経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと
離散最適化

第8回　均衡価格を厳密に計算する
アルゴリズム

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡を厳密に計算する

- 入札者の評価値の情報を陽に使わず，均衡（価格）を厳密に計算
- 使える情報：
  価格 (p(1), p(2),…,p(n)) を入札者に提示
  → 最も欲しい財（v(i,j)-p(j)≧0 かつ v(i,j)-p(j)最大の財）を全て答える

仮定：評価値 v(i,j) はすべて整数

- 計算の方針
  - 現在の価格ベクトルが均衡か否かを判定
    - 最大マッチング問題を利用
  - 均衡価格でない → 価格を更新
    - 最大マッチング問題の結果を利用，価格を更新する財を選ぶ

均衡条件の書き換え（その1）

定義: 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は **均衡価格**

⇔ 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在

ただし $q(i) \equiv \max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）
➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$

② 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha(i) = 0$）➔ $q(i) \le 0$

③ 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

マッチングを用いて，均衡条件の書き換えが可能

均衡条件の書き換え(その2)

定義: 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格

⟺ 頂点集合 B∪N, 枝集合 E の二部グラフにおいて,
頂点集合 B'∪N' をカバーするマッチングが存在

$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\},\quad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$$
$$E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \leq v(i,j) - p(j) = q(i)\}$$

⇕

・B' をカバーするマッチングが存在
・N' をカバーするマッチングが存在

⇕ (ホールの定理)

- 任意のX⊆B'に対し, Xの隣接頂点の数 ≧ |X|
  (X 内の入札者が欲しい財の数 ≧ |X|)
- 任意のY⊆N'に対し, Yの隣接頂点の数 ≧ |Y|
  (Y 内の財を欲しい入札者の数 ≧ |Y|)

均衡条件の書き換え（その3）

入札者に関する条件 ➔ 財に関する条件に書き換え

定義：$D_i(p)$ ≡ 価格 p の下で入札者 i が最も欲しい財の集合

命題：　以下の3条件は等価：
(i)　B′ をカバーするマッチング M⊆E が存在
(ii) 任意のX⊆B′に対し，　X 内の入札者が欲しい財の数 ≧ |X|
(iii) 任意の Z⊆N に対し，|Z| ≧ ($D_i(p)$⊆ Z を満たす入札者 i∈B′ の数)

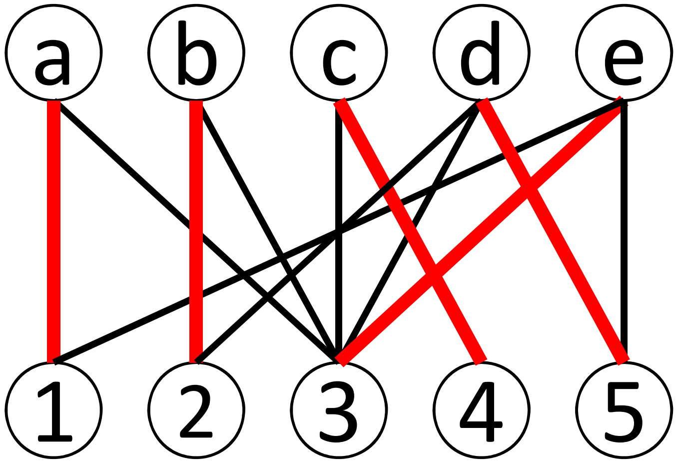
(iii) の条件の意味：
B’ 内の入札者のうち，Z の中の財のみ欲しい人の集合を
Y とすると |Y| ≦ |Z|
（これが成り立たないと，
Y の入札者全員に欲しい財の割り当てが出来ない）

