

経営経済のための 最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第1回

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

この講義の目的

- 複数の不可分財に対するオークション
 における勝者と落札価格の決定
 - 不可分財 --- 分割できない「もの」（家, 自動車, 権利, など）
 - 単一財の場合のオークション: よく知られている
 - 複数財の場合のオークション? ← この授業で扱う
- 離散最適化の観点から理解
 - 均衡の構造
 - 均衡を求めるアルゴリズム

成績評価方法と授業の進め方

- ほぼ毎回の講義において、レポート課題を出します
 - OCW-i を使って提出してもらいます
 - ✕切：次回の講義日の朝10時
- その評価点の合計値に基づき、成績を決めます
 - レポートの提出回数が悪い場合は「不可」とします
 - 試験は実施しません
 - 出席は取りません
- 講義時間の途中で休憩を5分ほど取ります
- 終了時間より5分ほど早めに講義を終える予定

本日の講義内容

- 前半：この講義の全体像の説明
- 後半：ワルラス均衡の概念

単一財オークション

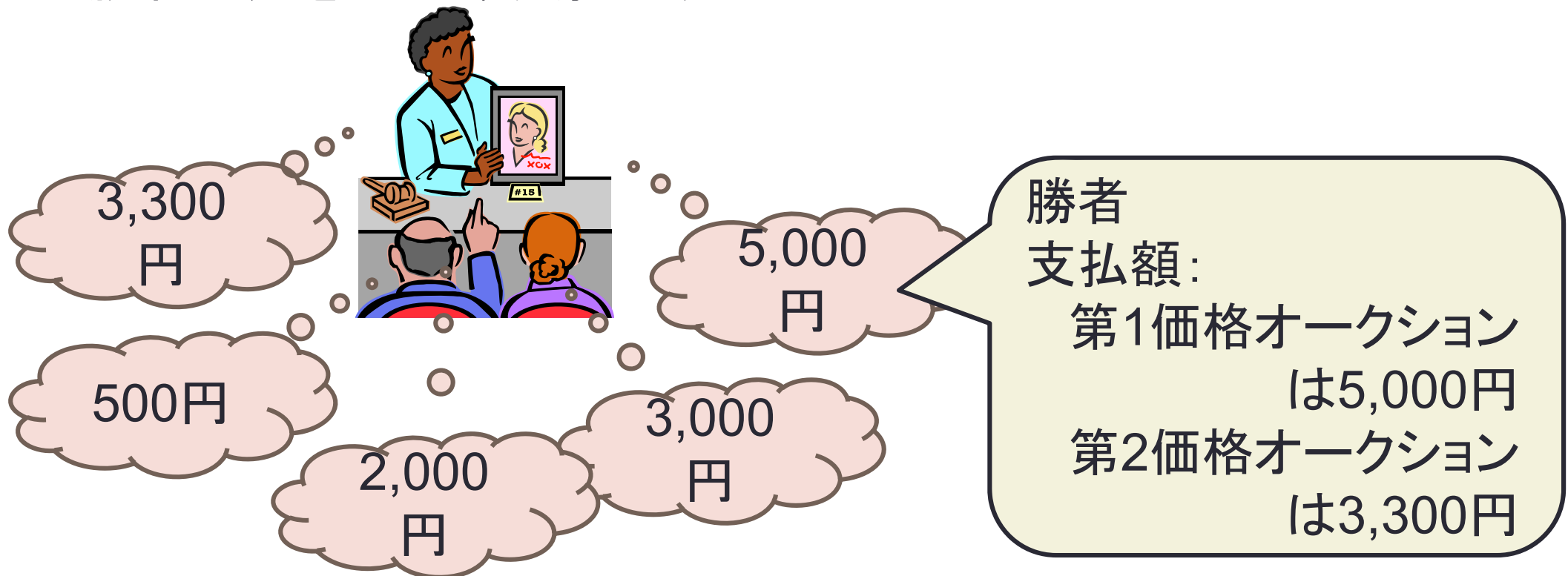
単一財オークション --- ひとつの財に対するオークション
オークションの流れ（**封印型**の場合）

1. オークションの参加者（入札者）:

品物（財）の価値を評価し、オークション主催者に伝える

2. 主催者: **勝者** および **価格（支払額）** を決定

3. 勝者: 財をもらい、支払う



複数財オークション: 単一需要モデル

複数財を **同時に** オークション

- **単一需要モデル**: 入札者は **高々1つ**の財が欲しい(**割当モデル**)
オークションの流れ (**封印型**の場合)

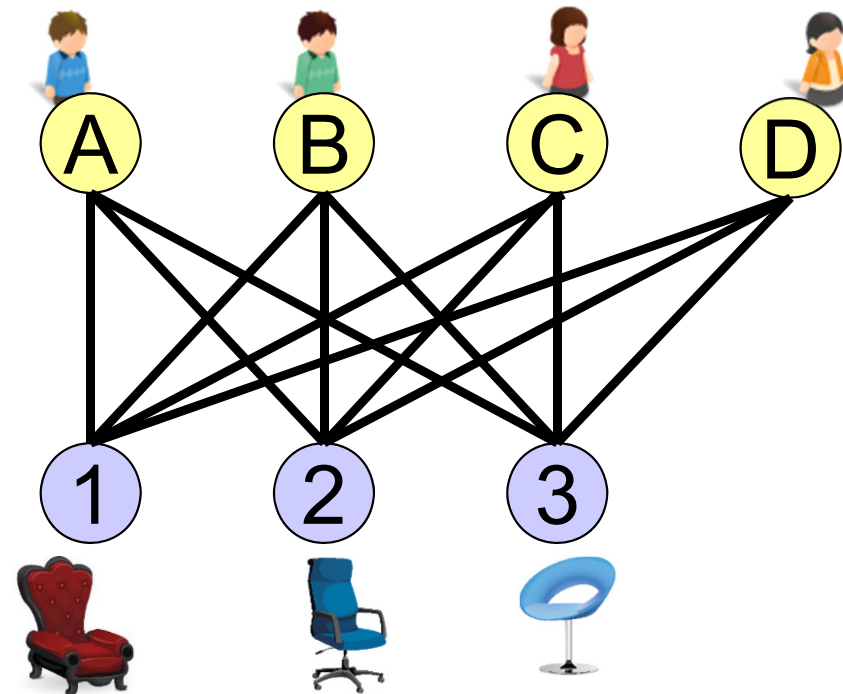
1. オークションの参加者(入札者):

各々の財の価値を評価し, オークション主催者に伝える

2. 主催者: 各々の財の **勝者** および **価格(支払額)** を決定

3. 各々の財の勝者: 財をもらい, 支払する

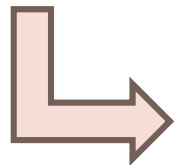
評価値	A	B	C	D
①	3	1	0	5
②	7	6	7	4
③	1	7	8	4



ワルラス均衡

複数財オークションにおける検討事項

- 入札者は、「財の評価額 - 価格」(利得, 効用) を最大にしたい
- 主催者は、財を多く売りたい
- 各々の財の勝者(配分方法): どの財を 誰に 割り当てるか?
- 各々の財の価格: 各入札者の支払額 (= 割り当てられた財の価格) をどのように決めるか?



ワルラス均衡

入札者全員にとって望ましい配分 & 価格

---入札者は 利得 最大の財をもらえる

(厳密な定義は後ほど)

この授業の目的:

- ワルラス均衡を求めるアルゴリズムの説明
- 離散最適化の観点から理解

評価値が既知の場合のアルゴリズム

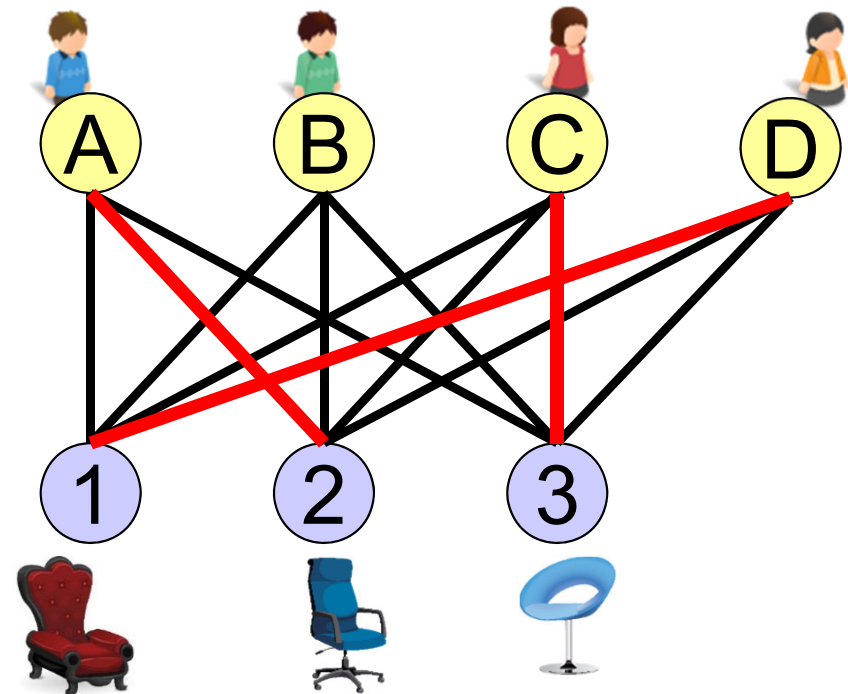
定理： ワルラス均衡における財の配分

↔ 評価値の和を最大化する財の配分

∴ 評価値が既知ならば、ワルラス均衡の配分の計算は、
最大重みマッチング問題に帰着可能

ハンガリー法(Kuhn1955)
 など、様々なアルゴリズム

評価値	A	B	C	D
①	3	1	0	5
②	7	6	7	4
③	1	7	8	4



評価値の扱いについて

入札者の評価値は個人情報

→ オークション主催者に 直接 知らせたくない

代案: 評価値の情報を 間接的に 伝える

1. 主催者: 各財の暫定価格を決定

利得最大の財

2. 各入札者: 暫定価格の下で最も欲しい財を報告

3. 入札者全員に(重複無く)最も欲しい財を

配分可能 → 終了. 現在の価格は均衡価格

配分不可能 → 主催者は暫定価格を適切に変更

