

経営経済のための 最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第10回 評価関数の粗代替性

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

財集合の評価関数

- 財の評価

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数 (評価関数, valuation function)

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少: $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leq v_i(Y)$

ワルラス均衡

- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 価格ベクトル p^* と財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ の組は **ワルラス均衡**
 $\iff X_i \in D_i(p^*) \ (i = 1, \dots, m), \quad p(j) = 0 \ (\forall j \in X_0)$

価格 p^* の下で
皆が最良の
財集合

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: $D_A(p) = \{ \{1\} \}$
- Bさん: $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
- Cさん: $D_C(p) = \{\text{財の数2または3}\}$

$\rightarrow p$ と配分 $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ はワルラス均衡

- ワルラス均衡は, 一般には存在するとは限らない.
- どのような評価関数ならば, 均衡の存在を保証できるか?

評価関数の粗代替性

代替性と補完性

- 2つの財の関係
 - **代替的**： 2つの財が類似，一方を他方で置き換え可能
どちらかがあれば嬉しい
両方あっても，あまり嬉しくない
 - 具体例：紅茶とコーヒー，2種類のいす，レタスとキャベツ
 - **補完的**： 2つの財の性能・能力が補完的
両方あれば嬉しい，片方だけでは不十分
 - 具体例：食卓と椅子，プリンタとインク，ゲーム機とソフト
- 財の集合が**代替的(補完的)**
 - ◀→ 集合内の任意の2つの財が**代替的(補完的)**

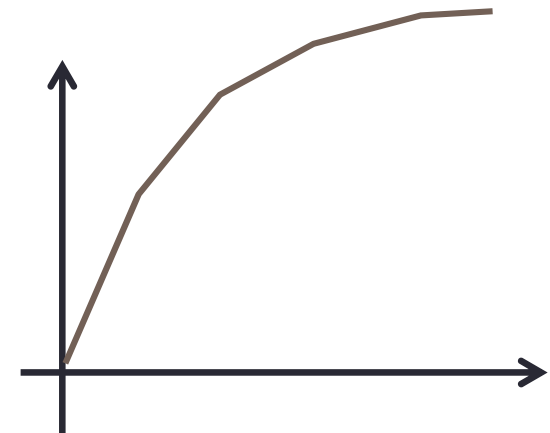
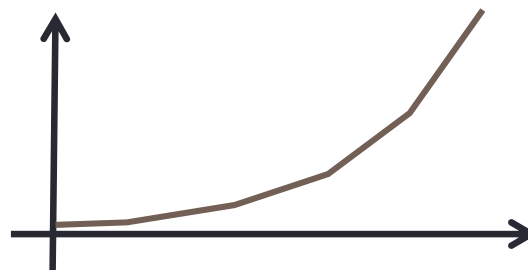
この講義：**代替的な財(代替財)**を主に扱う

代替財に対応する評価関数の例

ポイント: 財集合の評価値 $\leq$ 個々の評価値の和

- 重み和 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) (additive)
- 財集合 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)
{①, ②, ③} $\rightarrow$ 評価値 70, {③, ④, ⑤} $\rightarrow$ 評価値 100
- 財の数に依存, かつ上に凸 (symmetric & concave)
(1つ: 100, 2つ: 180, 3つ: 240, 4つ: 280, 5つ: 300)

※ symmetric & convex ならば補完的

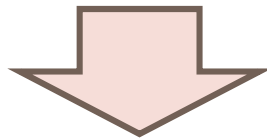
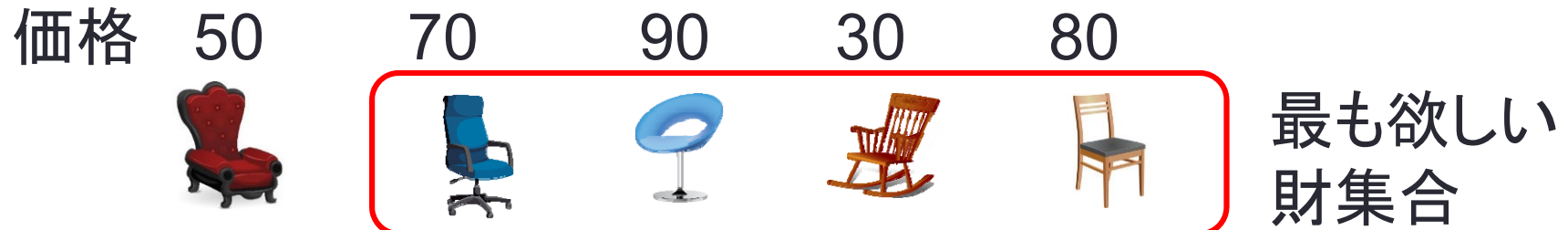


