経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと
離散最適化

第4回 二部グラフにおけるマッチングと 最大重みマッチング

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

片側被覆制約つきマッチングの求め方

制約つきマッチングから最大マッチングへ

- B’⊆B をカバーするマッチングを求めたい

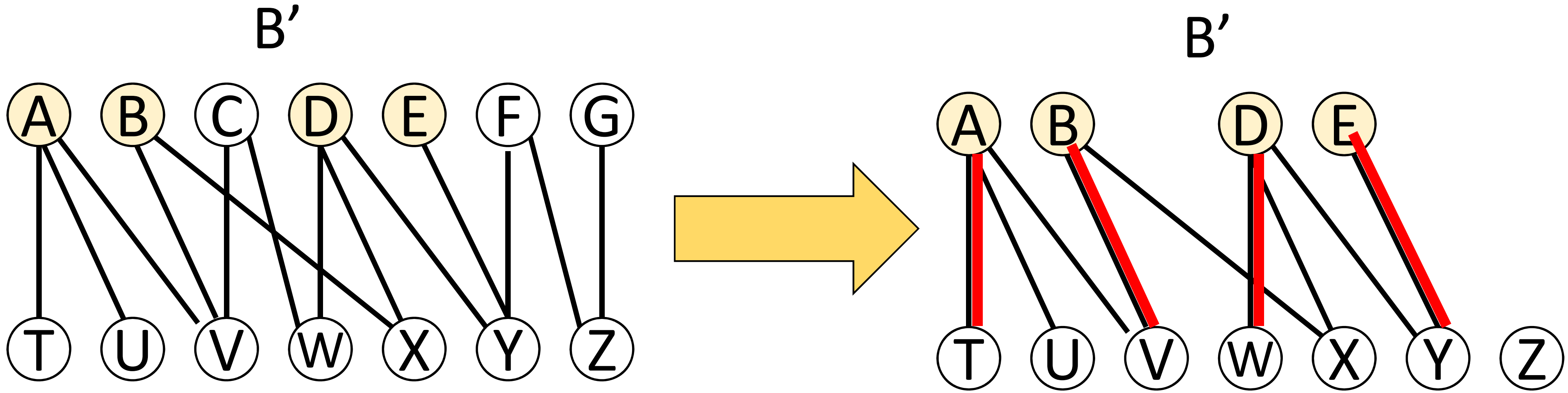
➔ B’ の頂点を出来るだけ多くカバーするマッチングを求めればよい

➔ 最大マッチング問題に帰着する

(1) 上側頂点集合 B に含まれる頂点のうち，B-B’の頂点を削除.
それらに接続する枝も削除.

