点 v に対し, 枝 (s,v) が存在するので,
最短路長の性質より $d(v) - d(s) \leq l(s,v)$

$$\therefore d(v) \leq d(s) + l(s,v) = 0$$

N'' の各頂点 v に対し, 枝 (v,s) が存在するので,
最短路長の性質より $d(s) - d(v) \leq l(v,s)$

$$\therefore d(v) \geq d(s) + l(v,s) = 0$$

上記の不等式と合わせて $d(v) = 0$



これまでのまとめ:

各 $u \in B$ に対し $d(u) \geq 0$ $u \in B''$ ならば $d(u) = 0$

各 $v \in N$ に対し $d(v) \leq 0$ $v \in N''$ ならば $d(v) = 0$

最適性条件の証明(つづき)

マッチング枝 (v, u) ($v \in N', u \in B'$) に対し,

頂点 u に入る枝は (v, u) のみ

$\therefore u$ への最短路は枝 (v, u) を含む

$\therefore$ 前述の最短路の性質より, $d(u) = d(v) + l(v, u) = d(v) + w(u, v)$

非マッチング枝 (u, v) ($u \in B', v \in N'$) に対し,

最短路長の性質より $d(v) - d(u) \leq l(u, v) = -w(u, v)$

上記の等式・不等式より

元の2部グラフの各枝 (u, v) ($u \in B, v \in N$) に対し $d(u) - d(v) \geq w(u, v)$

とくに, (u, v) がマッチング枝ならば $d(u) - d(v) = w(u, v)$

最適性条件の証明(つづき)

(q,p) を定義: 各 $u \in B$ に対し $q(u)=d(u)$
各 $v \in N$ に対し $p(v)= - d(v)$

すると

各 $u \in B$ に対し $q(u) \geq 0$ $u \in B''$ ならば $q(u)=0$

各 $v \in N$ に対し $p(v) \geq 0$ $v \in N''$ ならば $p(v)=0$

元の2部グラフの各枝 (u,v) ($u \in B, v \in N$) に対し $q(u) + p(v) \geq w(u,v)$
とくに, (u,v) がマッチング枝ならば $q(u) + p(v) = w(u,v)$

よって, (q,p) は双対問題の実行可能解であり,
条件(a),(b),(c)を満たす



枝重みが整数値の場合の最適性条件

枝重みが整数の場合, より強い結果

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み

↔ 双対問題の実行可能解 (q, p) で,

条件(a), (b), (c)を満たすものが存在:

(a) マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$

(b) $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$

(c) $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$

[証明] 枝重みが整数 $\rightarrow$ 有向グラフの枝長が整数

$\rightarrow$ 最短路長が整数

$\rightarrow$ 証明における $q(i)$, $p(j)$ の決め方より,
 $q(i)$, $p(j)$ として整数が選べる

均衡を近似的に求めるアルゴリズム

評価値が既知の場合のアルゴリズム

定理: 財の均衡配分 $\leftrightarrow$ 評価値に関する最大重みマッチング

∴ 評価値が既知 $\rightarrow$

均衡配分の計算は、**最大重みマッチング問題**に帰着可能

均衡配分が得られた $\rightarrow$

均衡価格の計算は、**最短路問題**に帰着可能

評価値が分からない場合は？

評価値の扱いについて

入札者の評価値は個人情報

→ オークション主催者に 直接 知らせたくない

代案: 評価値の情報を **間接的に** 伝える

(例: 所与の価格に関して, 利得最大の財)

1. 主催者: 各財の暫定価格を決定
2. 各入札者: 暫定価格の下で**利得最大の財**を報告
3. 入札者全員に(重複無く)最も欲しい財を
配分可能 → 終了. 現在の価格は均衡価格
配分不可能 → 主催者は暫定価格を適切に変更

反復オークション と呼ばれる

単一財の場合 → **イングリッシュ・オークション** など

反復オークションのアルゴリズム

以下の2つを紹介

- その1: 均衡を近似的に計算
 - 単調に価格を増加, **均衡配分**
(および(極小)均衡価格の近似値)を求める
 - 各反復で, 入札者の利得最大の財**ひとつ**の情報が必要
 - 価格増加のルールは簡単: 希望が重複→価格を増やす
- その2: 均衡を厳密に計算
 - 単調に価格を増加, (極小)**均衡価格**
(および均衡配分)を求める
 - 各反復で, 入札者の利得最大の財**すべての**情報が必要
 - 価格増加のルールは複雑:
 - 得た情報を使い, 価格を増やす財をうまく選ぶ

均衡を近似的に計算するアルゴリズム

アルゴリズムの流れ

- 各入札者は、現在の価格の下で利得最大の財を一つ選ぶ
- 同じ財を複数の入札者が選ぶ
→ ひとりに割り当て、その財の価格を上昇させる。

異なる分野で独立に提案される

- Bertsekas (1979) --- 数理計画, オペレーションズ・リサーチ
 - 最大重みマッチング問題のアルゴリズムとして提案
 - この分野では「オークションアルゴリズム」とよばれる
- Crawford, Knoer (1981) --- 数理経済, オークション理論
 - ワルラス均衡(の近似解)を求めるアルゴリズムとして提案
 - Demange, Gale, Sotomayor (1986) に詳しい記述, 解析あり

均衡を近似的に計算するアルゴリズム: 詳細

δ : アルゴリズムのパラメータ, > 0

ステップ0: 全ての財の価格 $p(j)$ を 0 にする.

各入札者は財の割当なし, とする.

ステップ1: 各入札者 i に対し,

財の割当あり or 最大利得 $\leq 0 \rightarrow$ 終了

ステップ2: 財の割当なし, かつ 最大利得 > 0 なる

入札者 i を選ぶ.

ステップ3: $v(i,j)-p(j)$ 最大の j を選び, 入札者 i に財 j を割り当て.