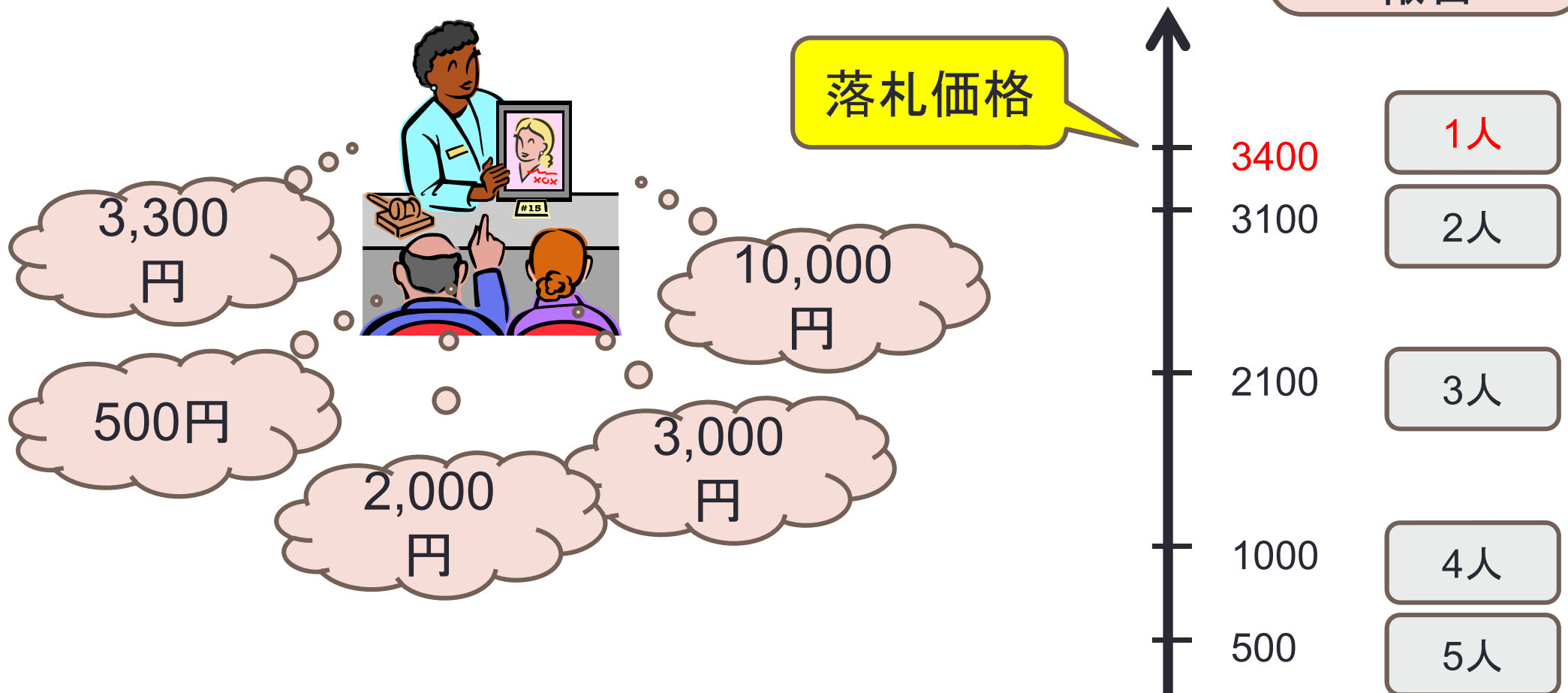
反復オークション と呼ばれる

単一財の場合 → イングリッシュ・オークション など

イングリッシュ・オークション

- オークション主催者: 価格を徐々に(1単位ずつ)上げる
- 入札者: 購入可能な価格ならば挙手する
- 購入可能なオークション参加者が1人になったら終了

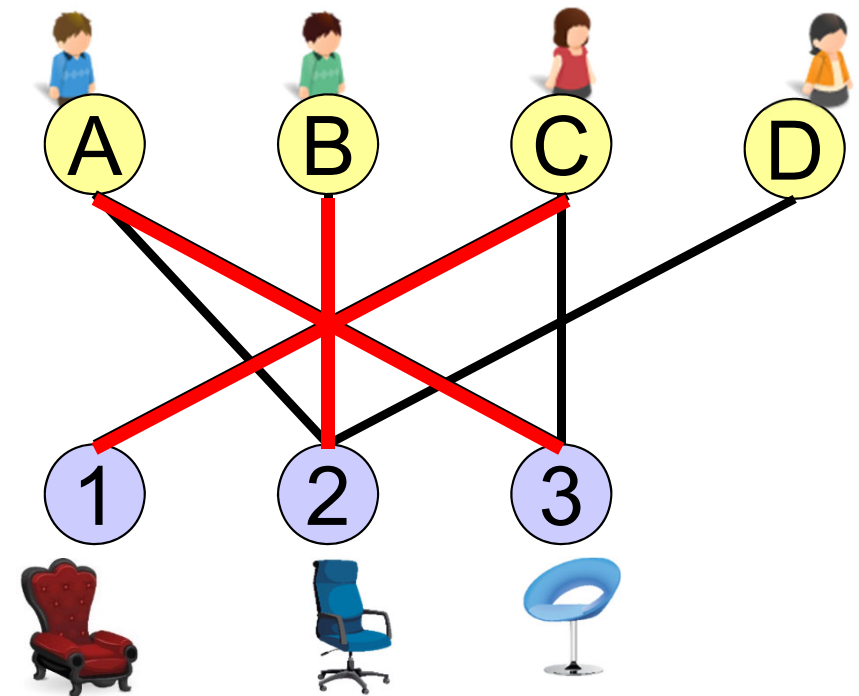
評価値を
間接的に
報告



反復オークションの検討事項その1

- 最も欲しい財(=利得最大の財)の配分可否の判定は？
→二部グラフの **マッチング問題**へ帰着

最も 欲しい財	A	B	C	D
①			○	
②	○	○		○
③	○		○	



反復オークションの検討事項その2

- 価格の変更方法は？
 - 多くの入札者に最も欲しい財を割り当てたい
 - 基本的な方針：人気の財の価格を増加,
不人気の財の価格を減少
- これだけでは不十分.
 - 人気があっても価格を増やさない方がよいことも.