(2) 得られたグラフの最大マッチングを求める

← B’ の頂点を出来るだけ多くカバーするマッチング



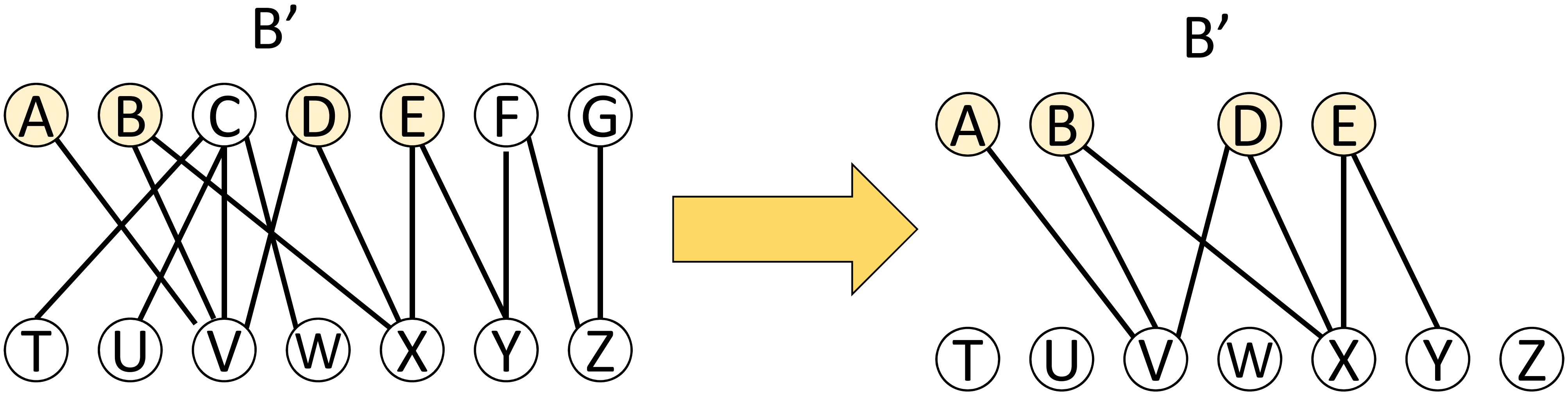
制約つきマッチングの有無の証拠

B’ の頂点をすべてカバーするマッチングが得られた

← そのようなマッチングが存在することの証拠

B’ の頂点をすべてカバーするマッチングが得られなかった

--- そのようなマッチングが存在しない証拠は？

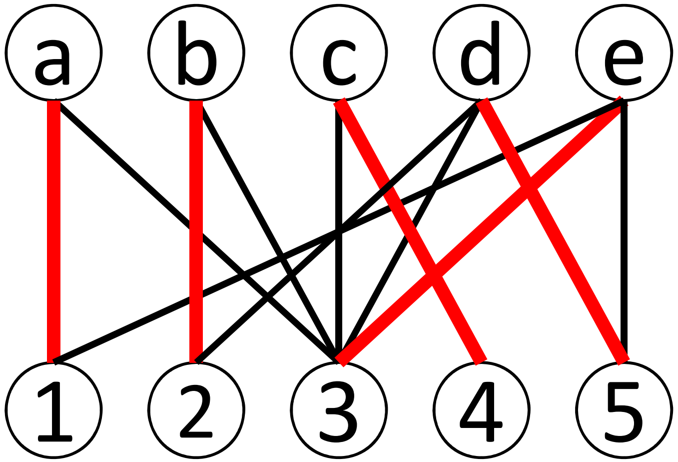


ホールの定理

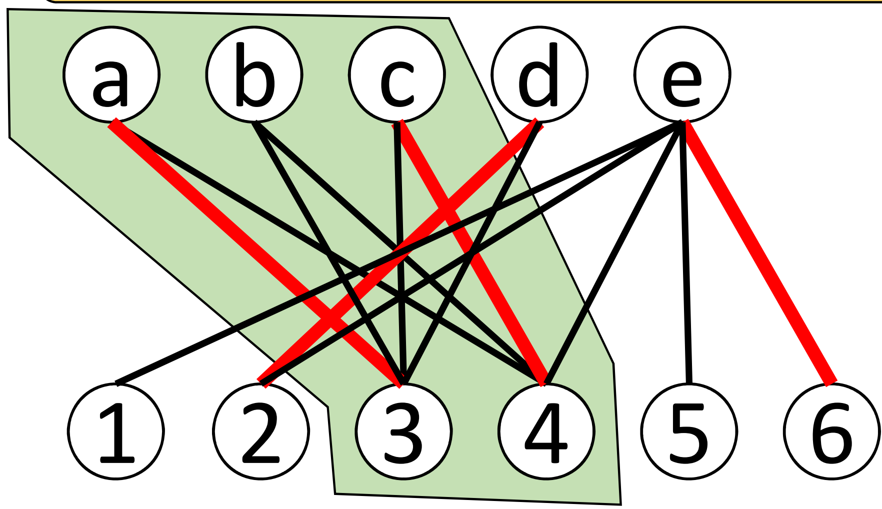
指定頂点集合をカバーするマッチング：存在するための必要条件

所与の B’⊆B をカバーするマッチングは存在するか？

B’={a,b,c,d,e}をカバー可能



B’={a,b,c,d,e}をカバー可能？



命題
ある X⊆B’に対し,
X の隣接頂点の数 < |X|
➔ B’ すべてをカバーする
マッチングは存在しない

a,b,c の隣接頂点 = {3,4}
∴ a,b,cのうち，高々2つしか
カバーできない
→ B’ はカバーできない

指定頂点集合をカバーするマッチング：存在するための必要十分条件

命題 あるX⊆B'に対し，Xの隣接頂点の数 < |X|
➔ B' すべてをカバーするマッチングは存在しない
（対偶：B' すべてをカバーするマッチングが存在
➔ 任意のX⊆B'に対し，Xの隣接頂点の数 ≧ |X|