入札者 k が既に財 j に割り当てられていた

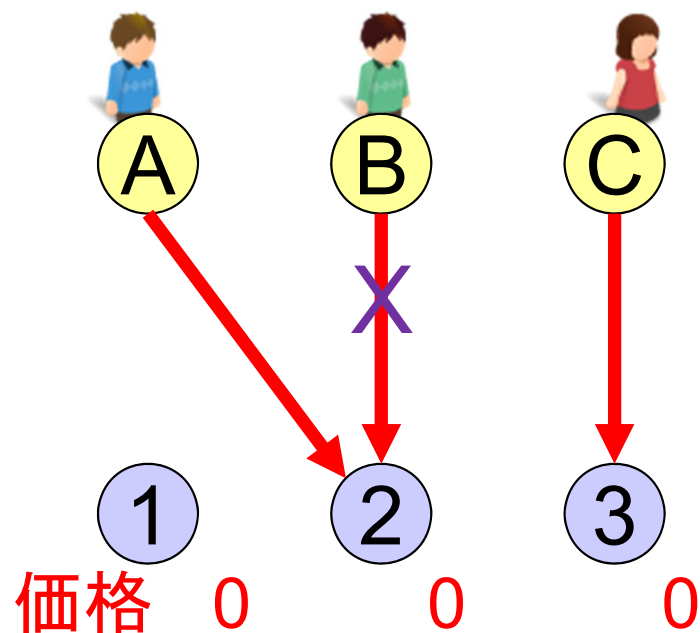
$\rightarrow k$ への j の割り当てを取消. $p(j) := p(j) + \delta$

ステップ1へ.

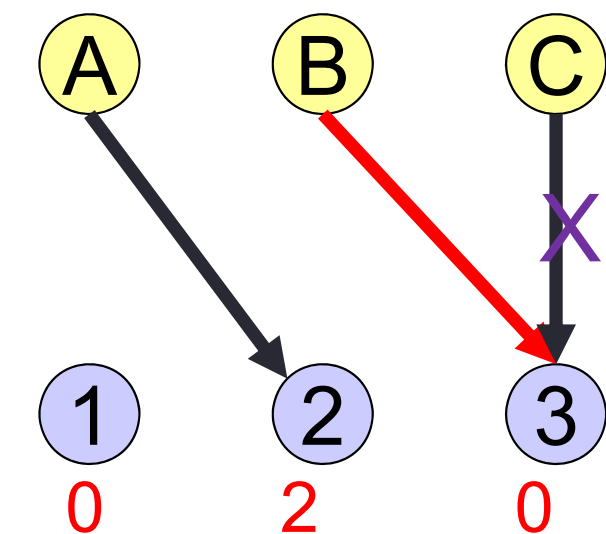
$$\max_j \{v(i,j) - p(j)\}$$

アルゴリズムの実行例(1)

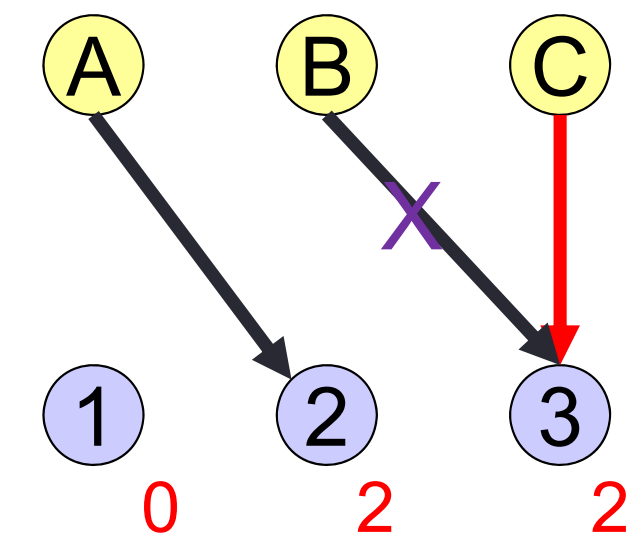
$\delta=2$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4



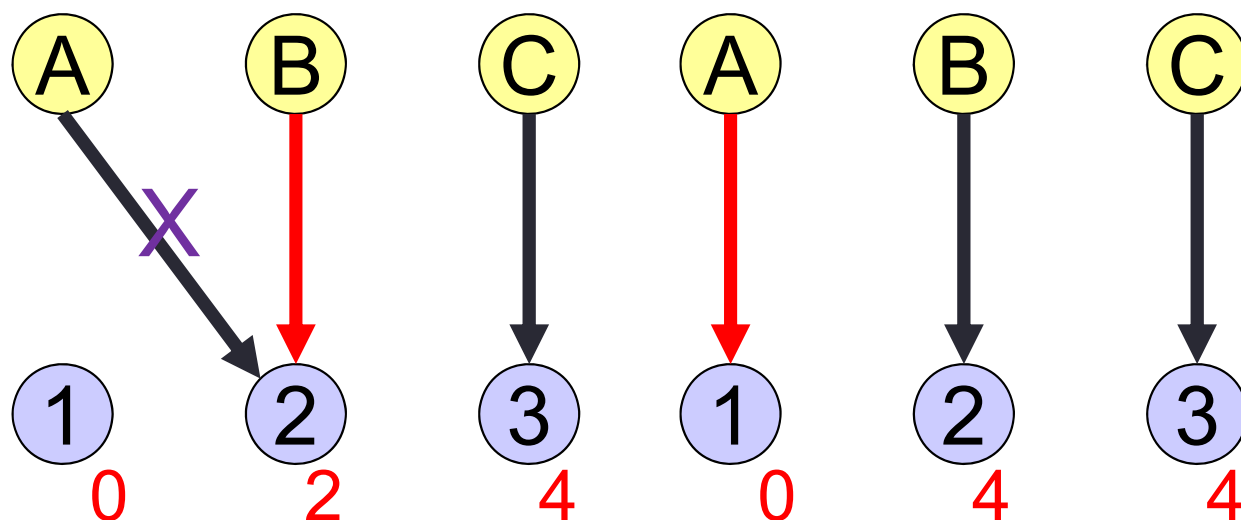
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	2	4	4



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	0	2	2

アルゴリズムの実行例(1)

$\delta=2$ のとき



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	-2	0	0

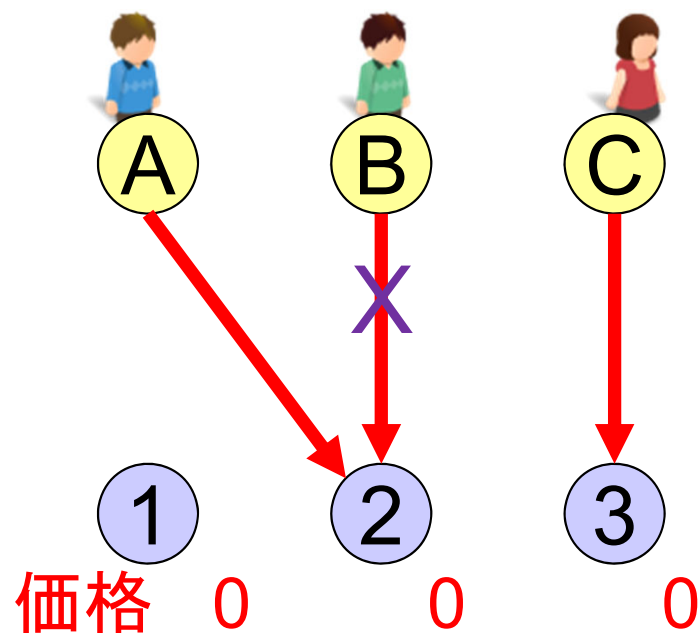
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	2	1	-1
③	-2	0	0

