経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと
離散最適化

第5回　二部グラフの最大重みマッチング問題およびその双対問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡価格と双対最適解の関係

最大重みマッチングと均衡配分の関係

オークションの均衡配分 ＝ 最大重みマッチング

定理： α^* は均衡配分

➔ α^* に対応するマッチングは最大重み

定理： 均衡が存在するとき，

α は最大重みマッチング ➔ α は均衡配分

双対最適解と均衡価格の関係

双対問題の最適解 ＝ 均衡価格

定理1： 任意の均衡価格 p に対し，q(i) (i∈B) を

$$q(i) = \max\left[0, \max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$$

により定義すると，(q,p) は最適解

※ 上記の q(i) は，入札者 i の最大利得に一致

定理2： 均衡が存在するとき，
双対問題の任意の最適解 (q’,p’) に対し， p’ は均衡価格

証明の準備：双対問題の解の性質1

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

命題：任意の非負ベクトル p に対し，

$$q(i) = \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}\right]$$

とおくと，q, p は双対問題の実行可能解

（証明）上記で定めた q(i) に対し，不等式条件がすべて成り立つ． ■

証明の準備：双対問題の解の性質2

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

命題: q, p が最適解ならば $q(i) = \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}\right]$

（証明）各変数 q(i) はなるべく小さくしたい

- $q(i) \geq v(i,j) - p(j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$
- $q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

∴ q, p が最適解ならば $q(i) = \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}\right]$ ■

定理1の証明(1)

最小化 $\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

- p: 均衡価格　とする.
- $q(i) = \max\left[0, \max_{1\leq h\leq n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$　とおく

  ➔　(p,q) は双対問題の実行可能解　(∵ 双対解の性質1より)
- (p,q) は最適解 ⟷ 双対問題の任意の実行可能解(p',q') に対し,

  $\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j) \leq \sum_{i\in B} q'(i) + \sum_{j\in N} p'(j)$　← これを示す
- p は均衡価格 ➔ ある財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在して

  以下を満たす:

(i) 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)

➔ $0 \leq v(i,j) - p(j) = \max_{1\leq h\leq n}\{v(i,h) - p(h)\}$

(ii) 入札者 i に財の割り当てがない($\alpha(i) = 0$)

➔ $\max_{1\leq h\leq n}\{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$

(iii) 財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p(j) = 0$

定理1の証明(2)

(i) 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)
 ➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = \max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}$
(ii) 入札者 i に財の割り当てがない($\alpha(i) = 0$)
 ➔ $\max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\} \le 0$
(iii) 財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p(j) = 0$

- 配分 α において

  B*=財の割当のある入札者の集合 = $\{i_1, i_2,\ldots,i_k\}$,

  N*=誰かに割り当てられた財の集合 = $\{j_1, j_2,\ldots,j_k\}$,

  ただし $\alpha(i_t) = j_t\ (t = 1,2,\ldots,k)$

➔ 均衡条件(i) より, $0 \le v(i_t,j_t) - p(j_t) = \max_{1\le h\le n}\{v(i_t,h) - p(h)\}$

 ∴ q の定義より $q(i_t) = v(i_t, j_t) - p(j_t)$

 均衡条件(ii) より, $\max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\} \le 0 \quad (i \in B - B^*)$

 ∴ q の定義より $q(i) = 0 \quad (i \in B-B^*)$,

 均衡条件(iii)より, $p(j) = 0 \quad (j \in N-N^*)$

定理1の証明(3)

$\therefore \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) = \sum_{i \in B^*} q(i) + \sum_{j \in N^*} p(j)$

$= \sum_{t=1}^{k} (q(i_t) + p(j_t)) = \sum_{t=1}^{k} v(i_t, j_t)$ ①

- 一方, (p’,q’) は双対問題の実行可能解

$\therefore\ q'(i) + p'(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q'(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p'(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

とくに,

$q'(i_t) + p'(j_t) \geq v(i_t, j_t) \quad (t = 1, 2, \dots, k)$

$q'(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B - B^*), \quad p'(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N - N^*)$ ②

$\therefore \sum_{i \in B} q'(i) + \sum_{j \in N} p'(j)$

$= \sum_{t=1}^{k} (q'(i_t) + p'(j_t)) + \sum_{i \in B - B^*} q'(i) + \sum_{j \in N - N^*} p'(j)$

② $\geq \sum_{t=1}^{k} v(i_t, j_t) = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$ ■

①

定理2の証明(1)

定理2:　双対問題の任意の最適解 (q’,p’) に対し，p’ は均衡価格

- (p’,q’): 双対問題の任意の最適解
- p: 均衡価格，α:対応する均衡配分

$$q(i) = \max\left[0, \max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$$ とする

➔ 定理1より (p, q) は双対問題の最適解

以下では，p’ と α が均衡の条件を満たすことを示す.