逆も成り立つ

定理（Hall（ホール）の定理）
B' すべてをカバーするマッチングが存在
⬅➔ 任意のX⊆B'に対し，Xの隣接頂点の数 ≧ |X|

指定する頂点をカバーするマッチングが存在しない場合にも，
その証拠が得られる

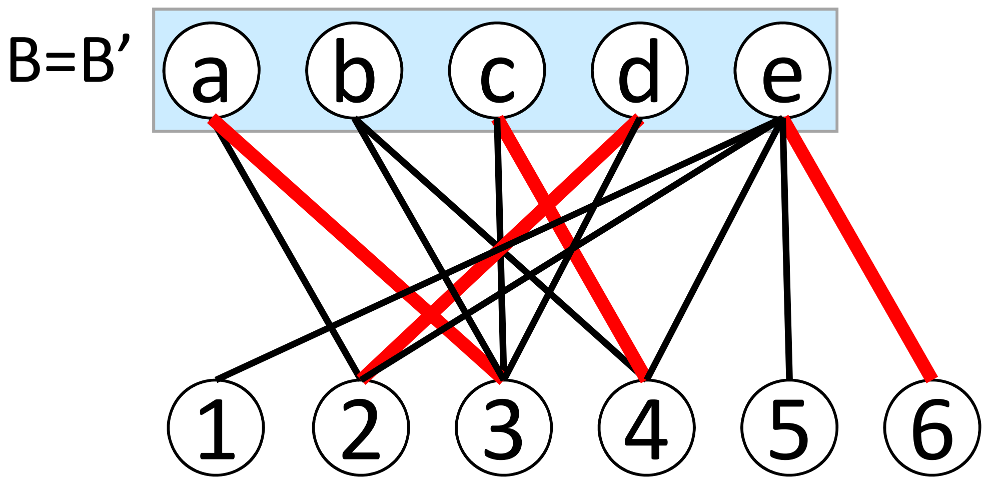
ホールの定理：証明

[🡐] 対偶「B′ すべてをカバーするマッチングは存在しない
　→ ある $X \subseteq B'$ に対し，　|X|＞Xに隣接する頂点の数」を証明

以降では，B=B′ と仮定しても良い

（∵ B-B′ に含まれる頂点およびそれらに接続する枝は無関係）

- M: マッチング, カバーする B′ の頂点数が最大とする
- S⊆B′: マッチング枝が接続していない B′ の頂点集合



ホールの定理：証明のつづき

Mのカバーする B’ の頂点数は最大

→ S の頂点から始まる，Mに関する増加路は存在しない

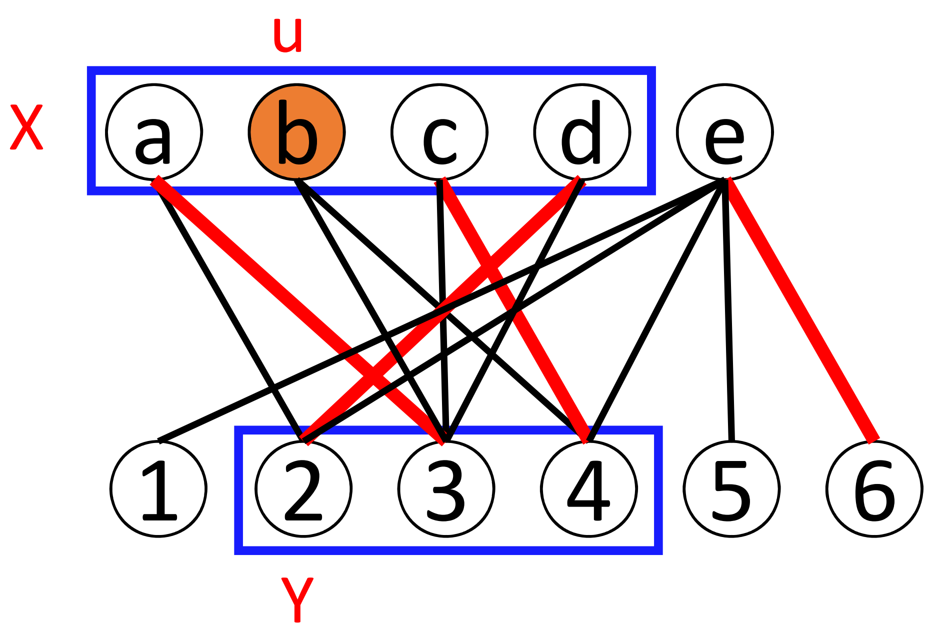
（∵存在する → カバーできる B’ の頂点数が増える）

仮定より，S は非空 → u∈S とする.