終了
均衡配分○
均衡価格○

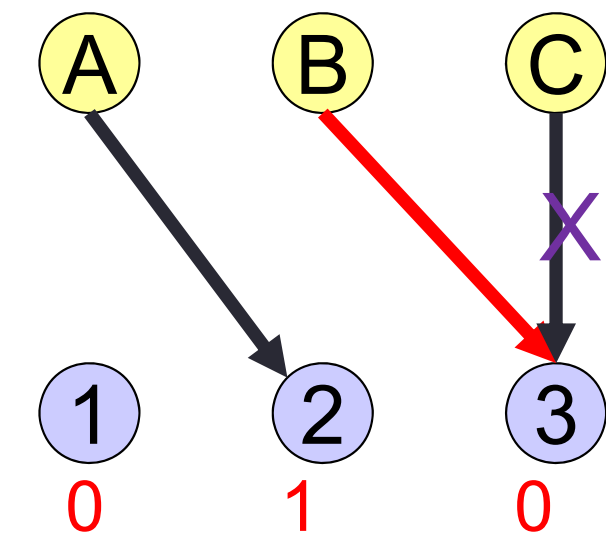
参考:
極小均衡価格
0 3 2

アルゴリズムの実行例(2)

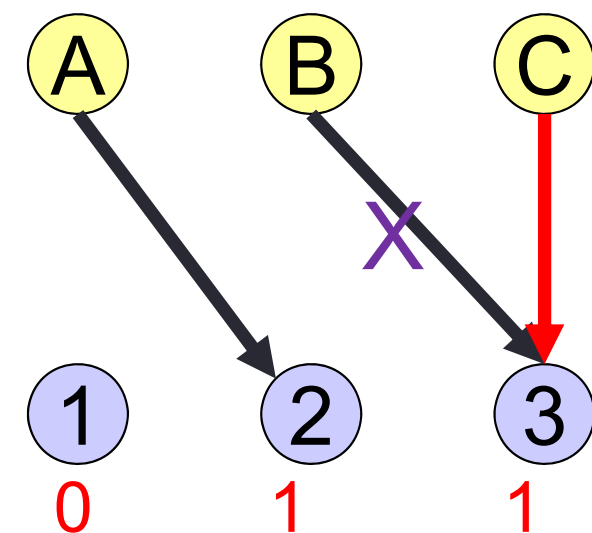
$\delta=1$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4



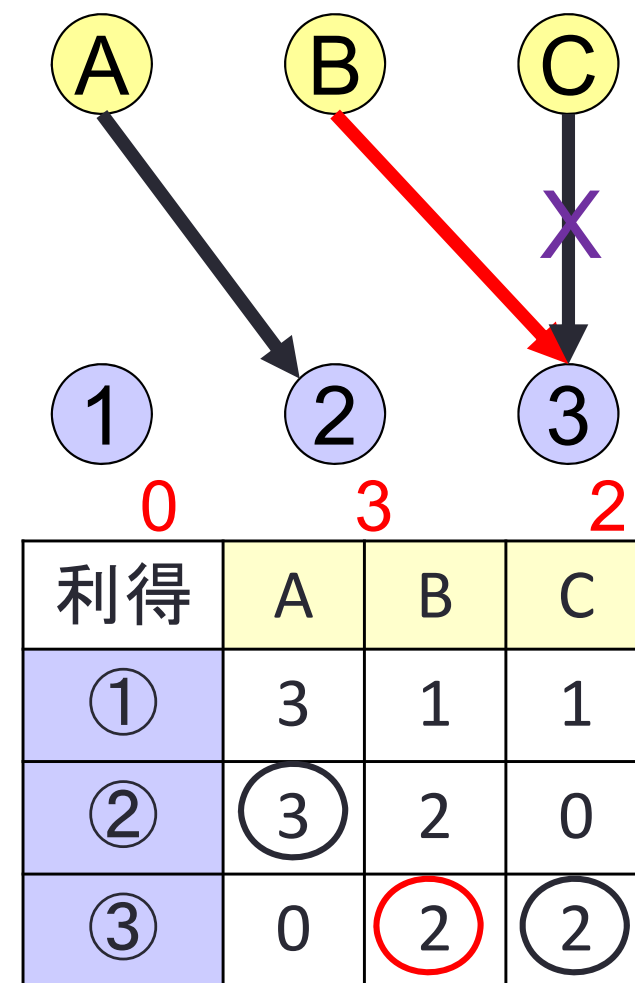
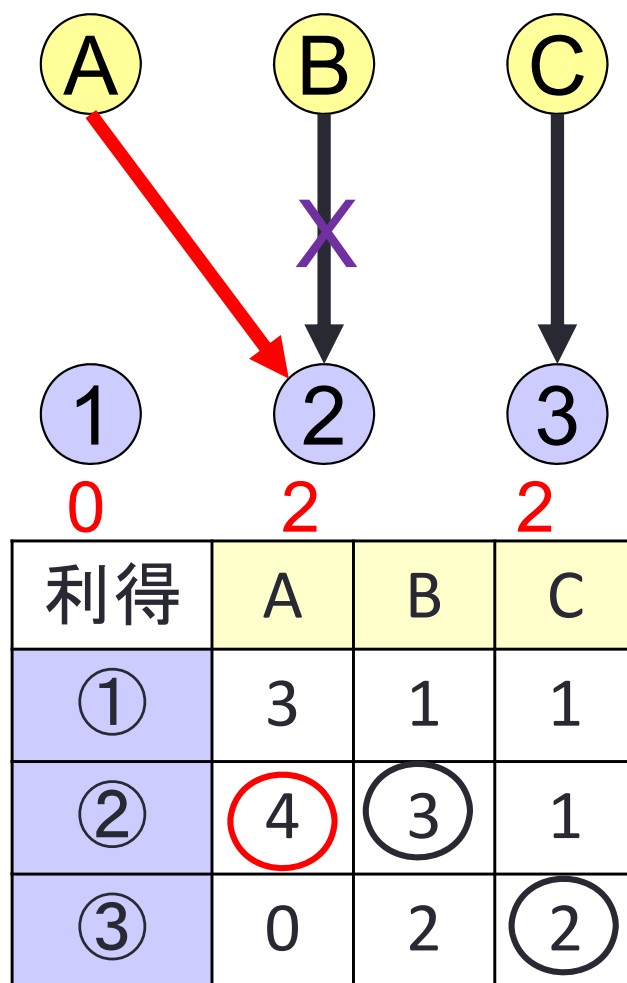
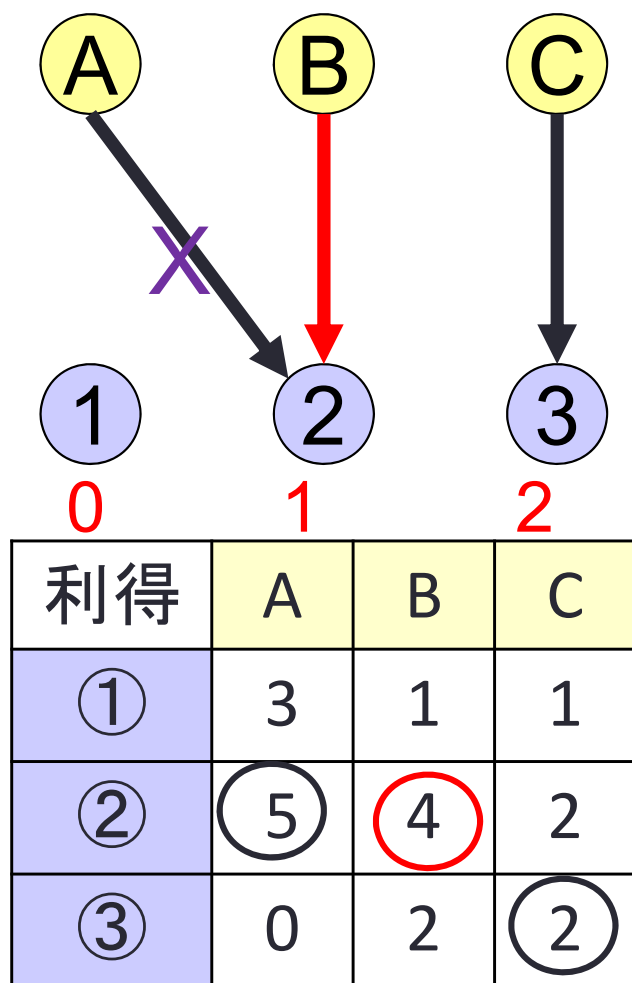
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	1	3	3

