経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと離散最適化

第10回　評価関数の粗代替性

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

財集合の評価関数

- 財の評価

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数（評価関数, valuation function）

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少 : $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leqq v_i(Y)$

ワルラス均衡

- 定義：需要集合$D_i(p) \subseteq 2^N$
  - $D_i(p) = \arg\max\{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義：価格ベクトルp^*と財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$の組はワルラス均衡

$$\Leftrightarrow X_i \in D_i(p^*)\ (i = 1, \ldots, m), \quad p(j) = 0\ (\forall j \in X_0)$$

価格p^*の下で皆が最良の財集合

例：$p = (60,60,60,60,60)$のとき

- Aさん：$D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
- Bさん：$D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
- Cさん：$D_C(p) = \{$財の数2または3$\}$

➔ p と配分 $\{\emptyset, \{1\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$ はワルラス均衡

- ワルラス均衡は，一般には存在するとは限らない．
- どのような評価関数ならば，均衡の存在を保証できるか？

評価関数の粗代替性

代替性と補完性

- 2つの財の関係
  - 代替的： 2つの財が類似，一方を他方で置き換え可能
    どちらかがあれば嬉しい
    両方あっても，あまり嬉しくない
    - 具体例：紅茶とコーヒー，2種類のいす，レタスとキャベツ
  - 補完的： 2つの財の性能･能力が補完的
    両方あれば嬉しい，片方だけでは不十分
    - 具体例：食卓と椅子，プリンタとインク，ゲーム機とソフト
- 財の集合が代替的（補完的）
  ←→集合内の任意の2つの財が代替的（補完的）

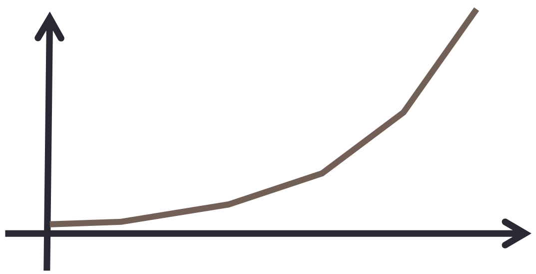
この講義：代替的な財（代替財）を主に扱う

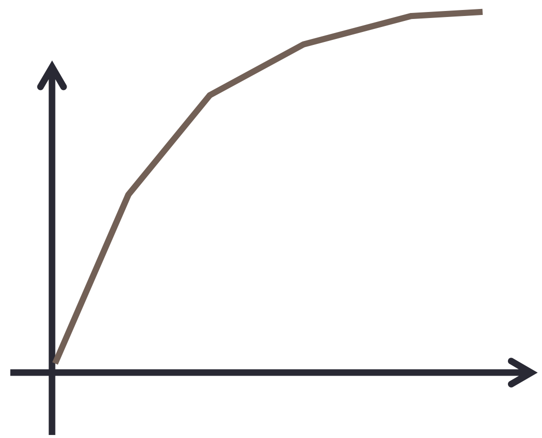
代替財に対応する評価関数の例

ポイント: 財集合の評価値≦個々の評価値の和

- 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)
- 財集合(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100)の中の
  一番良い財にのみ依存 (unit-demand)
  {①, ②, ③}➔評価値70, {③, ④, ⑤}➔評価値100
- 財の数に依存，かつ上に凸 (symmetric & concave)
  (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

※ symmetric & convex ならば補完的





より一般的な評価関数：粗代替的評価関数

粗代替性≒ある財が値上がりしたら，他の財の欲しさが高まる

定義： 評価関数 $v_i \colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす[Kelso-Crawford(1982)]

⟺

価格　50　70　90　30　80

最も欲しい財集合

ある財の価格が増加

価格　50　70　90　30　95

最も欲しい財集合

価格不変の財は引き続き欲しい

より一般的な評価関数：粗代替的評価関数

粗代替性≒ある財が値上がりしたら，他の財の欲しさが高まる

定義： 評価関数 $v_i: 2^N \to \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす[Kelso-Crawford(1982)]