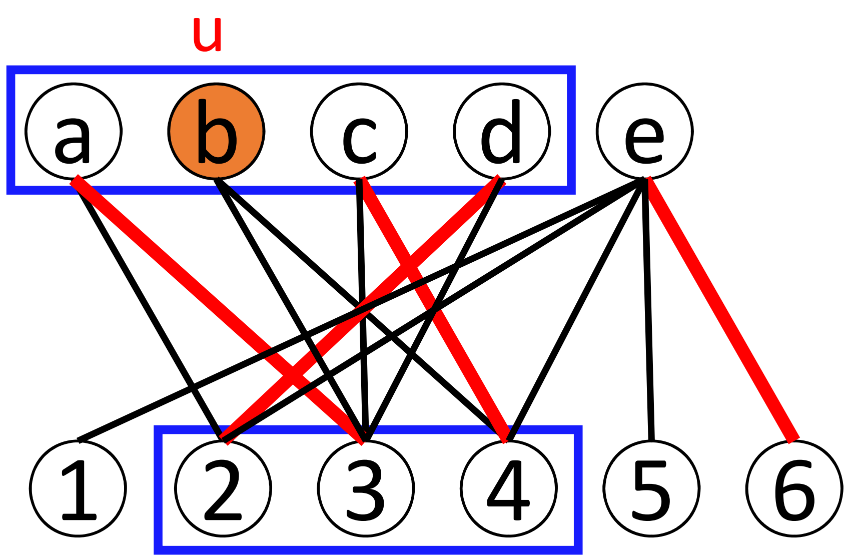
X: u から交互路で到達可能な B’ の頂点の集合

Y: X の隣接頂点の集合

以降では，|Y| < |X| を示す.



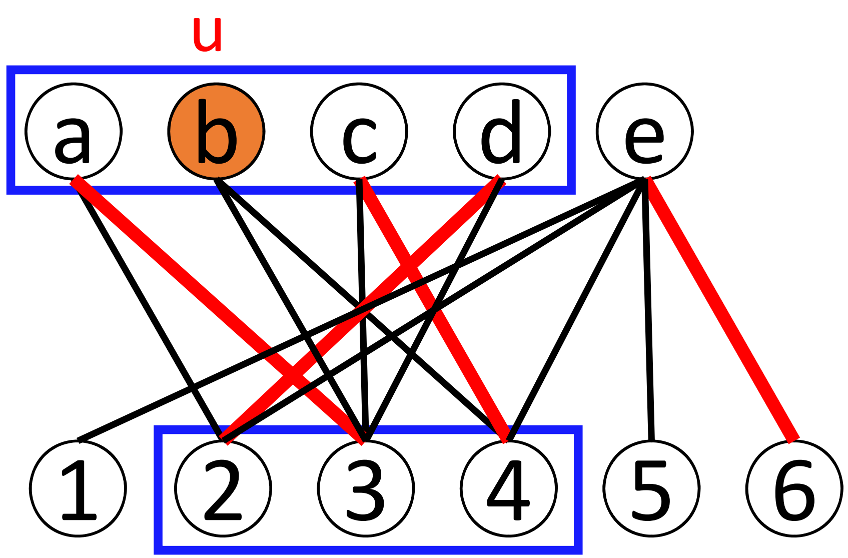
ホールの定理：証明のつづき



|Y|＜ |X|　を示すための準備：
「任意の v∈Y に対し,
 ある t∈X-{u}が存在して,
 (t,v)はマッチングの枝」 を示す.
Y の定義より, v ∈Y はある r∈X に隣接
(r, v) がマッチング枝のとき：u の選び方より u ≠ r　∴ r∈X-{u}
(r, v) がマッチング枝ではないとき：
　r は u から, ある交互路 P で到達可能な頂点.
　　とくに, P の最後の枝はマッチング枝.
 もし v にマッチング枝が接続しないと仮定 ➔ P∪{(r,v)} は増加路
 ➔ マッチングでカバーできる B' の頂点数を増やすことが可能（矛盾）
(t,v): v に接続するマッチング枝
　　とすると, P∪{(r,v),(t,v)}は u から t への交互路　∴ t∈X-{u}