このことより，(i) ➔ (iii) が成立．
(i) ⟸⟹ (ii) はホールの定理より成立．

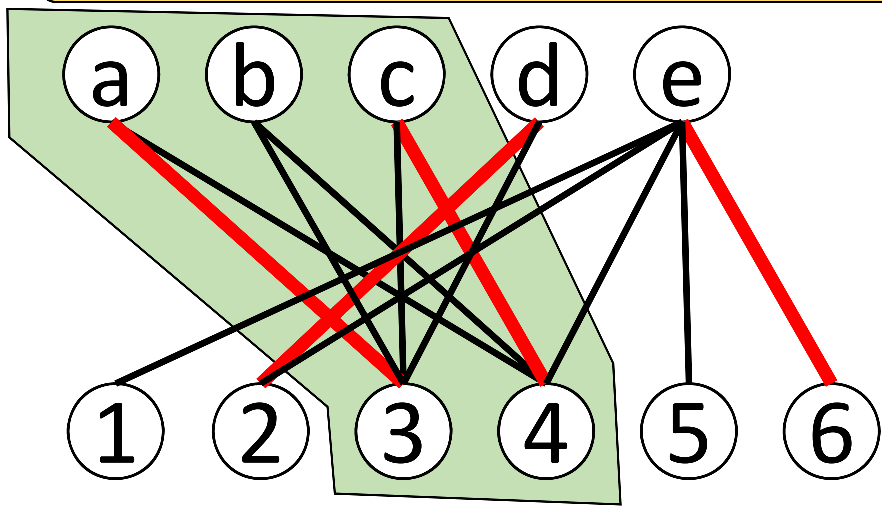
均衡条件の書き換え(その4)

(iii) 任意の Z⊆N に対し，|Z| ≧ (D$_i$(p)⊆ Z を満たす入札者 i∈B’ の数)

B’={a,b,c,d,e}をカバー可能



B’={a,b,c,d,e}をカバー不可能



Z = {3,4} とすると，
a,b,c はいずれも D$_i$(p)⊆ Z を満たす
|Z|=2 なので，a,b,c,に重複なく
利得最大の財を割り当てることは不可能

均衡条件の書き換え(その5)

命題: 以下の3条件は等価:
(i) B’ をカバーするマッチング $M \subseteq E$ が存在
(ii) 任意の$X \subseteq B'$に対し, X 内の入札者が欲しい財の数 ≧ $|X|$
(iii) 任意の $Z \subseteq N$ に対し, $|Z|$ ≧ ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)

[(ii)←(iii)]対偶を示す.
ある$X \subseteq B'$に対し, X 内の入札者が欲しい財の数 < $|X|$ と仮定.
Z = (X 内の入札者が欲しい財の集合) とおく.
➔ ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数) ≧ $|X| > |Z|$
となり, (iii)不成立.

[(ii)→(iii)] 対偶を示す.
ある$Z \subseteq N$ に対し, $|Z|$ < ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)
と仮定. X = ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の集合) とおく.
➔ X 内の入札者が欲しい財の数≦$|Z| < |X|$ となり, (ii)不成立.

アルゴリズムの方針

満たすべき条件:

① 任意の $Z \subseteq N$ に対し,

$|Z| \geqq$ ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)

② 任意の$Y \subseteq N'$ に対し, (Y 内の財を欲しい入札者の数) $\geqq |Y|$

- 条件②を満たしつつ, ①に違反する Z を減らすよう, 価格を増やす
  - 価格 $p=(0,0,\cdots,0)$ のとき, $N'=\emptyset$ なので②は成立
  - ①に違反する Z ←→ Z のみを欲しい入札者が多すぎる