- 定理1の証明より

$$\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j) \le \sum_{i\in B} q'(i) + \sum_{j\in N} p'(j) \quad ①$$

これを示すのに用いた不等式:

$$q'(i_t) + p'(j_t) \ge v(i_t, j_t) \quad (t = 1,2,\dots,k) \quad ②$$

$$q'(i) \ge 0 \quad (\forall i \in B - B^*) \quad ③$$

$$p'(j) \ge 0 \quad (\forall j \in N - N^*) \quad ④$$

定理2の証明(2)

- 不等式②, ③, ④のいずれかが “>” で成立 ➔ ①が “>” で成立
 ➔ (p’,q’)は最適解ではない(矛盾)
- よって, 不等式②, ③, ④のいずれも “=” で成立:

$$q'(i_t) + p'(j_t) = v(i_t, j_t) \quad (t = 1,2,\ldots,k) \qquad ⑤$$

$$q'(i) = 0 \qquad (\forall i \in B - B^*) \qquad ⑥$$

$$p'(j) = 0 \qquad (\forall j \in N - N^*) \qquad ⑦$$

- ⑤より, 各 t に対し,

$$v(i_t, j_t) - p'(j_t) = q'(i_t) = \max[0, \max_h\{v(i_t, h) - p'(h)\}]$$

(2つめの等号は $q'(i) \geq 0$, $q'(i) + p'(j) \geq v(i, j)$ より)

定理2の証明(3)

- ⑥より，財の割当のない入札者 i∈B-B* に対し，

$$0 = q'(i) \geq \max_h \{v(i,h) - p'(h)\}$$

（不等号は $q'(i) + p'(j) \geq v(i,j)$ より）

- ⑦より，財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p'(j) = 0$

∴ p' と α は均衡の条件を満たす

均衡の存在

均衡配分と均衡価格の関係

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分
⟺ ある財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在して,
配分 α と価格 p の組は均衡の3条件を満たす

定義: 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格
⟺ ある財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在して,
配分 α と価格 p の組は均衡の3条件を満たす

定義からは以下のことがわかる:

- 各々の均衡配分に対し, 対になる均衡価格が存在
- 各々の均衡価格に対し, 対になる均衡配分が存在

実際には,

- 任意の均衡配分と均衡価格の対は 均衡 になる

均衡配分と均衡価格の関係(つづき)

命題: 任意の均衡配分 α と均衡価格 p の対は 均衡 になる

[証明の概略]

均衡配分 α は最大重みマッチング(∵ 前回の定理)