アルゴリズムの実行例(2)

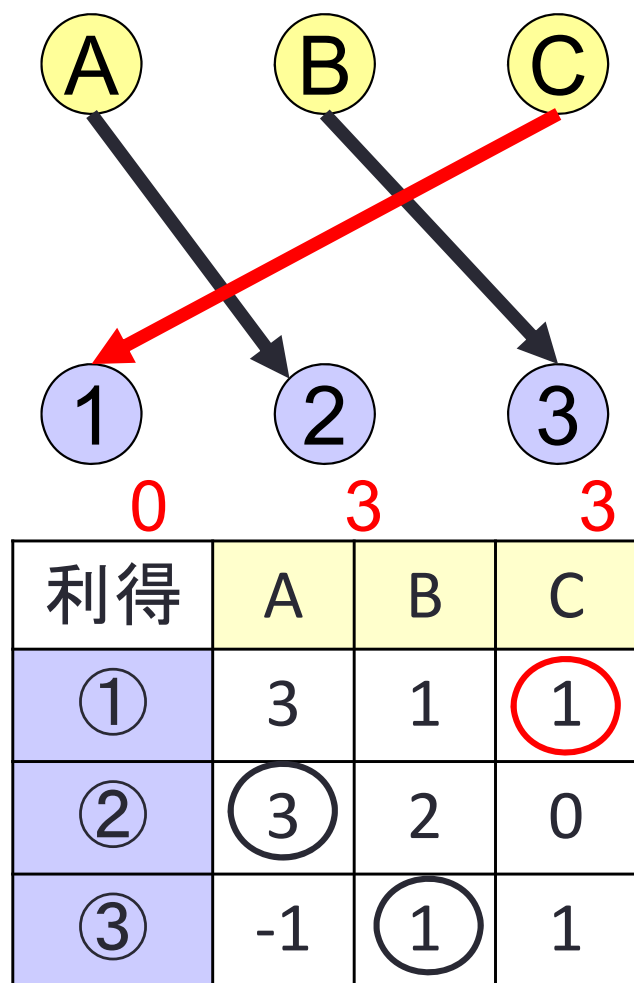
$\delta=1$ のとき



アルゴリズムの実行例(2)