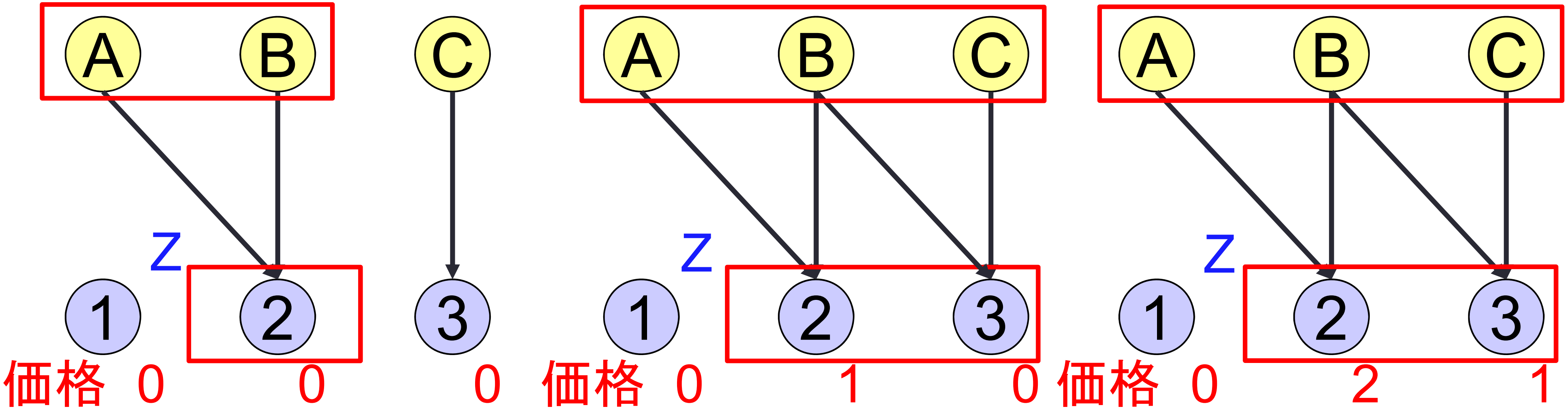
    ∴ Z に含まれる(幾つかの)財の価格を増やせば,

    欲しい入札者を減らせる(かもしれない)
  - ①に違反する Z の中で**極小な**ものを選び,

    Z 内の全ての財の価格を増やす

    →条件②は満たされたまま(要証明)

アルゴリズムの実行例(1)

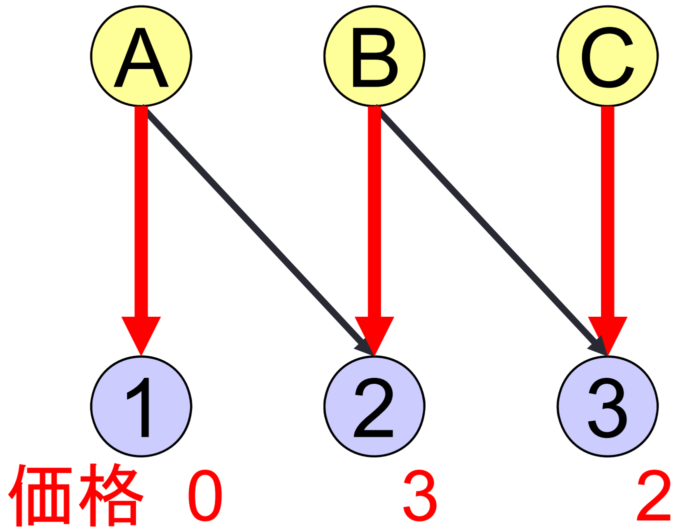


v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	1	3	3

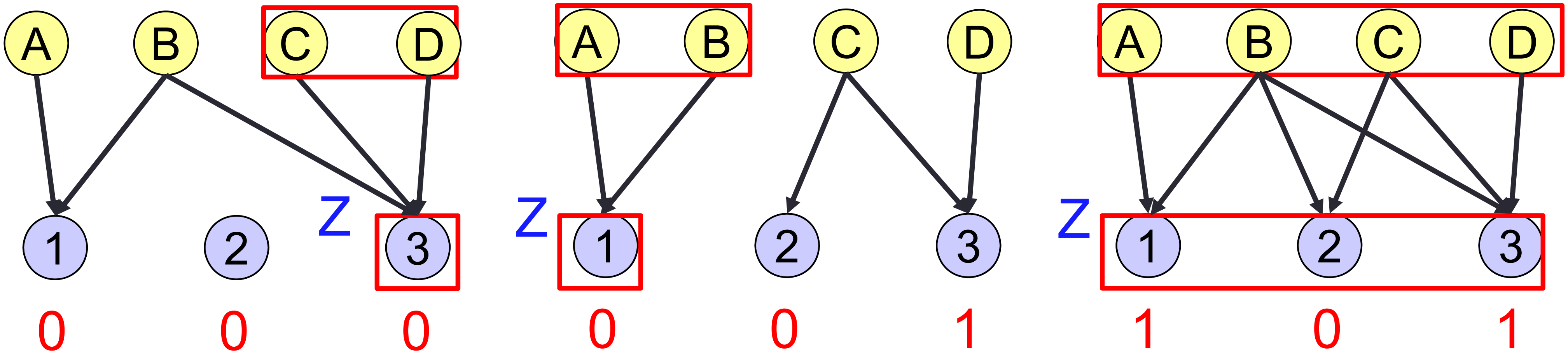
アルゴリズムの実行例(1)