より一般的な評価関数: 粗代替的評価関数

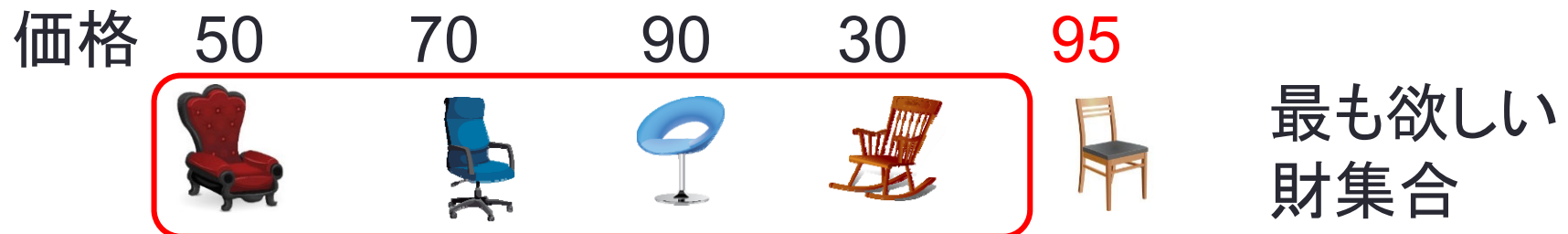
粗代替性 $\equiv$ ある財が値上がりしたら, 他の財の欲しさが高まる

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす [Kelso-Crawford(1982)]



ある財の価格が増加



価格不変の財は引き続き欲しい

より一般的な評価関数: 粗代替的評価関数

粗代替性 $\equiv$ ある財が値上がりしたら, 他の財の欲しさが高まる

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす [Kelso-Crawford(1982)]

$$\begin{aligned} \iff \forall p \in \mathbb{R}^N, \quad q = p + \lambda e_j, \\ \forall X \in D_i(p), \quad \exists Y \in D_i(q) \\ \text{s.t.} \quad X \setminus \{j\} \subseteq Y \end{aligned}$$

$$D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$$

上記の条件は, 以下の(より強く見える)条件と等価

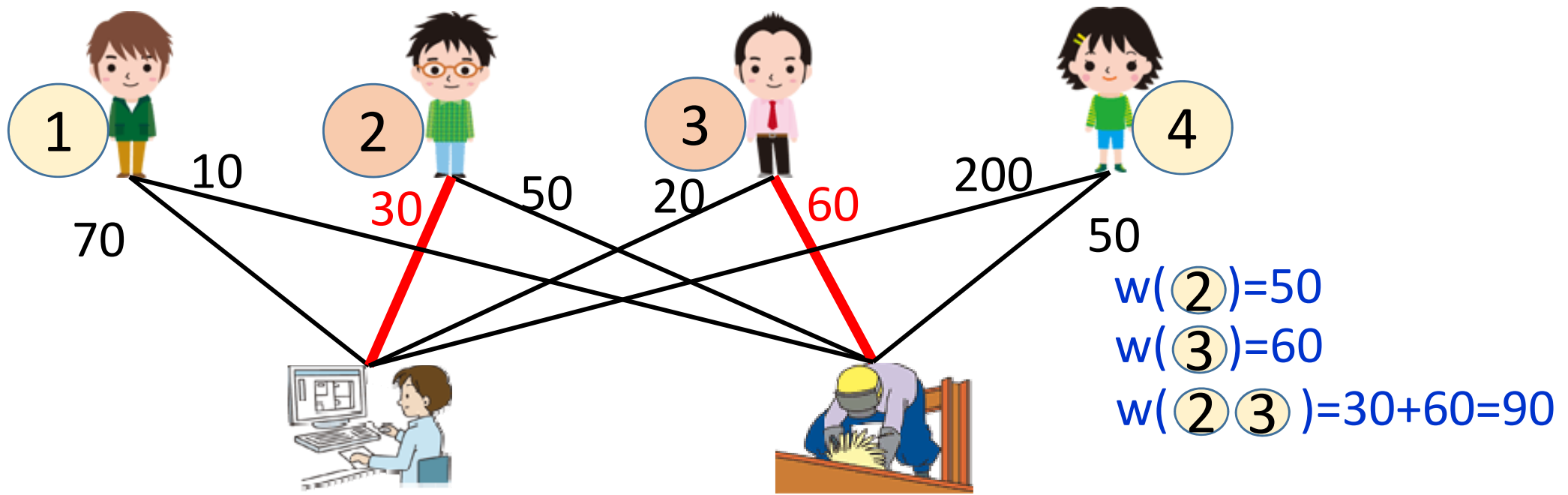
(帰納法で証明可能)