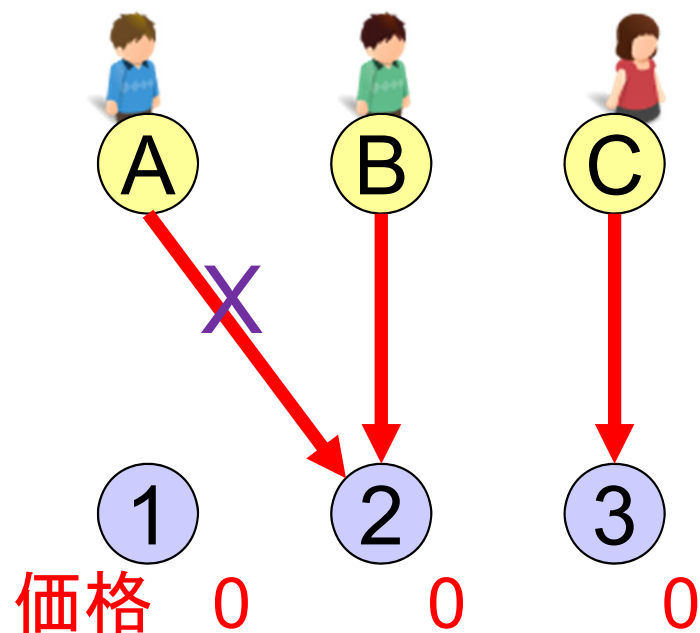
$\delta=1$ のとき

終了
均衡配分 ×
均衡価格 ○

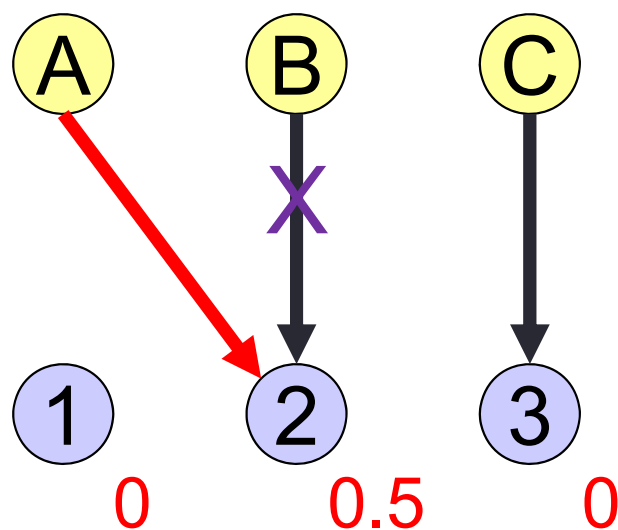


アルゴリズムの実行例(3)

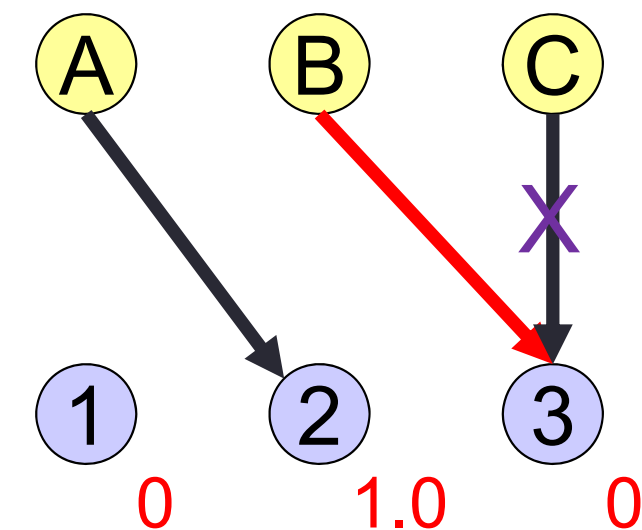
$\delta=0.5$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4



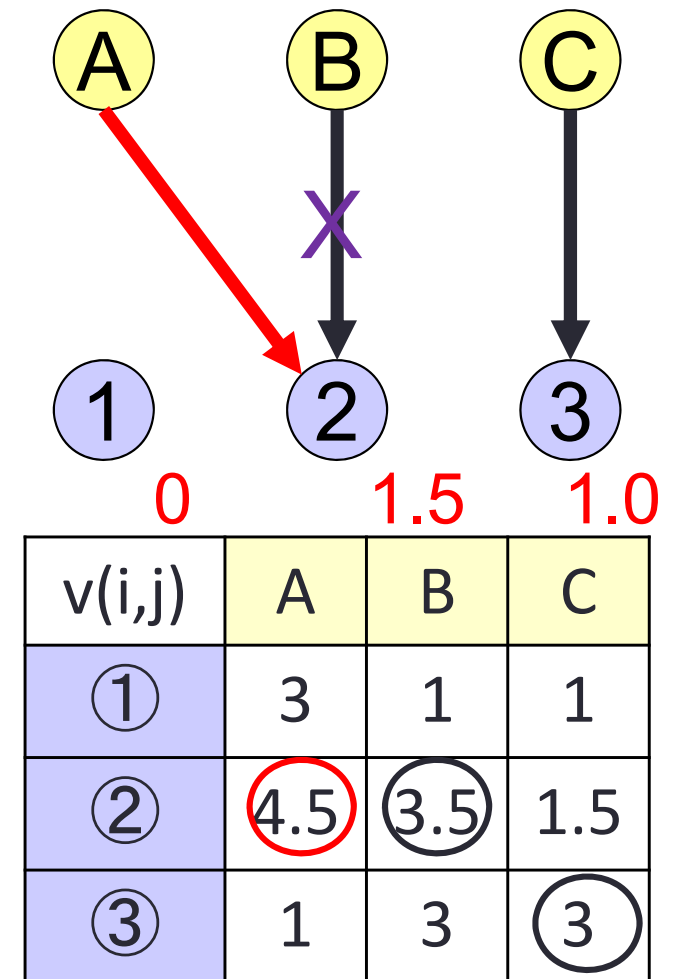
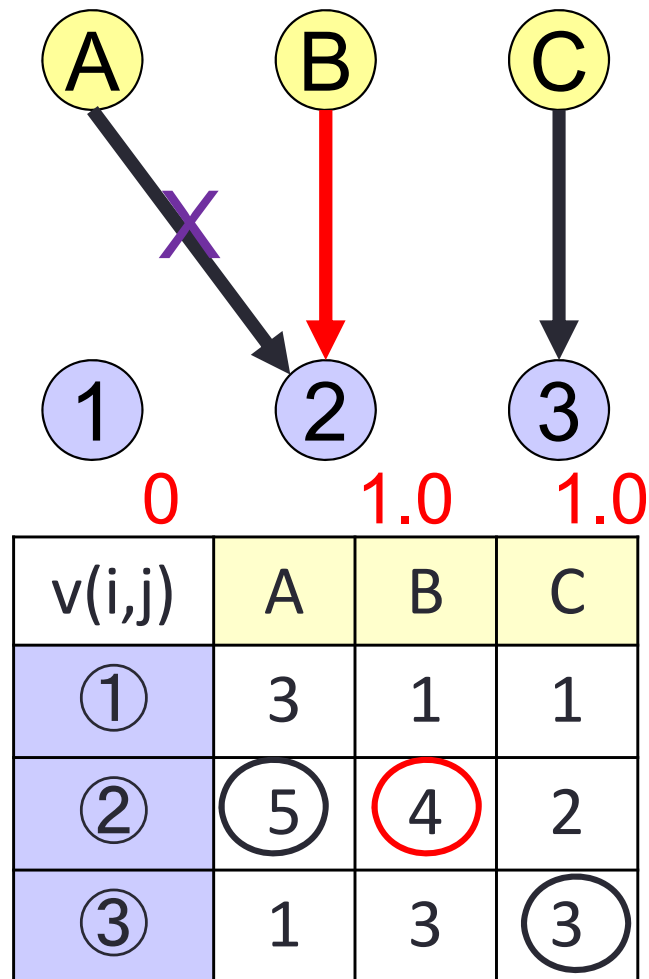
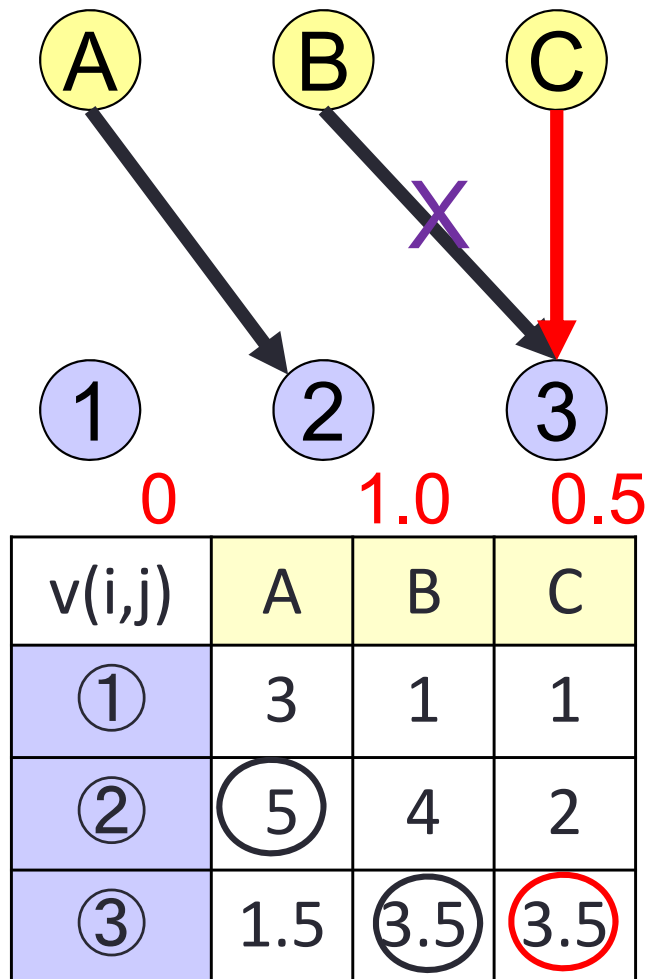
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	5.5	4.5	2.5
③	2	4	4