$$D_i(p) = \arg\max\{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$$

⇔ $\forall p \in \mathbb{R}^N,\ q = p + \lambda e_j,$

$\forall X \in D_i(p),\ \exists Y \in D_i(q)$

s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

上記の条件は，以下の（より強く見える）条件と等価

（帰納法で証明可能）

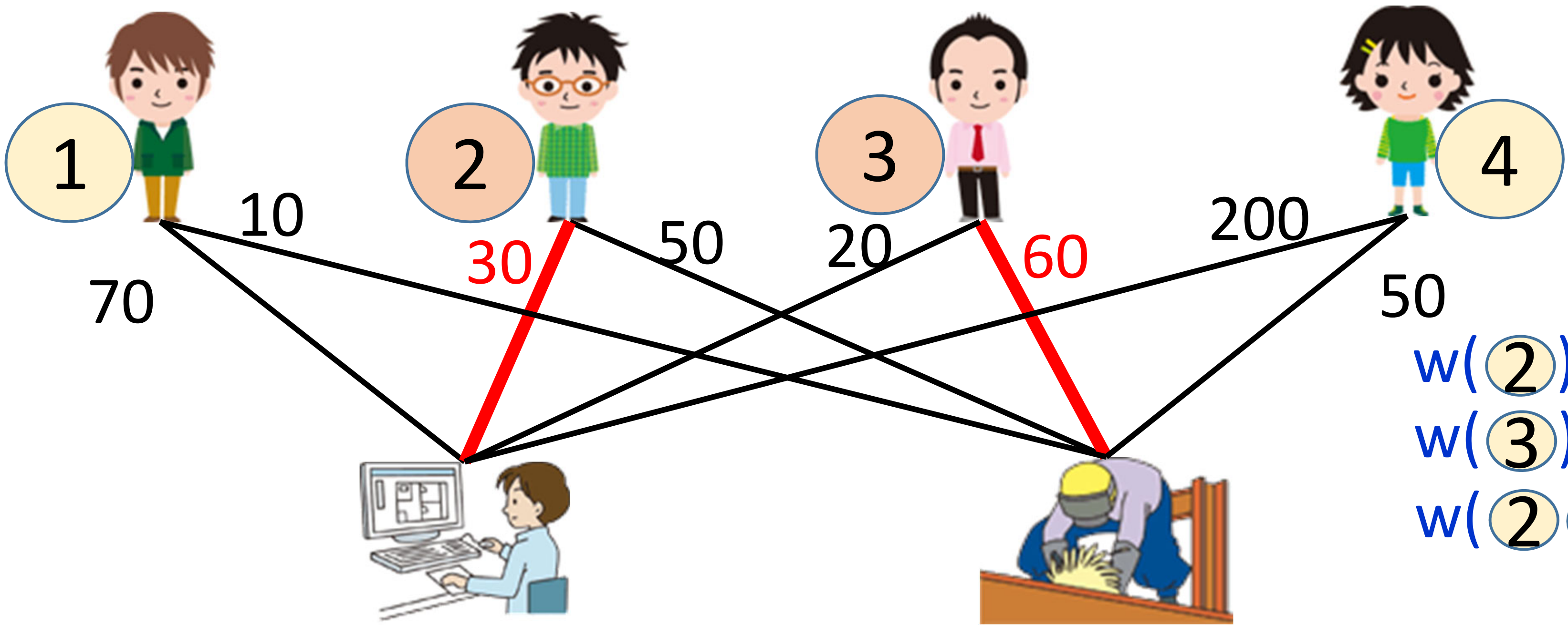
⇔ $\forall p, q \in \mathbb{R}^N,\ p \le q,\ \forall X \in D_i(p),\ \exists Y \in D_i(q)$

s.t. $\{h \in X \mid q(h) = p(h)\} \subseteq Y$

additive, unit-demand, symmetric & concave は粗代替性を満たす

粗代替性を満たす例：割当評価関数

{}	0	{1,4}	210	{2,3,4}	260
{1}	70	{2,3}	90	{1,2,3,4}	260
{2}	50	{2,4}	250		
{3}	60	{3,4}	260		
{4}	200	{1,2,3}	130		
{1,2}	120	{1,2,4}	250		
{1,3}	130	{1,3,4}	260		



w(2)=50
w(3)=60
w(2 3)=30+60=90

粗代替的評価関数の下での均衡の存在

定義： 評価関数 $v_i: 2^N \to \mathbb{Z}_+$は
粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす[Kelso-Crawford(1982)]

$\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}^N,\ q = p + \lambda e_j,$