$$\begin{aligned} \iff \forall p, q \in \mathbb{R}^N, \quad p \leq q, \quad \forall X \in D_i(p), \quad \exists Y \in D_i(q) \\ \text{s.t.} \quad \{h \in X \mid q(h) = p(h)\} \subseteq Y \end{aligned}$$

additive, unit-demand, symmetric & concave は粗代替性を満たす

粗代替性を満たす例：割当評価関数

$\{\}$	0	$\{1,4\}$	210	$\{2,3,4\}$	260
$\{1\}$	70	$\{2,3\}$	90	$\{1,2,3,4\}$	260
$\{2\}$	50	$\{2,4\}$	250		
$\{3\}$	60	$\{3,4\}$	260		
$\{4\}$	200	$\{1,2,3\}$	130		
$\{1,2\}$	120	$\{1,2,4\}$	250		
$\{1,3\}$	130	$\{1,3,4\}$	260		



粗代替的評価関数の下での均衡の存在

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす [Kelso-Crawford(1982)]

$$\begin{aligned} \iff \forall p \in \mathbb{R}^N, \quad q = p + \lambda e_j, \\ \forall X \in D_i(p), \quad \exists Y \in D_i(q) \\ \text{s.t.} \quad X \setminus \{j\} \subseteq Y \end{aligned}$$

定理 [Kelso-Crawford(1982)]:

各入札者の評価関数が粗代替性を満たす $\rightarrow$ ワルラス均衡が存在

※1人の評価関数のみ, 粗代替性を満たさない場合でも,
均衡が存在しないことがある

粗代替性を満たす評価関数の例

- 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)

$p = (40, 80, 10, 60, 100)$ のとき $D_i(p) = \{\{1, 3\}, \{1, 3, 5\}\}$
 $\rightarrow q = (60, 80, 10, 60, 100)$ のとき $D_i(q) = \{\{3\}, \{3, 5\}\}$
 よって, $X=\{1, 3\} \rightarrow Y=\{3\}$ を選べば条件を満たす
 $X=\{1, 3, 5\} \rightarrow Y=\{3, 5\}$

- 財集合(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)

$p = (40, 80, 10, 0, 100)$ のとき $D_i(p) = \{\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$
 $\rightarrow q = (40, 80, 40, 0, 100)$ のとき $D_i(q) = \{\{4\}\}$
 よって, $X=\{3\} \rightarrow Y=\{4\}$ を選べば条件を満たす
 $X=\{3, 4\} \rightarrow Y=\{4\}$

代替性をもつ評価関数のクラス

粗代替性より弱い条件により定義されるクラスも存在

ポイント: 財集合の評価値 $\leq$ 個々の評価値の和

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は **劣モジュラ(submodular)**

$\longleftrightarrow$ [限界効用逓減性] $\forall X \subset \forall Y \subseteq N, \forall u \in N \setminus Y,$

$$v_i(X \cup \{u\}) - v_i(X) \geq v_i(Y \cup \{u\}) - v_i(Y)$$

$\longleftrightarrow \forall X, Y \subseteq N, v_i(X) + v_i(Y) \geq v_i(X \cup Y) + v_i(X \cap Y)$

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は **劣加法的(subadditive)**

$\longleftrightarrow \forall X, Y \subseteq N, v_i(X) + v_i(Y) \geq v_i(X \cup Y)$