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	0	2	2

①の条件に違反する Z なし
→ アルゴリズム終了
所望のマッチング存在

アルゴリズムの実行例(2)

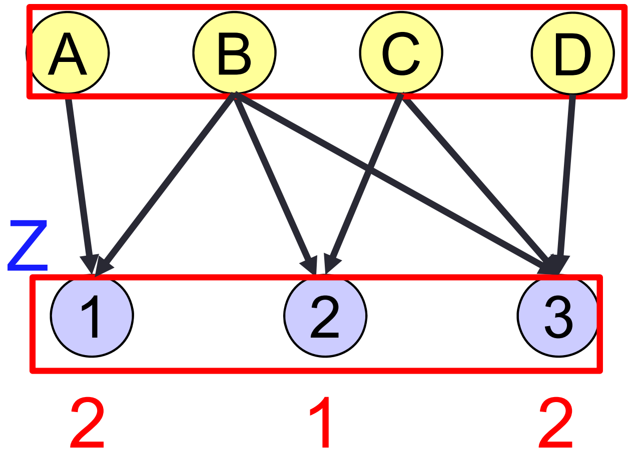


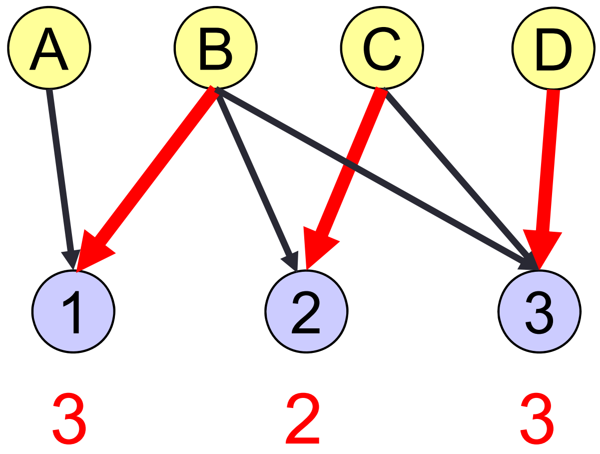
v(i,j)	A	B	C	D
①	3	7	1	0
②	1	6	7	0
③	0	7	8	4

利得	A	B	C	D
①	3	7	1	0
②	1	6	7	0
③	-1	6	7	3

利得	A	B	C	D
①	2	6	0	-1
②	1	6	7	0
③	-1	6	7	3

アルゴリズムの実行例(2)





利得	A	B	C	D
①	1	5	-1	-2
②	0	5	6	-1
③	-2	5	6	2

利得	A	B	C	D
①	0	4	-2	-3
②	-1	4	5	-2
③	-3	4	5	1

①の条件に
違反するＺなし
→ アルゴリズム終了
所望の
マッチング存在

Aの最大利得=0

アルゴリズムの正当性の証明

二部グラフ (B, N; E'), B' = 最大利得 > 0 の入札者全員

N'=価格 > 0 の財全体

満たすべき条件:

① 任意の $Z \subseteq N$ に対し,

$|Z| \geqq$ ($D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)

② 任意の$Y \subseteq N'$ に対し, (Y 内の財を欲しい入札者の数) $\geqq |Y|$

(Y に隣接する頂点数 $\geqq |Y|$)

- アルゴリズムが終了←→条件①成立
- すべての財の利得≦0 になったら, 定義より B'=∅ ∴条件①成立
- 各反復において, ある財の価格が1増加

∴ すべての財の利得≦0 になるまで, たかだか有限回

- よって, 条件②が常に満たされることを証明すれば良い.