$\forall X \in D_i(p),\ \exists Y \in D_i(q)$

s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

> **定理**[Kelso-Crawford(1982)]：
> 各入札者の評価関数が粗代替性を満たす ➔ ワルラス均衡が存在

※1人の評価関数のみ，粗代替性を満たさない場合でも，
均衡が存在しないことがある

粗代替性を満たす評価関数の例

- 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)

$p = (40{,}80{,}10{,}60{,}100)$ のとき $D_i(p) = \{\{1{,}3\},\{1{,}3{,}5\}\}$

➔ $q = (60{,}80{,}10{,}60{,}100)$ のとき $D_i(q) = \{\{3\},\{3{,}5\}\}$

よって, X={1,3} → Y={3} を選べば条件を満たす

X={1,3,5} → Y={3,5}

- 財集合(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100)の中の一番良い財にのみ依存 (unit-demand)

$p = (40{,}80{,}10{,}0{,}100)$ のとき $D_i(p) = \{\{3\},\{4\},\{3{,}4\}\}$

➔ $q = (40{,}80{,}40{,}0{,}100)$ のとき $D_i(q) = \{\{4\}\}$

よって, X={3} → Y={4} を選べば条件を満たす

X={3,4} → Y={4}

代替性をもつ評価関数のクラス

粗代替性より弱い条件により定義されるクラスも存在

ポイント：財集合の評価値≦個々の評価値の和

定義：評価関数 $v_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$ は 劣モジュラ(submodular)

⇔ [限界効用逓減性] $\forall X \subset \forall Y \subseteq N, \forall u \in N \setminus Y,$

$$v_i(X \cup \{u\}) - v_i(X) \geq v_i(Y \cup \{u\}) - v_i(Y)$$

⇔ $\forall X, Y \subseteq N,\ v_i(X) + v_i(Y) \geq v_i(X \cup Y) + v_i(X \cap Y)$

定義：評価関数 $v_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$ は 劣加法的(subadditive)

⇔ $\forall X, Y \subseteq N,\ v_i(X) + v_i(Y) \geq v_i(X \cup Y)$

命題 評価関数に対して，　粗代替性 ➔ 劣モジュラ性 ➔ 劣加法性

※ 評価関数が劣モジュラであっても，均衡が存在するとは限らない

粗代替性の特徴付け

粗代替性と等価な性質

粗代替性は他の様々な性質と等価なことが知られている

- 単改良性 (single-improvement condition) [Gul-Stacchetti1999]
- 無補完性 (no-complementarities) [Gul-Stacchetti1999]
- M♮凹性 (M♮-concavity) [概念は Murota-Shioura 1999.
  等価性の証明は Fujishige-Yang 2003]
- 強無補完性 (strong no-complementarities)
  [概念は Gul-Stacchetti1999，等価性の証明は Murota 2018]

様々な等価な性質を知ることで

- 粗代替性の理解が深まる
- 粗代替性に関する様々な定理の証明が可能（容易）になる

単改良性

利得が最大でない➔財1個の削除，追加，または交換により
利得を増やすことが可能

定義： 単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall p \in \mathbb{R}^N,\ \forall X \notin D_i(p),$

$\exists Y \subseteq N$ such that $v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j > v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$