命題 評価関数に対して, 粗代替性 $\rightarrow$ 劣モジュラ性 $\rightarrow$ 劣加法性

※ 評価関数が劣モジュラであっても, 均衡が存在するとは限らない

粗代替性の特徴付け

粗代替性と等価な性質

粗代替性は他の様々な性質と等価なことが知られている

- 単改良性 (single-improvement condition) [Gul-Stacchetti 1999]
- 無補完性 (no-complementarities) [Gul-Stacchetti 1999]
- $M^{\sharp}$ 凹性 ($M^{\sharp}$ -concavity) [概念は Murota-Shioura 1999.
等価性の証明は Fujishige-Yang 2003]
- 強無補完性 (strong no-complementarities)
[概念は Gul-Stacchetti 1999, 等価性の証明は Murota 2018]

様々な等価な性質を知ること

- 粗代替性の理解が深まる
- 粗代替性に関する様々な定理の証明が可能(容易)になる

単改良性

利得が最大でない $\rightarrow$ 財1個の削除, 追加, または交換により
利得を増やすことが可能

定義: 単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

$$\forall p \in \mathbb{R}^N, \forall X \notin D_i(p),$$

$$\exists Y \subseteq N \text{ such that } v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j > v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$$

$$\& \quad |Y \setminus X| \leq 1, |X \setminus Y| \leq 1$$

定理[Gul-Stacchetti(1999)]:

評価関数 v_i は粗代替性を満たす $\leftrightarrow$ 単改良性を満たす

単改良性のイメージ

定義： 単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

利得が最大でない→財1個の削除, 追加, または交換により
利得を増やすことが可能

価格 50



70



90



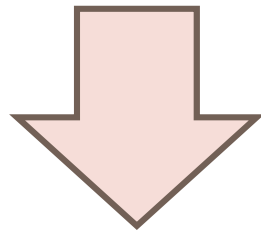
30



80



最も欲しい
財集合ではない



高々1つの財の入れ替えで
利得が増加



財を1つ削除



財を1つ追加



財を1つ交換

単改良性の例

割当評価関数の具体例を使って説明

赤字は価格=(30, 0, 20, 180) のときの利得

{}	0	0	{1,4}	210	0	{2,3,4}	260	60
{1}	70	40	{2,3}	90	70	{1,2,3,4}	260	30
{2}	50	50	{2,4}	250	70			
{3}	60	40	{3,4}	260	60			
{4}	200	20	{1,2,3}	130	80			
{1,2}	120	90	{1,2,4}	250	40			
{1,3}	130	80	{1,3,4}	260	30			

$X=\{1,2,3\}$ は利得80, 最大ではない

→ 3 を削除して, 利得 90に増加

$X=\{3,4\}$ は利得60, 最大ではない

→ 3 を削除, 2 を追加して, 利得 70 に増加

$X=\{3\}$ は利得40, 最大ではない

→ 4 を追加して, 利得 60 に増加

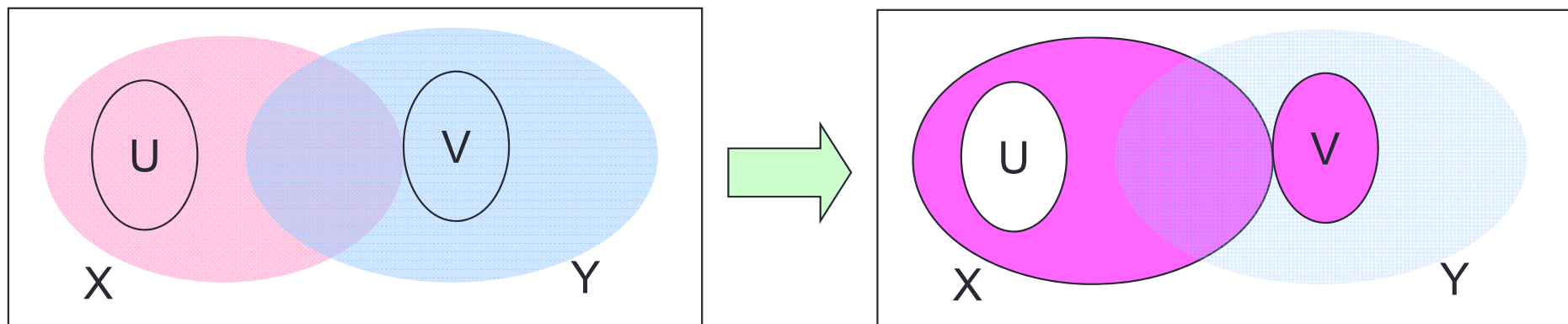
無補完性

財の交換により, 利得最大の財集合から,
別の利得最大の財集合をつくることが可能

定義: 無補完性(no complementarities) [Gul-Stacchetti(1999)]

$$\forall p \in \mathbb{R}^N, \forall X, Y \in D_i(p), \forall U \subseteq X \setminus Y, \exists V \subseteq Y \setminus X$$

such that $X \setminus U \cup V \in D_i(p)$



定理[Gul-Stacchetti(1999)]:

評価関数 v_i は粗代替性を満たす $\iff$ 無補完性を満たす

無補完性の例

割当評価関数の具体例を使って説明

赤字は価格=(30, 0, 10, 160) のときの利得

{}	0	0	{1,4}	210	20	{2,3,4}	260	90
{1}	70	40	{2,3}	90	80	{1,2,3,4}	260	60
{2}	50	50	{2,4}	250	90			
{3}	60	50	{3,4}	260	90			
{4}	200	40	{1,2,3}	130	90			
{1,2}	120	90	{1,2,4}	250	60			
{1,3}	130	90	{1,3,4}	260	60			

$X=\{2,3,4\}$, $Y=\{1,2\}$, $U=\{3\}$ のとき, $V=\{\}$ とすればOK

($\{2,3,4\}-\{3\}+\{\}=\{2,4\}$ は利得最大)

$X=\{1,2\}$, $Y=\{3,4\}$, $U=\{1\}$ のとき, $V=\{4\}$ とすればOK

($\{1,2\}-\{1\}+\{4\}=\{2,4\}$ は利得最大)

$X=\{1,2\}$, $Y=\{3,4\}$, $U=\{1,2\}$ のとき, $V=\{3,4\}$ とすればOK

($\{1,2\}-\{1,2\}+\{3,4\}=\{3,4\}$ は利得最大)

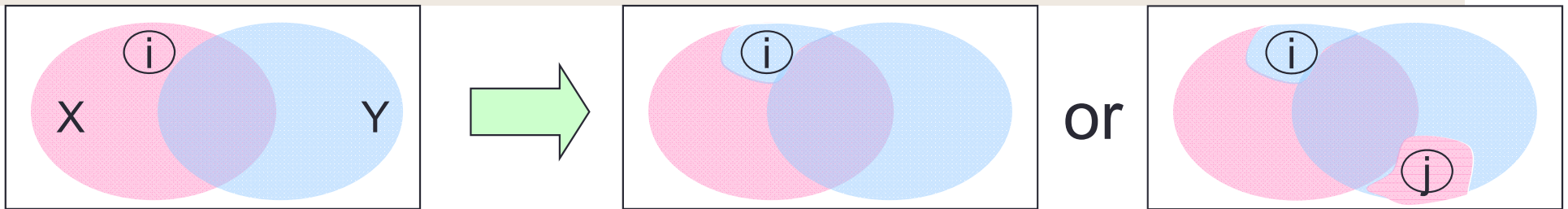
M[♮]凹性

定義: **M[♮]凹性(M[♮]-concavity)** [Murota-Shioura(1999)]

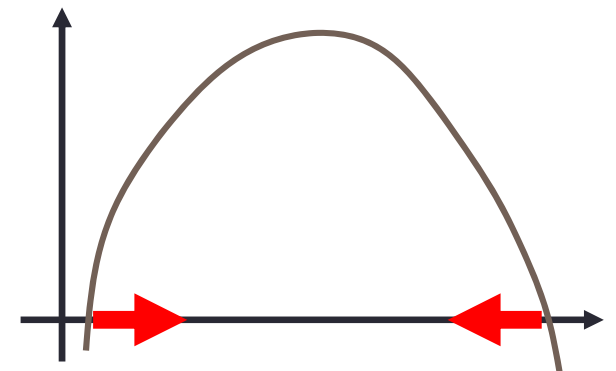
$\forall X, Y \subseteq N, \forall i \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

(i) $v(X) + v(Y) \leq v(X - i) + v(Y + i)$

(ii) $\exists j \in Y \setminus X: v(X) + v(Y) \leq v(X - i + j) + v(Y + i - j)$



- ・ 離散的な凹関数
- ・ 価格ベクトルを使わない性質



定理[Fujishige-Yang (2003)]:

評価関数 f_i は**粗代替性**を満たす $\iff$ **M[♮]凹性**を満たす

M凹性の例

$\{\}$	0	$\{1,4\}$	210	$\{2,3,4\}$	260
$\{1\}$	70	$\{2,3\}$	90	$\{1,2,3,4\}$	260
$\{2\}$	50	$\{2,4\}$	250		
$\{3\}$	60	$\{3,4\}$	260		
$\{4\}$	200	$\{1,2,3\}$	130		
$\{1,2\}$	120	$\{1,2,4\}$	250		
$\{1,3\}$	130	$\{1,3,4\}$	260		

$X=\{1,2\}$, $Y=\{3,4\}$, $i=1$ のとき, $v(X)+v(Y)=120+260=380$

- $v(X-i)+v(Y+i)=v(\{2\})+v(\{1,3,4\})=50+260=310<380$ ✕
- $j=3$ とすると $v(\{2,3\})+v(\{1,4\})=90+210=300<380$ ✕
- $j=4$ とすると $v(\{2,4\})+v(\{1,3\})=250+130=380$ ○

$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{1,4\}$, $i=3$ のとき, $v(X)+v(Y)=130+210=370$

- $v(X-i)+v(Y+i)=v(\{1,2\})+v(\{1,3,4\})=120+260=380\geq 370$ ○
- $j=4$ とすると $v(\{1,2,4\})+v(\{1,3\})=250+130=380\geq 370$ ○

強無補完性

定義: **M_≧凹性(M_≧-concavity)** [Murota-Shioura(1999)]

$\forall X, Y \subseteq N, \forall i \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

(i) $v(\textcolor{red}{X}) + v(\textcolor{blue}{Y}) \leq v(\textcolor{red}{X} - i) + v(\textcolor{blue}{Y} + i)$

(ii) $\exists j \in Y \setminus X: v(\textcolor{red}{X}) + v(\textcolor{blue}{Y}) \leq v(\textcolor{red}{X} - i + j) + v(\textcolor{blue}{Y} + i - j)$

定義: **強無補完性(M_≧-concavity)** [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall X, Y \subseteq N, \forall U \in X \setminus Y$,

$\exists V \in Y \setminus X: v(\textcolor{red}{X}) + v(\textcolor{blue}{Y}) \leq v(\textcolor{red}{X} \setminus U \cup V) + v(\textcolor{blue}{Y} \cup U \setminus V)$

M_≧凹性との関係:

強無補完性において $U=\{i\}$ とおく

$V=\{j\}$ の場合が (i) に対応, $|V|=1$ の場合が(ii)に対応

定理[Murota (2018)]:

評価関数 f_i は**粗代替性**を満たす $\iff$ **強無補完性**を満たす

粗代替性と他の性質との 等価性の証明

粗代替性との等価性の証明

評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,

粗代替性 $\iff$ 単改良性 $\iff$ 無補完性 $\iff$ $M_{\frac{1}{2}}$ 凹性 $\iff$ 強無補完性

数学的には等価な条件ではあるが, (見かけ上の) 強さが異なる

$\rightarrow$ ある主張を示す際の「使いやすさ」が異なる

実際, 「 $M_{\frac{1}{2}}$ 凹性 $\rightarrow$ 単改良性」「 $M_{\frac{1}{2}}$ 凹性 $\rightarrow$ 粗代替性」

「単改良性 $\rightarrow$ 粗代替性」などは(比較的)証明しやすいが,
逆の証明は難しい

M_H凹性→粗代替性の証明

簡単のために
 $p(X) = \sum_{j \in X} p_j$
 と書く

$p \in \mathbb{R}^N$, $q = p + \lambda e_j$ ($\lambda > 0, j \in N$), $X \in D_i(p)$ とする.

要素数 $|X \setminus Y|$ 最小の $Y \in D_i(q)$ を選ぶ.

$X \setminus \{j\} \subseteq Y$ を満たすことを背理法で証明する.

$\exists k \in X \setminus \{j\}$ s.t. $k \notin Y$ と仮定し, 矛盾を導く.