ホールの定理：証明のつづき

「任意の v∈Y に対し，
あるt∈X-{u}が存在して，
(t,v)はマッチングの枝」を使って
|Y|＜ |X| を示す．

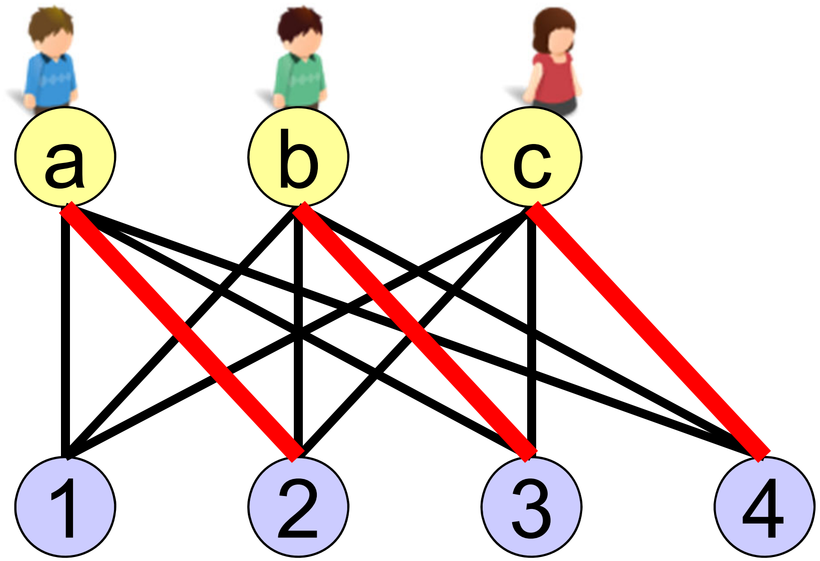


Y の各頂点 v_i $(i = 1,2, \ldots, |Y|)$に対し，
v_i とマッチング枝でつながる
X-{u} の頂点を t_i とおく．
マッチング枝は同じ頂点には接続しない ∴ t_i はすべて異なる
∴ X-{u} の頂点数 ≧ Y の頂点数
∴ |X| > |Y|. ■

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値 v(i,j)が与えられている状況で
  入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

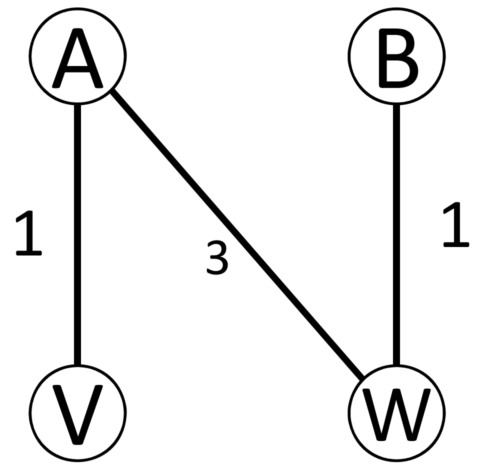
- 最大重みマッチング問題:
  枝に重みが与えられたグラフにおいて,
  枝重みの和が最大のマッチングを求める

最大重みkマッチング問題の定義

最大重みkマッチング問題

- 入力: 二部グラフ G=(V,E)（頂点集合 V, 枝集合 E）,
  各枝 (u,v) の重み w(u,v)
  正整数 k
- 出力: 枝数＝k のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの
  （最大重みkマッチング）

例: 最大重み1マッチングは
{(A,W)}, 重み3
最大重み2マッチングは
{(A,V), (B, W)}, 重み2



最大重みマッチング問題の読み替え

- 入札者 → ある仕事の雇用者
- 財 → 労働者
- 評価値 v(i,j) → 仕事 i に労働者 j を割り当てたときの収益

※ 各仕事に従事できる労働者は高々ひとり
　各労働者が従事できる仕事は高々ひとつ

- 最大重みマッチング問題: 　雇用者と労働者の仲介役の問題
  総収益が最大となるような，労働者の仕事への割当を求める

最大重みマッチングの双対問題

仲介役の別の仕事:

労働者の仕事への割当で得た収益をうまく配分

- $q(i)$ = 仕事 i の雇用者の取り分（≧0）
- $p(j)$ = 労働者 j の取り分　（≧0）
- 労働者 j が仕事 i に従事 → 収益 $v(i,j)$

$q(i) + p(j) < v(i,j)$ 成立

➔労働者 j と雇用者 i は単独で契約を結ぶ

∴ $q(i) + p(j) \geqq v(i,j)$ を満たす必要あり

仲介役の解くべき問題:

全労働者および全雇用者が不満をもつことなく,

配分するお金の総額を最小に　　← 双対問題

双対問題の定式化

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

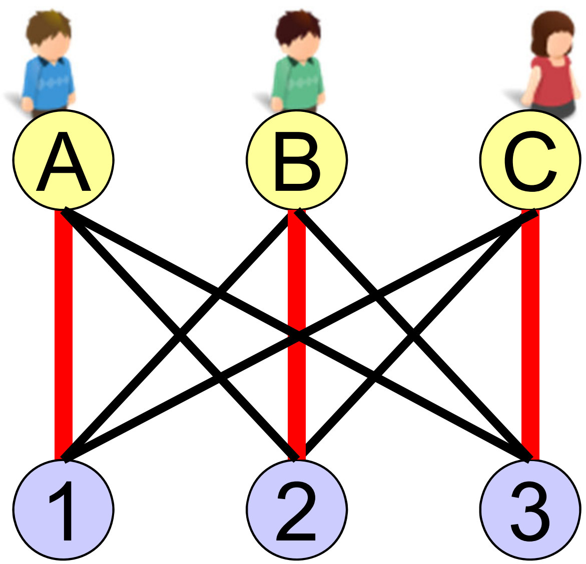
条件

$$q(i) + p(j) \geq v(i,j) \qquad (\forall i \in B, \forall j \in N)$$

$$q(i) \geq 0 \qquad (\forall i \in B)$$

$$p(j) \geq 0 \qquad (\forall j \in N)$$

オークションと最大重みマッチング問題の関係



v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

二部グラフを次のように定義

- 頂点集合 $V = B \cup N$
- 枝集合 $E = B \times N \quad (= \{ (i,j) \mid i \in B,\ j \in N \})$
- 各枝(i,j)の重み = v(i,j)

➔ 最大重みマッチング問題が得られる

財の配分と二部グラフのマッチングは1対1対応

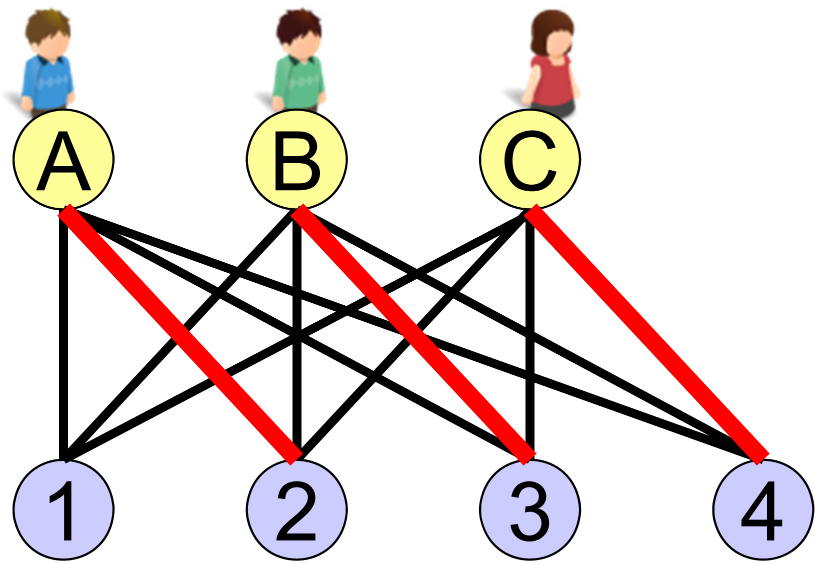
- 配分 $\alpha(i)$ に対応するマッチング $M = \{(i, \alpha(i)) | i \in B, \alpha(i) \neq 0\}$