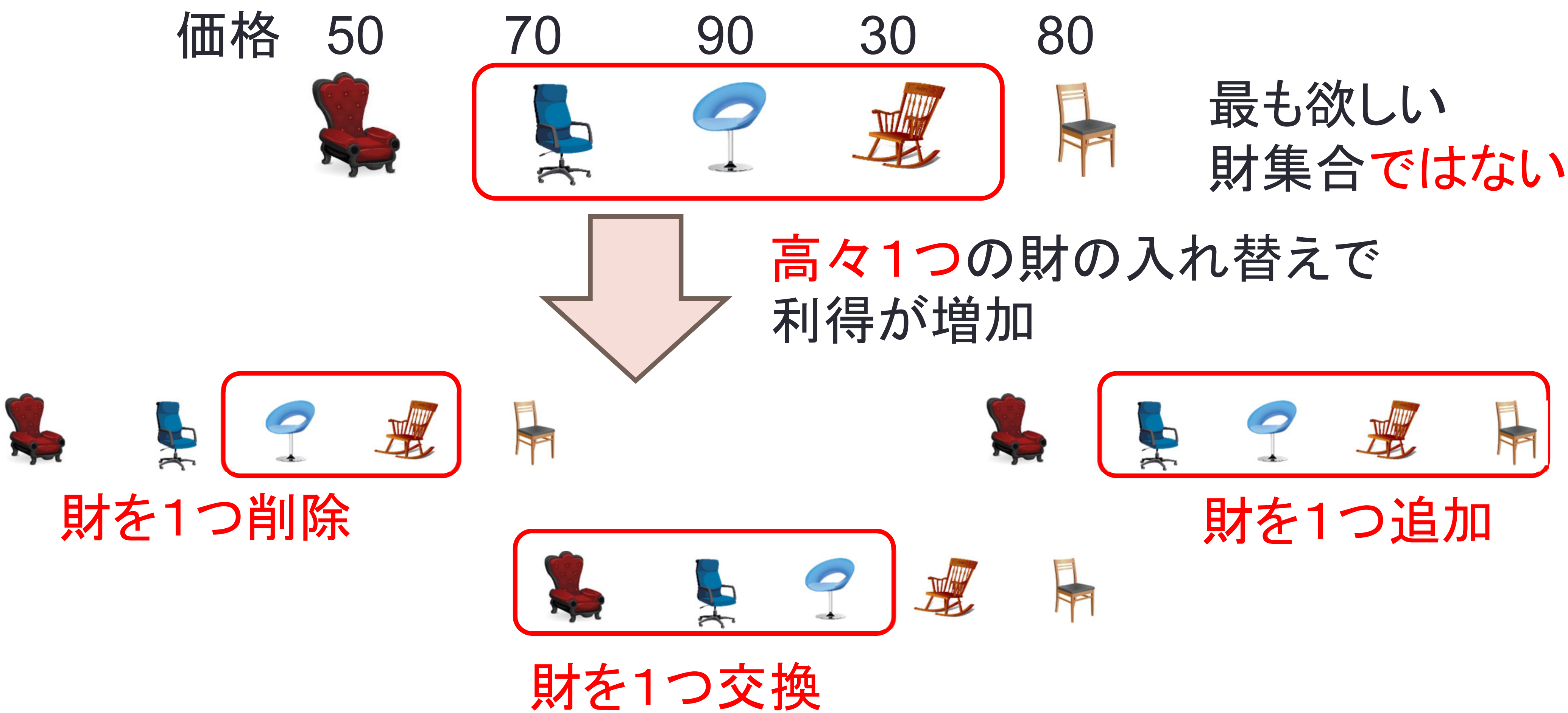
& $\quad |Y \setminus X| \leq 1,\ |X \setminus Y| \leq 1$

定理[Gul-Stacchetti(1999)]：
評価関数 v_i は粗代替性を満たす⇔単改良性を満たす

単改良性のイメージ

定義：　単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

利得が最大でない➔財1個の削除，追加，または交換により
利得を増やすことが可能



単改良性の例

割当評価関数の具体例を使って説明

赤字は価格=(30, 0, 20, 180) のときの利得

{}	0	0	{1,4}	210	0	{2,3,4}	260	60
{1}	70	40	{2,3}	90	70	{1,2,3,4}	260	30
{2}	50	50	{2,4}	250	70			
{3}	60	40	{3,4}	260	60			
{4}	200	20	{1,2,3}	130	80			
{1,2}	120	**90**	{1,2,4}	250	40			
{1,3}	130	80	{1,3,4}	260	30			