条件②が成り立つことの証明：準備

② 任意の$Y \subseteq N'$に対し，　Y に隣接する頂点数 $\geq |Y|$

条件②が価格増加前に成立と仮定.

Z = ①に違反する集合の中で極小なもの

（つまり，価格を増加する財の集合）

財集合 Zの価格を増やした後も②が成り立つことを証明する

X = 「（増加前の価格pにおいて）$D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$」の集合

p' = 増加後の価格　（$p'(j)=p(j)+1$ ($j \in Z$), $p'(j)=p(j)$ ($j \in N-Z$)）

とおく.

Z は条件①に違反する，つまり $|Z| < |X|$

条件②が成り立つことの証明：準備

価格 p→p' の変化による，2部グラフの枝の変化（これから証明）

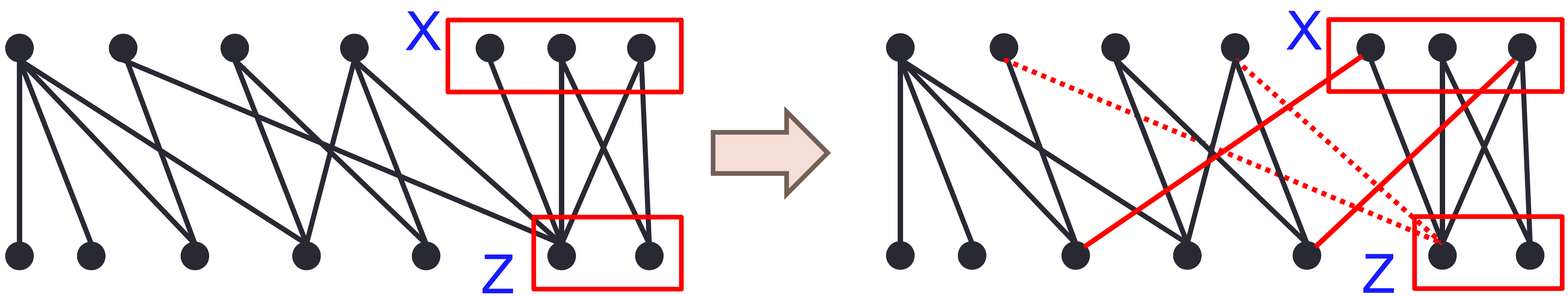
(i) B – X と Z を結ぶ枝は消える

(ii) B-XとN-Z の間の枝は不変

(iii) X と Z の間の枝は不変

(iv) 価格 p のとき，X と N – Z を結ぶ枝は存在しない

(v) 価格が p' に増えると， X と N – Z を結ぶ枝は現れる可能性あり



条件②が成り立つことの証明：準備

(i) B – X と Z を結ぶ枝は消える　(ii) B-XとN-Z の間の枝は不変

[証明] Xの定義より，i∈B-X ←→ $D_i(p) \not\subseteq Z$

よって i∈B-X は N-Z の中に最大利得の財 j* をもつ

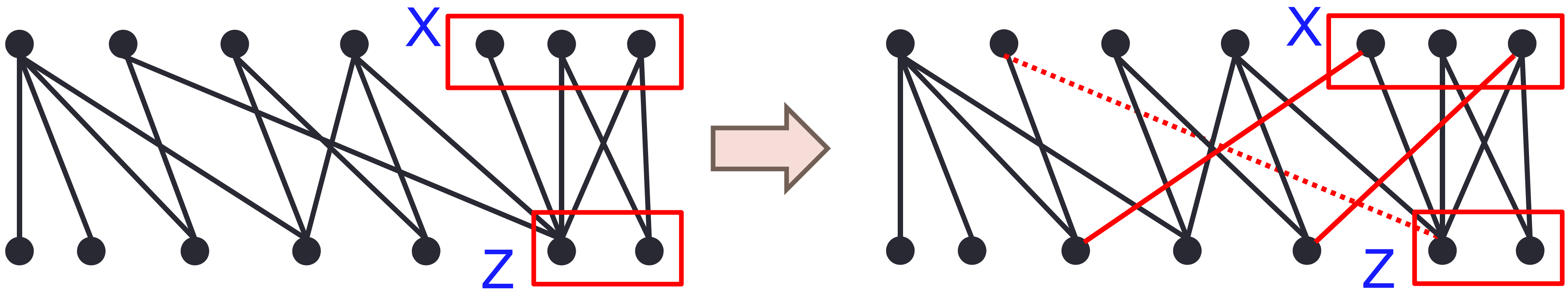
$$\therefore\ v(i,j^*)-p(j^*)=\max_{h\in N\setminus Z}\{v(i,h)-p(h)\}\geq\max_{h\in Z}\{v(i,h)-p(h)\}$$