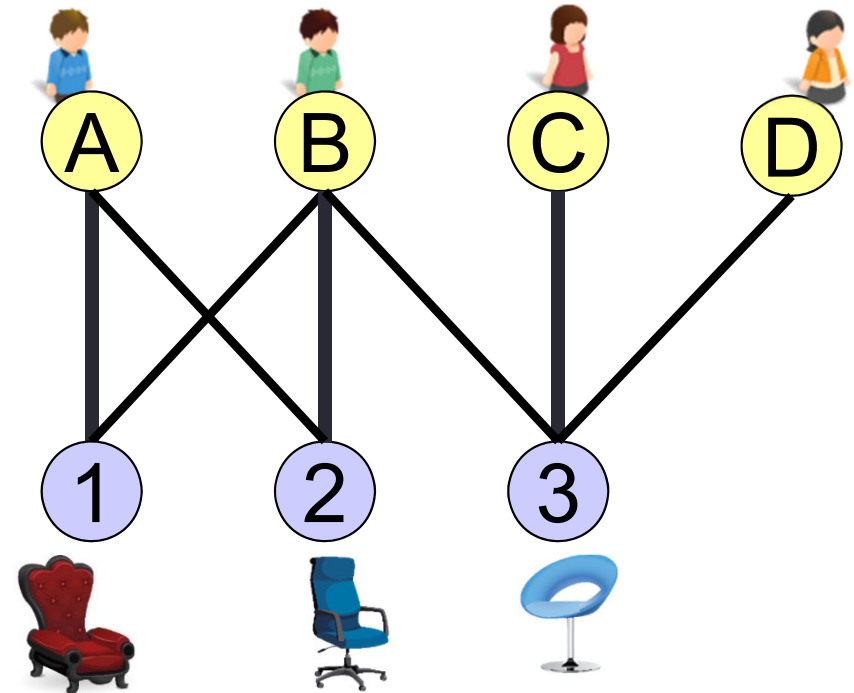
価格の増やし方: 悪い例

評価値	A	B	C	D
①	1	1	0	0
②	1	1	0	0
③	0	1	1	1

0
0
0

3つの財いずれも欲しい人が複数

→ 価格を上げる



利得	A	B	C	D
①	0	0	-1	-1
②	0	0	-1	-1
③	-1	0	0	0

1
1
1

Aはどの財も欲しくない

→ Aは割当なしを選ぶ

→ 均衡配分が得られない

反復オークションのアルゴリズム

以下の2つを紹介

- その1 (Bertsekas (1979), Demange, Gale, Sotomayor (1984))
 - 単調に価格を増加, **均衡配分** (および均衡価格の近似値) を求める
 - 各反復で, 入札者の最も欲しい財**ひとつ**の情報が必要
 - 価格増加のルールは簡単: 希望が重複 → 価格を増やす
- その2 (Demange, Gale, Sotomayor (1984))
 - 単調に価格を増加, **均衡価格** (および均衡配分) を求める
 - 各反復で, 入札者の最も欲しい財**すべて**の情報が必要
 - 価格増加のルールは複雑:
 - 得た情報を使い, 価格を増やす財をうまく選ぶ

今後の予定

- ワルラス均衡と最大重みマッチング問題の関係
 - 最短路問題の復習
 - 最大重みマッチングの最適性条件
 - 最大重みマッチングのアルゴリズム
 - ワルラス均衡の存在性, 最大重みマッチングとの関係
- 反復オークションのアルゴリズムの紹介
 - 最も欲しい財ひとつの情報のみを使う
 - 最も欲しい財すべての情報を使う
- より一般的なオークションにおける均衡価格の計算

ワルラス均衡の定義

ワルラス均衡とは？

- 入札者への財の割当 & 財の価格 の組
ただし、「入札者全員が不満をもたない」という条件を満たす

例：入札者A, B, 財①, ② のとき
評価値は右表のとおり(単位: 万円)

$v(i,j)$	A	B
①	4	3
②	6	4

財の割当 A-①, B-②
①の価格 1万円 ②の価格 3万円

Bにとって
①の「実質的な評価値」= $3 - 1 = 2$
②の「実質的な評価値」= $4 - 3 = 1$

利得	A	B
①	3	2
②	3	1

実質的な評価値の少ない財が割り当てられたので不満

ワルラス均衡とは？

- 入札者への財の割当 & 財の価格 の組
ただし、「入札者全員が不満をもたない」という条件を満たす

例：入札者A, B, 財①, ② のとき
評価値は右表のとおり(単位：万円)