均衡配分と最大重みマッチングの関係

オークションの均衡配分 ＝ 最大重みマッチング

定理： $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分

$\Leftrightarrow$ $\alpha^*(i)$ に対応するマッチングは最大重み

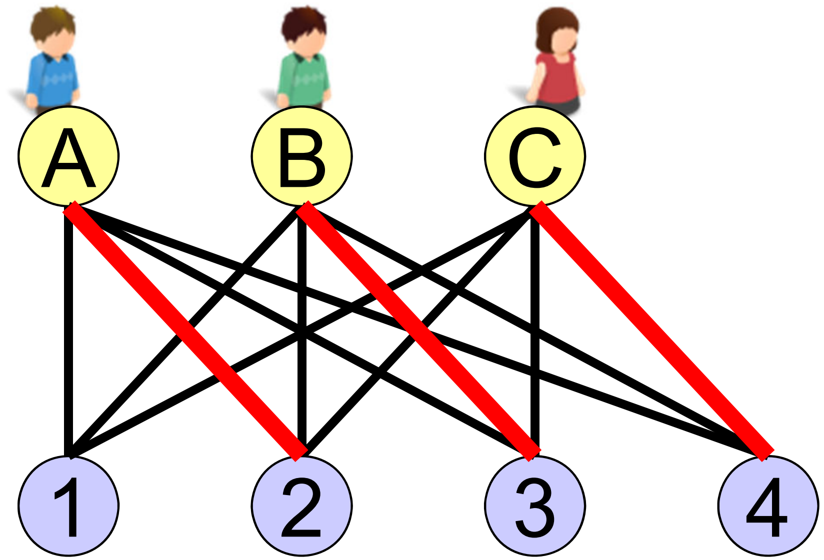


v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡価格と最大重みマッチングの双対問題の関係

定理: オークションの均衡価格 ←→ 双対問題の最適解

q(i) = 4 3 4



p(j)= 0 3 4 0

均衡価格

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡配分ならば最大重みマッチング(1)

命題： α^* は均衡配分
➔ α^* に対応するマッチングは最大重み

[証明の概略]
最大重みマッチング(に対応する配分) $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ に対し,
α の重み ≦ α^* の重み ①
を示せばよい．以下では，α^*, α 共にすべての入札者に財の割当がある場合のみ考える
➔ α^* の重み= $\sum_{i\in B} v(i, \alpha^*(i))$, α の重み= $\sum_{i\in B} v(i, \alpha(i))$ と書ける
$S^* = \{\alpha^*(i) | i \in B\}$, $S = \{\alpha(i) | i \in B\}$ とおく.

α^* は均衡配分➔ある財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在して
配分 α^* と価格 p のペアはワルラス均衡

$v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) \geq v(i, h) - p(h)\ (\forall h \in N)$ ②
$p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus S^*)$ ③

均衡配分ならば最大重みマッチング(2)

(証明のつづき)

② より, 各入札者 i に対し

$$v\big(i,\alpha^*(i)\big)-p\big(\alpha^*(i)\big)\geq v\big(i,\alpha(i)\big)-p\big(\alpha(i)\big)$$

$$\therefore \sum_{i\in B} v\big(i,\alpha^*(i)\big)\geq \sum_{i\in B} v\big(i,\alpha(i)\big)+\sum_{i\in B} p\big(\alpha^*(i)\big)-\sum_{i\in B} p\big(\alpha(i)\big)$$

$$\sum_{i\in B} p\big(\alpha^*(i)\big)-\sum_{i\in B} p\big(\alpha(i)\big)=\sum_{j\in S^*\setminus S} p(j)-\sum_{j\in S\setminus S^*} p(j)\geq 0$$

(∵価格の非負性と③)

よって, $\sum_{i\in B} v\big(i,\alpha^*(i)\big)\geq \sum_{i\in B} v\big(i,\alpha(i)\big)$

最大重みマッチングならば均衡配分(1)

命題: α は最大重みマッチング ➔ α は均衡配分

[証明の概略]
α^* は均衡配分, p は均衡価格とする
➔ 直前の命題より, α^* も最大重みマッチング
α と p が均衡の条件を満たすことを示す.
以下では, α^*, α 共にすべての入札者に財の割当がある場合のみ考える
$S^* = \{\alpha^*(i) | i \in B\}$, $S = \{\alpha(i) | i \in B\}$ とおく.
α^* と p は均衡なので,
$v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) = \max_{h \in N}\{v(i,h) - p(h)\}$ ①
$p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus S^*)$ ②
α と p が均衡である ←➔ 以下の2条件を満たす

$$v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) = v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))$$

$$p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus S)$$

これらを示す

最大重みマッチングならば均衡配分(2)