p→p' のとき，Z の中の財のみ価格増加 ➔ 利得減少

$$\therefore\ v(i,j^*)-p'(j^*)\ >\ \max_{h\in Z}\{v(i,h)-p'(h)\}\quad \therefore\ \text{(i) 成立}$$

N – Z の財は価格不変

➔ N – Z の中での利得最大の財は不変　∴ (ii) 成立



条件②が成り立つことの証明：準備

(iii) X と Z の間の枝は不変

(iv) 価格 p のとき，X と N – Z を結ぶ枝は存在しない

(v) 価格が p’ に増えると，X と N – Z を結ぶ枝は現れる可能性あり

[証明] i∈X に対し，価格 p における最大利得の財は

すべて Z に含まれる（$D_i(p) \subseteq Z$） ➔ (iv)

$$\therefore \max_{h \in N}\{v(i,h) - p(h)\} = \max_{h \in Z}\{v(i,h) - p(h)\} > \max_{h \in N \setminus Z}\{v(i,h) - p(h)\}$$

よって Z の価格増加後 (p → p’) は

$$\max_{h \in N}\{v(i,h) - p'(h)\} = \max_{h \in Z}\{v(i,h) - p'(h)\} \geq \max_{h \in N \setminus Z}\{v(i,h) - p'(h)\}$$

∴ i∈X の最大利得だった財 in Z は，利得最大のまま（∴ (iii)）

N-Z の財も利得最大になる可能性あり（∴ (v)）

条件②が成り立つことの証明

「② 価格 p' のときに Y に隣接するBの頂点数 ≧ |Y|」を証明する

ために，以下の不等式を示す：

(a) $Y \subseteq N-Z$ に対し，

価格 p' のときに Y に隣接するB-Xの頂点数 ≧ |Y|

(b) $Y \subseteq Z$ に対し，

価格 p' のときに Y に隣接する Xの頂点数 ≧ |Y|

[p'に対する②の証明] $Y_1=Y \cap Z$, $Y_2=Y-Z$ とおくと，(a), (b) より

価格 p' のときに Y_1 に隣接するB-Xの頂点数 ≧ $|Y_1|$

価格 p' のときに Y_2 に隣接するXの頂点数 ≧ $|Y_2|$

∴価格 p' のときに Y に隣接するBの頂点数

≧価格 p' のときに Y_1 に隣接するB-Xの頂点数

＋ 価格 p' のときに Y_2 に隣接するXの頂点数

≧ $|Y_1| + |Y_2| = |Y|$ ■

不等式(a)の証明

Y⊆N-Z に対し，価格 p’ のときに Y に隣接するB-Xの頂点数 ≧ |Y|

[証明]

- 前述のグラフの性質 (ii),(iv),(v) より，

  価格 p’ のときに Y に隣接するB−X 内の頂点数

  ≧価格 p のときに Y に隣接するB−X 内の頂点数

- グラフの性質 (iv)より，

  価格 p のときに Y に隣接する B−X 内の頂点数

  ＝価格 p のときに Y に隣接するBの頂点数

- 仮定より，価格 p のときに条件②が成り立つ

  ∴ 価格 p のときに Y に隣接する頂点数 ≧ |Y|

不等式(b)の証明

$Y \subseteq Z$ に対し，価格 p' のときに Y に隣接する Xの頂点数 $\geqq |Y|$

[証明]

グラフの性質 (iii) より，

価格 p' のときに Y に隣接する X 内の頂点数

＝ 価格 p のときに Y に隣接する X 内の頂点数

以下，価格 p のときに Y に隣接する X 内の頂点数 $\geqq |Y|$ を証明

[(Case 2-1) Y=Zの場合]