X={1,2,3} は利得80, 最大ではない

➔ 3 を削除して，利得 90に増加

X={3,4}は利得60，最大ではない

➔ 3 を削除，2 を追加して，利得 70 に増加

X={3}は利得40，最大ではない

➔ 4 を追加して，利得 60 に増加

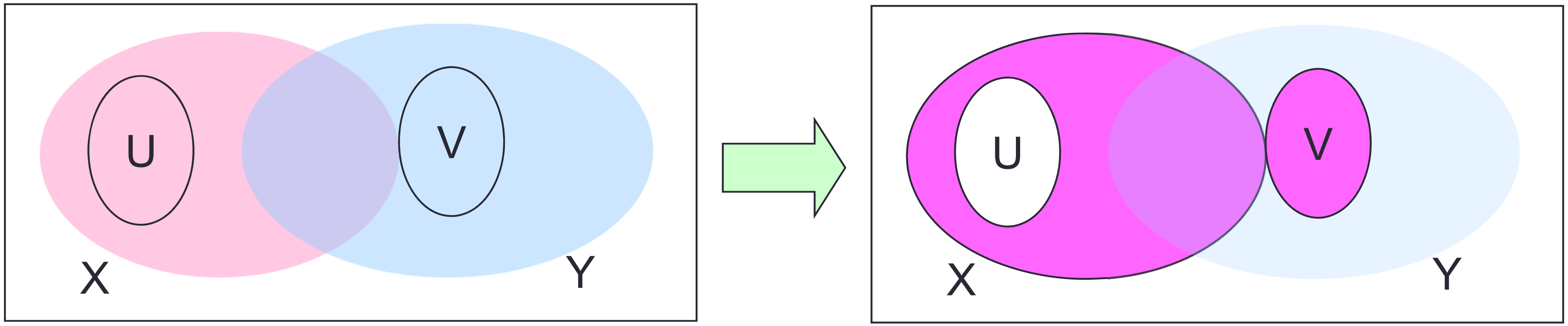
無補完性

財の交換により，利得最大の財集合から，
別の利得最大の財集合をつくることが可能

定義： 無補完性(no complementarities) [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall p \in \mathbb{R}^N,\ \forall X, Y \in D_i(p), \forall U \subseteq X \setminus Y, \exists V \subseteq Y \setminus X$

such that $X \setminus U \cup V \in D_i(p)$



定理[Gul-Stacchetti(1999)]：
評価関数 v_i は粗代替性を満たす←→無補完性を満たす

無補完性の例

割当評価関数の具体例を使って説明

赤字は価格=(30, 0, 10, 160) のときの利得

{}	0	0	{1,4}	210	20	{2,3,4}	260	90
{1}	70	40	{2,3}	90	80	{1,2,3,4}	260	60
{2}	50	50	{2,4}	250	90			
{3}	60	50	{3,4}	260	90			
{4}	200	40	{1,2,3}	130	90			
{1,2}	120	90	{1,2,4}	250	60			
{1,3}	130	90	{1,3,4}	260	60			

X={2,3,4}, Y={1,2}, U={3} のとき，V={} とすればOK

（{2,3,4}-{3}+{}={2,4} は利得最大）

X={1,2}, Y={3,4}, U={1} のとき，V={4} とすればOK

（{1,2}-{1}+{4}={2,4} は利得最大）

X={1,2}, Y={3,4}, U={1,2} のとき，V={3,4} とすればOK

（{1,2}-{1,2}+{3,4}={3,4} は利得最大）

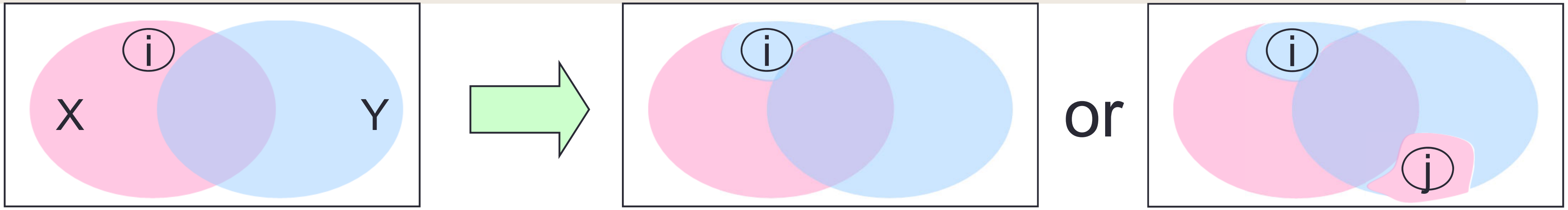
M♮凹性

定義： M♮凹性(M♮-concavity) [Murota-Shioura(1999)]

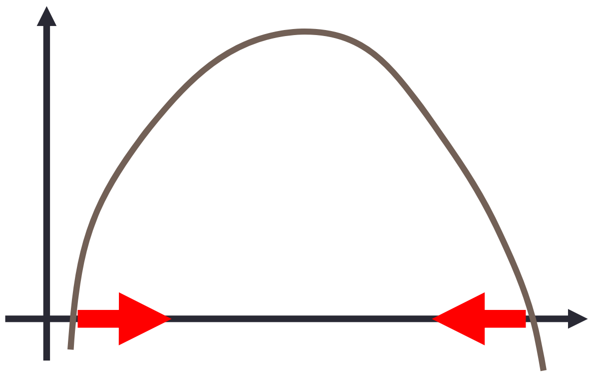
$\forall X, Y \subseteq N, \forall i \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