①より， $v\big(i,\alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) \geq v\big(i,\alpha(i)\big) - p\big(\alpha(i)\big)$ ③

②と価格の非負性より

$p(j) = 0 \quad \big(\forall j \in N \setminus (S^* \cup S)\big)$ ④ $\quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in S^* \setminus S)$ ⑤

「均衡配分ならば最大重みマッチング」の証明と同様にして，

③，④，⑤より $\sum_{i \in B} v\big(i,\alpha^*(i)\big) \geq \sum_{i \in B} v\big(i,\alpha(i)\big)$

ここで，③と⑤の不等式の１つでも ">" で成り立つと

$$\sum_{i \in B} v\big(i,\alpha^*(i)\big) > \sum_{i \in B} v\big(i,\alpha(i)\big)$$

となり，α^* が最大重みマッチングであることに矛盾．

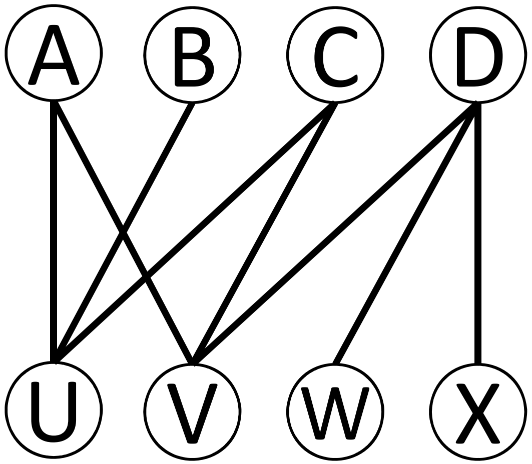
∴ ③と⑤の不等式のいずれも "=" で成立

∴ α と p が均衡であるための2条件が成立 ■

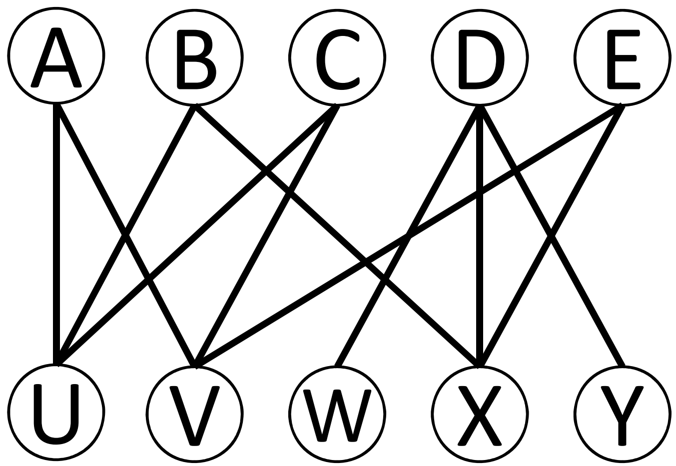
演習問題

問1: 以下の二部グラフでは，頂点集合 R をカバーするマッチングが存在しない．
ホールの定理に基づき，その証拠を示せ．

（1）R={A, B, C, D}



（2）R={A, B, C, D, E}



演習問題

問2：下記のように評価値と財の価格（赤い数字）が与えられたとき，
均衡価格か否か判定したい．

（１）(i), (ii), (iii) それぞれに対し，判定のための二部グラフを書け．
また，頂点集合B', N' を明記せよ．

（２）頂点集合 B' ∪ N' を同時にカバーするマッチングが存在するか否か，調べよ．
存在しない場合は，ホールの定理を参考にして，その理由を述べよ．

(i)

	v(i,j)	A	B	C
3	①	2	3	6
4	②	6	7	7

(ii)

	v(i,j)	A	B	C
2	①	3	1	0
5	②	7	6	7
6	③	1	7	8

(iii)

	v(i,j)	A	B	C
1	①	3	1	0
5	②	7	6	7
6	③	1	7	8
5	④	0	0	4