X の定義より，価格 p のとき，各 $i \in X$ は Z に隣接

∴価格 p のときに Z に隣接する X 内の頂点数= $|X| > |Z| = |Y|$

Zが①に違反することより

不等式(b)の証明（つづき）

[(Case 2-2) Y⊂Zの場合]

価格 p のとき, Z は条件①に違反する集合の中で極小

∴ 任意の Z'⊂Z に対し, 条件①が成立:

$|Z'| \geqq$ ($D_i(p) \subseteq Z'$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数)

Z'=Z-Y,　X' = ($D_i(p) \subseteq$ Z-Y を満たす入札者 $i \in B'$ の集合)　　とおく

➔ |Z'|≧|X'| 成立.　さらに X'⊆X（∵ Di(p)⊆Z'⊆Z）

X と X' の定義より, 各 i∈X-X' に対し $D_i(p) \not\subseteq Z'$, $D_i(p) \subseteq Z$

∴各 i∈X-X' は Z - Z' = Y の中に利得最大の財をもつ（i はYに隣接）

|Z| < |X| より,

Y に隣接する X 内の頂点数 ≧|X|-|X'| > |Z|-|Z'|=|Z|-|Z-Y|=|Y|

価格の増やし方の問題点

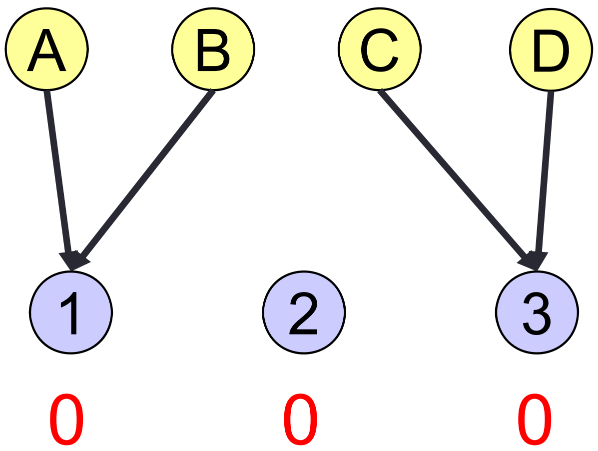
価格の増やし方

- 現状：以下の条件を満たす，極小な財集合 Z⊆N を使う

  |Z| ＜（$D_i(p)$⊆ Z を満たす入札者 i∈B’の数）

- 効率が悪いことも．．．
  - 下記の例：財1と財3の価格を交互に増加する必要性

    同時に増やす方が反復回数が減る



v(i,j)	A	B	C	D
①	3	7	1	0
②	0	4	7	0
③	0	4	8	4

価格の増やし方の改良案

- 改良案:

$(D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数$) - |Z|$

を最大にする財集合 $Z \subseteq N$ を使う.
複数存在する場合は，極小なものを選ぶ.

- アルゴリズムの正当性の証明: 改良前の証明を若干修正すればOK

- ほかの改良案:

$f(Z) = (D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数$) - |Z|$

とおいたとき，$Z' \subset Z$ ならば $f(Z') < f(Z)$ が成り立てばよい.

不等式(b)の証明（修正版）

[(Case 2-2) $Y \subset Z$の場合]

価格 p のとき, Z は (${D_i(p)} \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数) − $|Z|$

を最大にする. 複数存在する場合は, 極小なもの

∴ 任意の $Z' \subset Z$ に対し,

(${D_i(p)} \subseteq Z'$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数) − $|Z'| < |X| - |Z|$