(i) $v(X) + v(Y) \leq v(X - i) + v(Y + i)$

(ii) $\exists j \in Y \setminus X$: $v(X) + v(Y) \leq v(X - i + j) + v(Y + i - j)$



- 離散的な凹関数
- 価格ベクトルを使わない性質



定理[Fujishige-Yang (2003)]：

評価関数 f_i は粗代替性を満たす←→M♮凹性を満たす

M♮凹性の例

{}	0	{1,4}	210	{2,3,4}	260
{1}	70	{2,3}	90	{1,2,3,4}	260
{2}	50	{2,4}	250		
{3}	60	{3,4}	260		
{4}	200	{1,2,3}	130		
{1,2}	120	{1,2,4}	250		
{1,3}	130	{1,3,4}	260		

X={1,2}, Y={3,4}, i=1 のとき， v(X)+v(Y)=120+260=380
- v(X-i)+v(Y+i)=v({2})+v({1,3,4})=50+260=310<380 ×
- j = 3 とすると v({2,3})+v({1,4})=90+210=300<380 ×
- j = 4 とすると v({2,4})+v({1,3})=250+130=380 ○

X={1,2,3}, Y={1,4}, i=3 のとき， v(X)+v(Y)=130+210=370
- v(X-i)+v(Y+i)=v({1,2})+v({1,3,4})=120+260=380≧370 ○
- j = 4 とすると v({1,2,4})+v({1,3})=250+130=380≧370 ○

強無補完性

定義： M♮凹性(M♮-concavity) [Murota-Shioura(1999)]

$\forall X, Y \subseteq N, \forall i \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

(i) $v(X) + v(Y) \leq v(X - i) + v(Y + i)$

(ii) $\exists j \in Y \setminus X$: $v(X) + v(Y) \leq v(X - i + j) + v(Y + i - j)$

定義： 強無補完性(M♮-concavity) [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall X, Y \subseteq N, \forall U \in X \setminus Y$,

$\exists V \in Y \setminus X$: $v(X) + v(Y) \leq v(X \setminus U \cup V) + v(Y \cup U \setminus V)$

M♮凹性との関係：

強無補完性において U={i} とおく

V={} の場合が (i) に対応，|V|=1 の場合が(ii)に対応

定理[Murota (2018)]：

評価関数 f_i は**粗代替性**を満たす←→**強無補完性**を満たす

粗代替性と他の性質との等価性の証明

粗代替性との等価性の証明

評価関数 $v_i: 2^N \to \mathbb{R}$ に対し,
粗代替性🡸🡺単改良性🡸🡺無補完性🡸🡺M♮凹性🡸🡺強無補完性

数学的には等価な条件ではあるが，（見かけ上の）強さが異なる
🡺ある主張を示す際の「使いやすさ」が異なる

実際，「M♮凹性🡺単改良性」「M♮凹性🡺粗代替性」
「単改良性🡺粗代替性」などは（比較的）証明しやすいが，
逆の証明は難しい

M♮凹性➔粗代替性の証明

簡単のために
$p(X) = \sum_{j \in X} p_j$
と書く

$p \in \mathbb{R}^N$, $q = p + \lambda e_j$ $(\lambda > 0, j \in N)$, $X \in D_i(p)$ とする.
要素数$|X \setminus Y|$最小の$Y \in D_i(q)$を選ぶ.
$X \setminus \{j\} \subseteq Y$ を満たすことを背理法で証明する.
$\exists k \in X \setminus \{j\}$ s.t. $k \notin Y$ と仮定し，矛盾を導く.
M♮凹性の不等式より (i) $v(X) + v(Y) \leq v(X-k) + v(Y+k)$
(ii) $\exists h \in Y \setminus X$: $v(X) + v(Y) \leq v(X-k+h) + v(Y+k-h)$
以下では (ii) の場合のみ考える.（i)の場合の証明も同様.