割当と価格を変更

財の割当 A-②, B-①

①の価格 1万円 ②の価格 2万円

$v(i,j)$	A	B
①	4	3
②	6	4

Bにとって

①の「実質的な評価値」= $3 - 1 = 2$

②の「実質的な評価値」= $4 - 2 = 2$

利得	A	B
①	3	2
②	4	2

実質的な評価値が**最大**の財が割り当てられたので**満足**

ワルラス均衡の定義：準備

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ 財の集合（各財の在庫は1つのみ）



$B = \{1, 2, \dots, m\}$ 入札者の集合



$v(i, j) \in \mathbb{R}_+$ 入札者 i の 財 j に対する評価額（非負の実数値）

$p(j) \in \mathbb{R}_+$ 財 j の価格（非負の実数値）

ワルラス均衡

定義：財の配分および財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$
 は **ワルラス均衡** (競争均衡)
 $\leftrightarrow$ 以下の条件を満たす

- 入札者 i に財 j が割り当てられる
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$

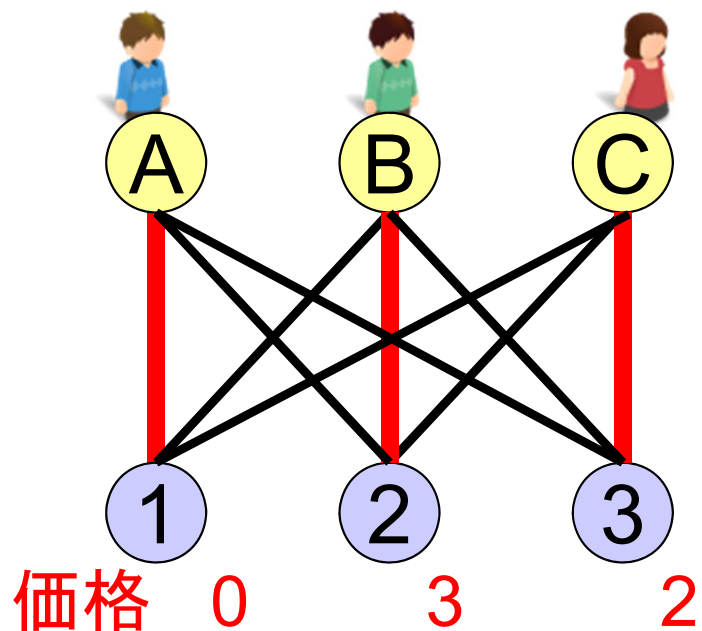
利得最大の財
が割り当て

どの財も
欲しくない

価格 > 0 の
財は
皆売れる

- 定義： **均衡配分** = 均衡に現れる配分
均衡価格 = 均衡に現れる価格

オークションと均衡の具体例

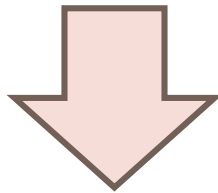


$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

価格	利得	A	B	C
0	①	3	1	1
3	②	3	2	0
2	③	0	2	2

ワルラス均衡の書き換え

- 入札者 i に財 j が割り当てられる
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$



- 入札者 i に財 j が割り当てられる
 $\rightarrow v(i, j) - p(j) \geq 0, v(i, j) - p(j) \geq v(i, h) - p(h) (\forall h \in N)$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 $\rightarrow v(i, h) - p(h) \leq 0 (\forall h \in N)$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$

ワルラス均衡の書き換え

- 入札者 i に財 j が割り当てられる
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$

$v(i, 0) = 0, p(0) = 0$ とおく $\rightarrow$ 条件を簡略化できる

- $\forall i \in M: v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) = \max_{0 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$

レポート問題(×切: 次回の講義日の朝10時)

下記のように評価値が与えられたときのワルラス均衡を求めよ。
ただし, A,B,C,...は入札者, ①, ②, ③, ... は財を表す。

問1

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

問2

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

問3

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4