$Z' = Z - Y$,　X' = (${D_i(p)} \subseteq Z - Y$ を満たす入札者 $i \in B'$ の集合)　　とおく

➔ $|X'| - |Z'| < |X| - |Z|$

さらに $X' \subseteq X$（∵ $D_i(p) \subseteq Z' \subseteq Z$）

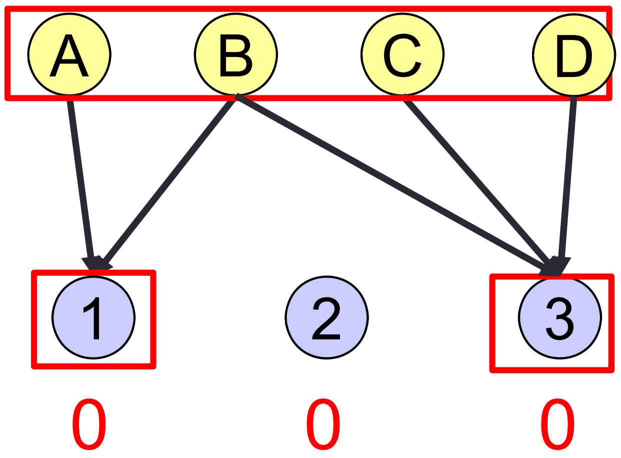
X と X' の定義より, 各 $i \in X - X'$ に対し $D_i(p) \not\subseteq Z'$, $D_i(p) \subseteq Z$

∴各 $i \in X - X'$ は $Z - Z' = Y$ の中に利得最大の財をもつ（i はYに隣接）

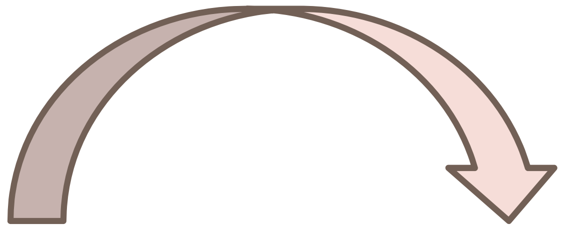
Y に隣接する X 内の頂点数 $\geqq |X| - |X'| > |Z| - |Z'| = |Z| - |Z - Y| = |Y|$

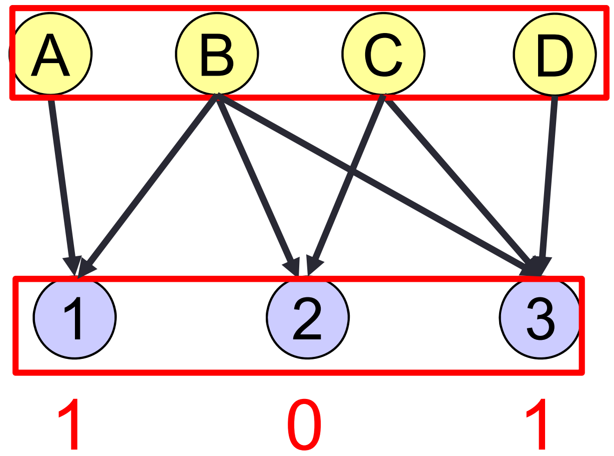
アルゴリズムの実行例

修正案を適用 → 1，2回目の価格更新がひとまとめになる



v(i,j)	A	B	C	D
①	3	7	1	0
②	1	6	7	0
③	0	7	8	4





利得	A	B	C	D
①	2	6	0	-1
②	1	6	7	0
③	-1	6	7	3

改良による反復回数の減少

- 価格増加する財の選び方の変更により,
  アルゴリズムの反復回数が減少（増えない）
- 極小均衡価格=(p*(1),…,p*(n))のとき,
  アルゴリズムの反復回数 ≧ max p*(j)

定理[Andersson-Erlanson(2013), Murota-Shioura-Yang(2013)] :
改良後のアルゴリズムの反復回数＝ max p*(j)

つまり, 改良によって,
反復回数が最小のアルゴリズムになった

演習問題

下記のように評価値が与えられたとき，
均衡を厳密に計算するアルゴリズムを適用して均衡価格を計算したい．
問１ 極小な財集合 Z を用いるやり方で，(a), (b), (c) の均衡価格を計算せよ．
問２ $(D_i(p) \subseteq Z$ を満たす入札者 $i \in B'$ の数$) - |Z|$ を最大にする財集合 Z を用いるやり方で，(a), (b) の均衡価格を計算せよ．

(a)

v(i,j)	A	B	C
①	2	6	4
②	6	7	3

(b)

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

(c)

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

いずれにおいても，
均衡価格の推移を書けばOK