$$[v(X-k+h) - p(X-k+h)] + [v(Y+k-h) - q(Y+k-h)]$$
$$-[v(X) - p(X)] + [v(Y) - q(Y)] \text{ ①}$$
$$\geq p(X) - p(X-k+h) + q(Y) - q(Y+k-h)$$
$$= p_k - p_h - q_k + q_h \geq 0 \quad (\because p_k = q_k,\ p_h \leq q_h)$$

一方，$X \in D_i(p)$ と $Y \in D_i(q)$ より，

$$v(X-k+h) - p(X-k+h) \leq v(X) - p(X) \text{ ②}$$
$$v(Y+k-h) - q(Y+k-h) \leq v(Y) - q(Y) \text{ ③}$$

したがって，上の①，②，③はすべて等号で成立．とくに，$Y' = Y + k - h \in D_i(q)$
しかし，$|X \setminus Y'| = |X \setminus Y| - 1$ となり，X の選び方に矛盾 ■

M♮凹性➔単改良性の証明

$p \in \mathbb{R}^N$, $X \subseteq N, X \notin D_i(p)$ とする.
$v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j > v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$ & $|Y \setminus X| \leq 1, |X \setminus Y| \leq 1$
なる Y が存在することを示す.
要素数$|X \setminus Z| + |Z \setminus X|$最小の $Z \in D_i(p)$ を選ぶ.
$X \notin D_i(p)$ なので $X \neq Z$. よって $X \setminus Z \neq \emptyset$または $Z \setminus X \neq \emptyset$
(Case 1) $X \setminus Z \neq \emptyset$
$u \in X \setminus Z$ とすると, M♮凹性より$v_i(X) + v_i(Z) \leq v_i(X - u) + v_i(Z + u)$
または $\exists v \in Z \setminus X$　s.t.　$v_i(X) + v_i(Z) \leq v_i(X - u + v) + v_i(Z + u - v)$
後者の場合を考える（前者の場合も同様）. $Y = X - u + v$ とおく.
$p(X) + p\ (Z) = p(Y) + p(Z + u - v)$ より,
$v_i(X) - p(X) + v_i(Z) - p(Z) \leq v_i(Y) - p(Y) + v_i(Z + u - v) - p(Z + u - v)$ ①
$|X \setminus (Z + u - v)| + |(Z + u - v) \setminus X| < |X \setminus Z| + |Z \setminus X|$より, $Z + u - v \notin D_i(p)$
$\therefore v_i(Z + u - v) - p(Z + u - v) < v_i(Z) - p(Z)$
式①と合わせて, $v_i(X) - p(X) < v_i(Y) - p(Y)$
$|Y \setminus X| = 1, |X \setminus Y| = 1$ なので, Y は所望の条件を満たす.

(Case 2) $Y \setminus X \neq \emptyset$ はCase 1と同様に証明できるので省略　■

レポート問題

問1: 財集合(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) の中の
一番良い財にのみ依存する，単一需要評価関数 v(X) を考える.
価格ベクトルを p=(0,30,0,0,45)とする.

(1) X={1,2,3} が利得v(X)-p(X)を最大にする財集合であることを示せ.

(2) 財2の価格をλ≧0だけ増やしたときの価格ベクトルを q とする.
任意のλに対し，利得v(Y)-q(Y)を最大にする財集合Yで
X-{2}⊆Y を満たすものが存在することを証明せよ.

(3) 財1の価格をλ≧0だけ増やしたときの価格ベクトルを q とする.
任意のλに対し，利得v(Y)-q(Y)を最大にする財集合Yで
X-{1}⊆Y を満たすものが存在することを証明せよ.

※証明が難しい場合は，答えだけでも書いてください.

レポート問題

問2: 対称凹評価関数 $v(X)=\varphi(|X|)$ （ φ は凹関数）がM♮凹性を満たすことを証明せよ. なお, φ に関する次の不等式を使ってよい:
$x<y$ ならば $\varphi(x)+\varphi(y)\leq\varphi(x+1)+\varphi(y-1)$

問3: 単一需要評価関数 $v_i(X)=\max_{j\in X} v(i,j)$ （ $v(i,j)$ は非負）に対し, 下記の条件が成り立つことを証明せよ:
要素数の等しい財集合 X, Y および任意の j∈X-Y に対し, ある k∈Y-X が存在して,

$$v_i(X)+v_i(Y)\leq v_i(X-j+k)+v_i(Y+j-k)$$