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

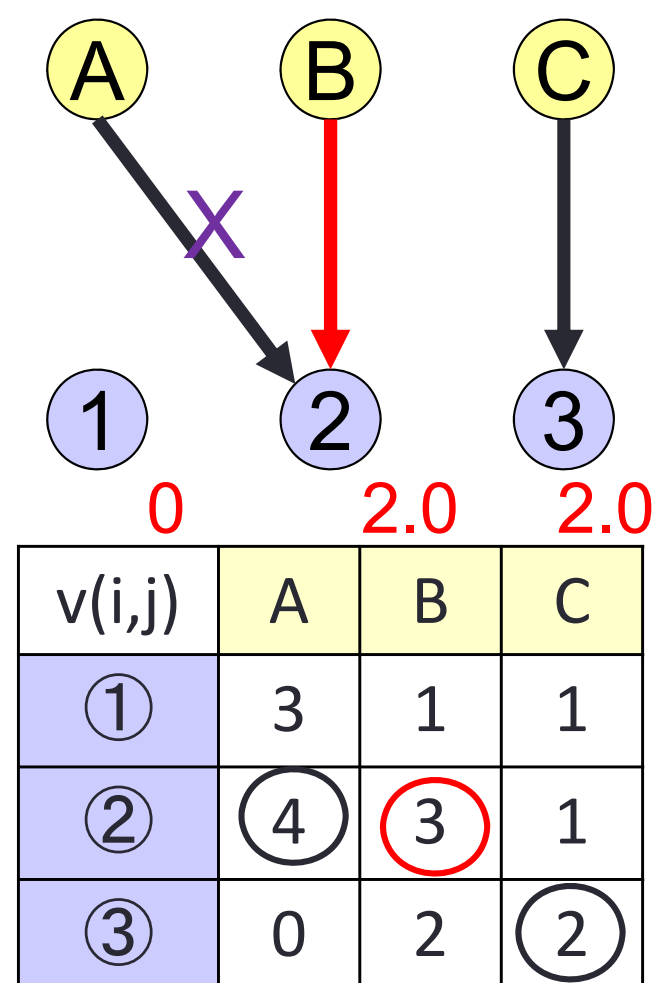
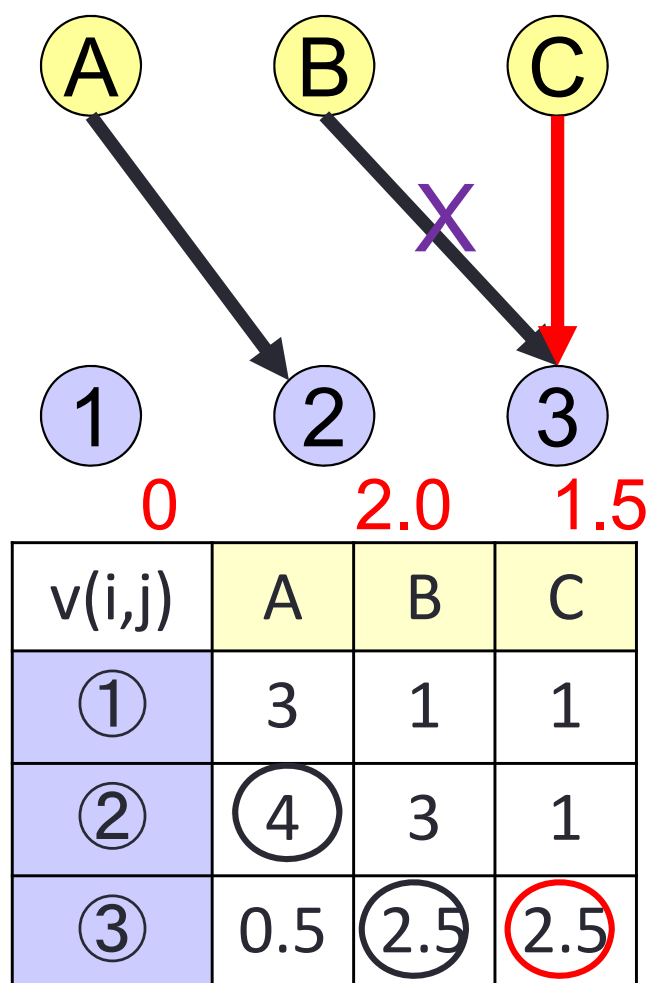
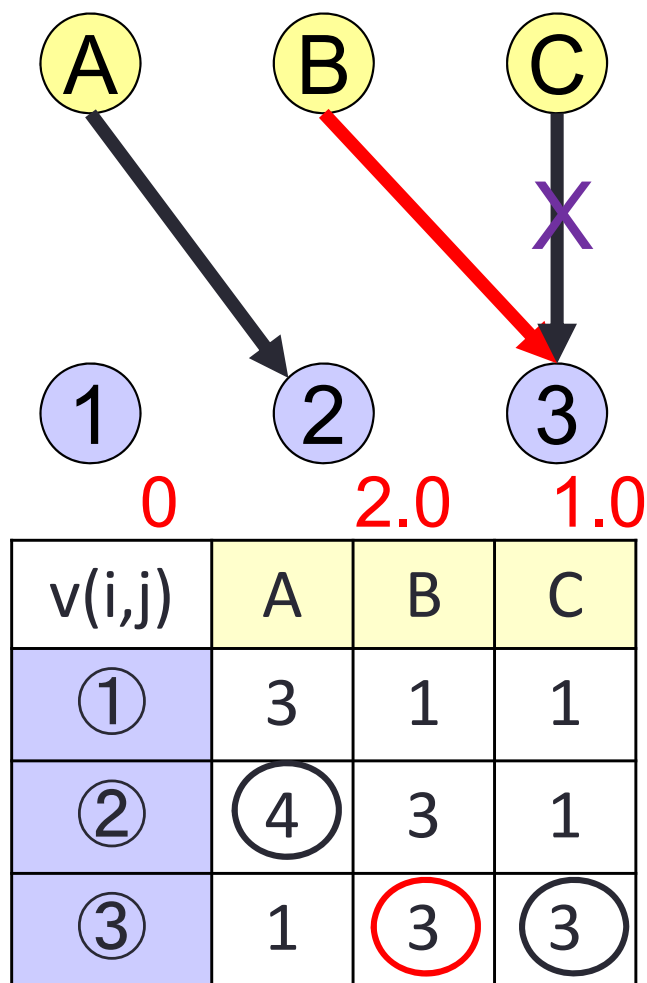
アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき



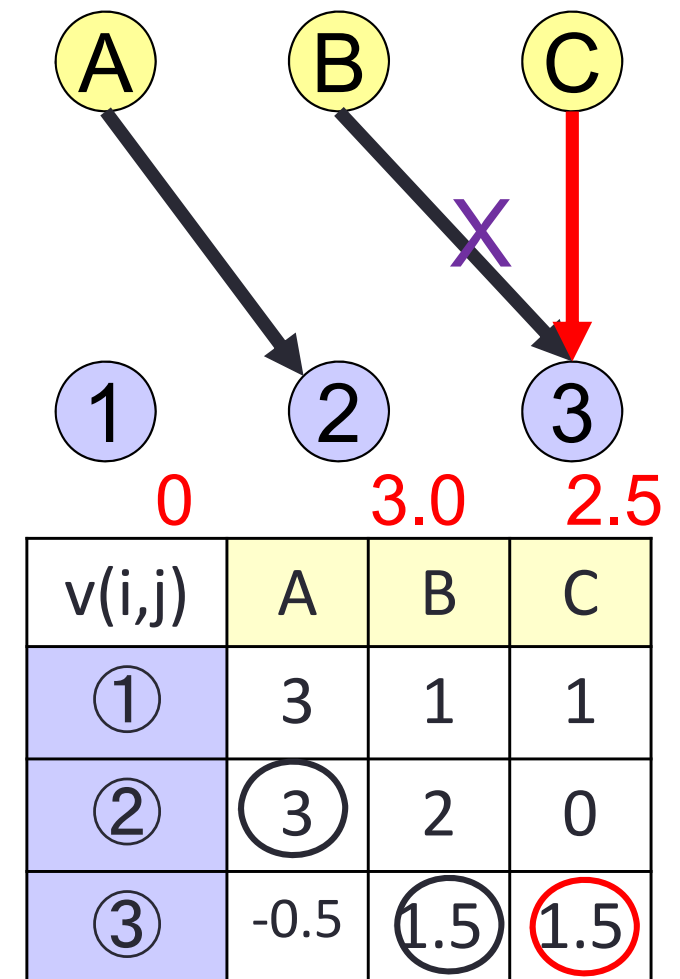
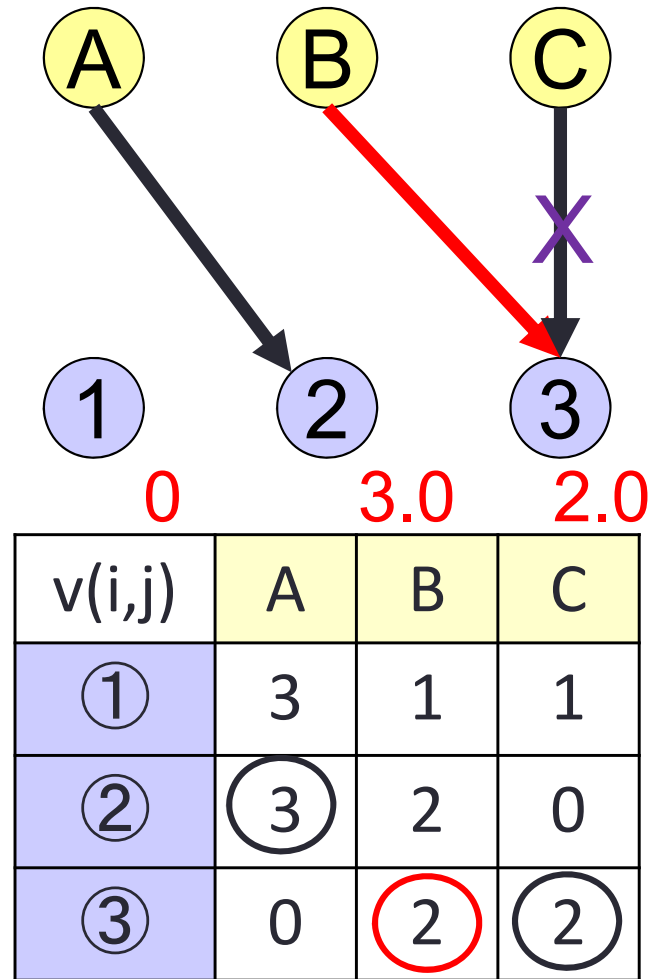
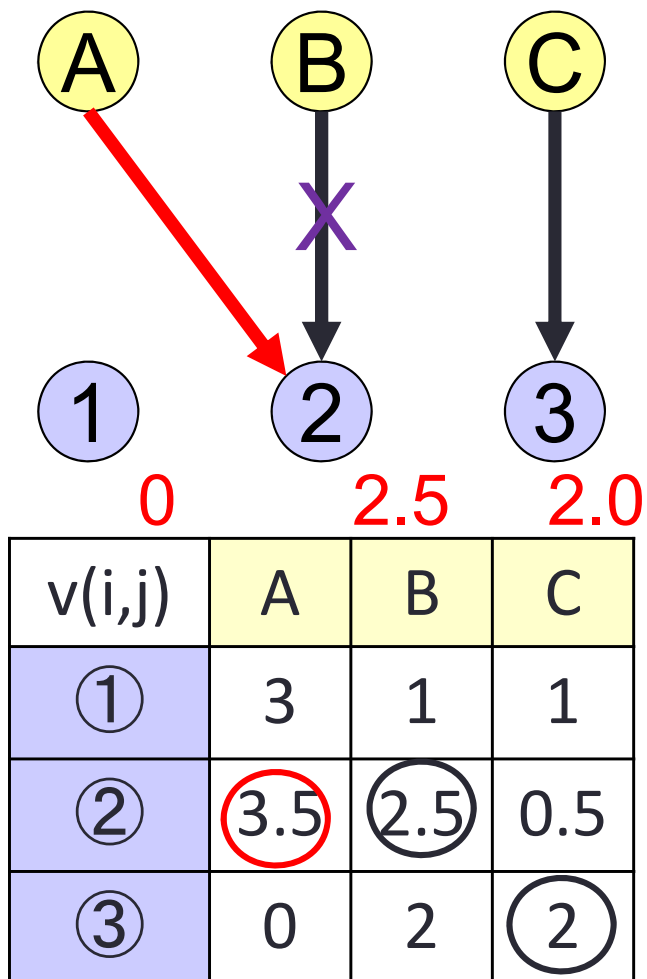
アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき



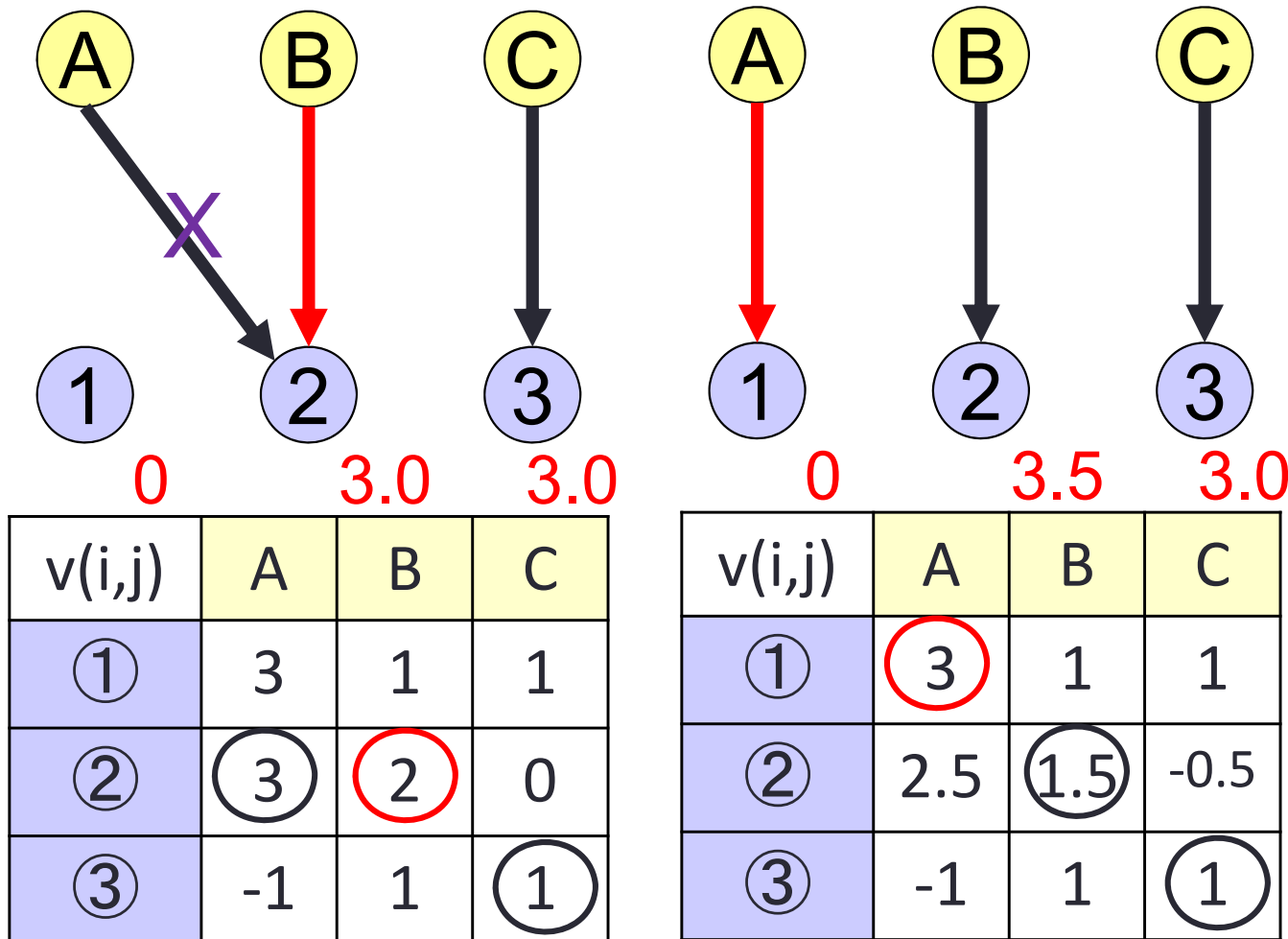
アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき



アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき



終了
均衡配分○
均衡価格○

演習問題

(A)

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

(B)

$v(i,j)$	A	B
①	3	1
②	7	6
③	1	7

上記の(A)(B)に対応する最大重みマッチング問題に関して、以下の問いに答えよ。いずれも結果のみ書けばよい。

問1: 最大重みマッチングMを求めよ。

問2: Mに関する補助グラフを書け。

問3: 補助グラフにおける s から各頂点への最短路長を求めよ。

問4: 問3の結果をふまえて、Mが最大重みであることの証拠を求めよ。