M_H凹性の不等式より (i) $v(X) + v(Y) \leq v(X - k) + v(Y + k)$

(ii) $\exists h \in Y \setminus X: v(X) + v(Y) \leq v(X - k + h) + v(Y + k - h)$

以下では (ii) の場合のみ考える. (i) の場合の証明も同様.

$$[v(X - k + h) - p(X - k + h)] + [v(Y + k - h) - q(Y + k - h)] \\ - [v(X) - p(X)] + [v(Y) - q(Y)] \quad \textcircled{1}$$

$$\geq p(X) - p(X - k + h) + q(Y) - q(Y + k - h) \\ = p_k - p_h - q_k + q_h \geq 0 \quad (\because p_k = q_k, p_h \leq q_h)$$

一方, $X \in D_i(p)$ と $Y \in D_i(q)$ より,

$$v(X - k + h) - p(X - k + h) \leq v(X) - p(X) \quad \textcircled{2}$$

$$v(Y + k - h) - q(Y + k - h) \leq v(Y) - q(Y) \quad \textcircled{3}$$

したがって, 上の①, ②, ③はすべて等号で成立. とくに, $Y' = Y + k - h \in D_i(q)$

しかし, $|X \setminus Y'| = |X \setminus Y| - 1$ となり, X の選び方に矛盾 ■

M₁凹性→単改良性の証明

$p \in \mathbb{R}^N$, $X \subseteq N$, $X \notin D_i(p)$ とする.

$v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j > v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$ & $|Y \setminus X| \leq 1, |X \setminus Y| \leq 1$

なる Y が存在することを示す.

要素数 $|X \setminus Z| + |Z \setminus X|$ 最小の $Z \in D_i(p)$ を選ぶ.

$X \notin D_i(p)$ なので $X \neq Z$. よって $X \setminus Z \neq \emptyset$ または $Z \setminus X \neq \emptyset$

(Case 1) $X \setminus Z \neq \emptyset$

$u \in X \setminus Z$ とすると, M₁凹性より $v_i(X) + v_i(Z) \leq v_i(X - u) + v_i(Z + u)$

または $\exists v \in Z \setminus X$ s.t. $v_i(X) + v_i(Z) \leq v_i(X - u + v) + v_i(Z + u - v)$

後者の場合を考える(前者の場合も同様). $Y = X - u + v$ とおく.

$p(X) + p(Z) = p(Y) + p(Z + u - v)$ より,

$v_i(X) - p(X) + v_i(Z) - p(Z) \leq v_i(Y) - p(Y) + v_i(Z + u - v) - p(Z + u - v)$ ①

$|X \setminus (Z + u - v)| + |(Z + u - v) \setminus X| < |X \setminus Z| + |Z \setminus X|$ より, $Z + u - v \notin D_i(p)$

$\therefore v_i(Z + u - v) - p(Z + u - v) < v_i(Z) - p(Z)$

式①と合わせて, $v_i(X) - p(X) < v_i(Y) - p(Y)$

$|Y \setminus X| = 1, |X \setminus Y| = 1$ なので, Y は所望の条件を満たす.

(Case 2) $Y \setminus X \neq \emptyset$ はCase 1と同様に証明できるので省略



レポート問題

問1: 財集合(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100)の中の一番良い財にのみ依存する, 単一需要評価関数 $v(X)$ を考える. 価格ベクトルを $p=(0,30,0,0,55)$ とする.

- (1) $X=\{1,2,3\}$ が利得 $v(X)-p(X)$ を最大にする財集合であることを示せ.
- (2) 財2の価格を $\lambda \geq 0$ だけ増やしたときの価格ベクトルを q とする. 任意の λ に対し, 利得 $v(Y)-q(Y)$ を最大にする財集合 Y で $X-\{2\} \subseteq Y$ を満たすものが存在することを証明せよ.
- (3) 財1の価格を $\lambda \geq 0$ だけ増やしたときの価格ベクトルを q とする. 任意の λ に対し, 利得 $v(Y)-q(Y)$ を最大にする財集合 Y で $X-\{1\} \subseteq Y$ を満たすものが存在することを証明せよ.

※証明が難しい場合は, 答えだけでも書いてください.

レポート問題

問2: 対称凹評価関数 $v(X) = \varphi(|X|)$ (φ は凹関数) がM_H凹性を満たすことを証明せよ. なお, φ に関する次の不等式を使ってよい:
 $x < y$ ならば $\varphi(x) + \varphi(y) \leq \varphi(x+1) + \varphi(y-1)$

問3: 単一需要評価関数 $v_i(X) = \max_{j \in X} v(i, j)$ ($v(i, j)$ は非負)

に対し, 下記の条件が成り立つことを証明せよ:

要素数の等しい財集合 X, Y および任意の $j \in X-Y$ に対し, ある $k \in Y-X$ が存在して,

$$v_i(X) + v_i(Y) \leq v_i(X - j + k) + v_i(Y + j - k)$$