最大重みマッチング α と均衡価格 p の組は均衡になる

(∵ 前回の定理の証明) ■

均衡の存在

- 均衡の定義からは，均衡が存在するか否かは不明
- 実際には，均衡は常に存在
  - 最大重みマッチングに対する

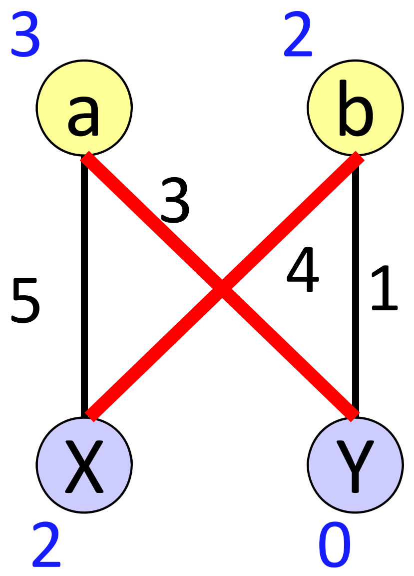
    双対変数を使った最適性条件を使って，均衡の存在を証明

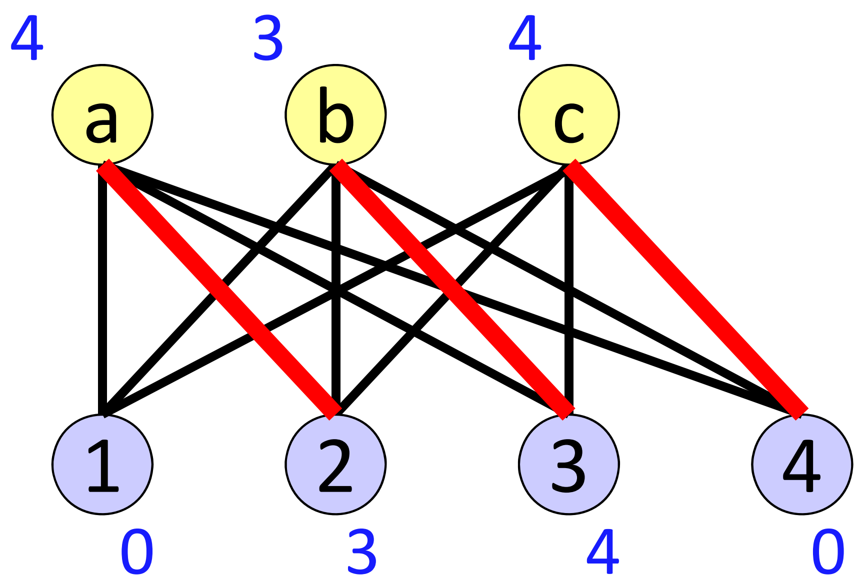
最大重みマッチングの最適性条件

双対問題の実行可能解を用いた最適性条件

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
⟺ 双対問題の実行可能解(q,p)で,
条件(a), (b), (c)を満たすものが存在:

(a) マッチング M に含まれる任意の枝に対し, q(i)+p(j) = v(i,j)
(b) i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
(c) j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0





v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡の存在の証明

最大重みマッチングの最適性条件を使う　← あとで証明

オークションに対応する最大重みマッチング問題を考える.

α^*: 最大重みマッチングに対応する財の配分

（※最大重みマッチングは必ず存在）

→対応するマッチングは $M = \{(i, \alpha(i)) | i \in B,\ \alpha(i) \neq 0\}$

最適性条件より, 3つの条件を満たす

双対問題の実行可能解(q,p) が存在.

以下では, α^* とp が均衡の条件を満たすことを示す.

最小化　$\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件　$q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

$$\Rightarrow \quad q(i) \geq \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}\right] \quad ①$$

均衡の存在の証明(つづき)

(q,p) が満たす3つの条件

(a) マッチング Mに含まれる任意の枝に対し， q(i)+p(j) = v(i,j)

∴ 入札者 i に財の割当がある($\alpha(i) \neq 0$)

➔ $q(i) + p\big(\alpha(i)\big) = v\big(i, \alpha(i)\big)$

①

➔ $v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(i)\big) = q(i) \geq \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$

➔ $0 \leq v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(i)\big) = \max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\}$ （均衡条件1）

(b) i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0

∴ 入札者 i に財の割当がない($\alpha(i) = 0$)

➔ $0 = q(i) \geq \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$

➔ $\max_{1 \leq h \leq n}\{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$ （均衡条件2）

(c) j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

∴ 財 j が誰にも割り当てられない ➔ p(j) = 0（均衡条件3） ■

最大重みマッチング問題の
最適性条件の証明

証明の概略

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
⇔ 双対問題の実行可能解(q,p)で，条件(a), (b), (c)を満たすものが存在:
(a) マッチング M に含まれる任意の枝に対し，$q(i)+p(j) = v(i,j)$
(b) $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない ➔ $q(i)=0$
(c) $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない ➔ $p(j)=0$

🡐 は比較的簡単．弱双対定理を使う．

➔ の証明の流れ:

入札者集合 B と財集合 N を頂点にもつ補助グラフを作成

Mは最大マッチング

➔ 重み＞0の交互路，交互閉路が存在しない

➔ 補助グラフに負閉路なし（要証明）

∴ 補助グラフにポテンシャルが存在

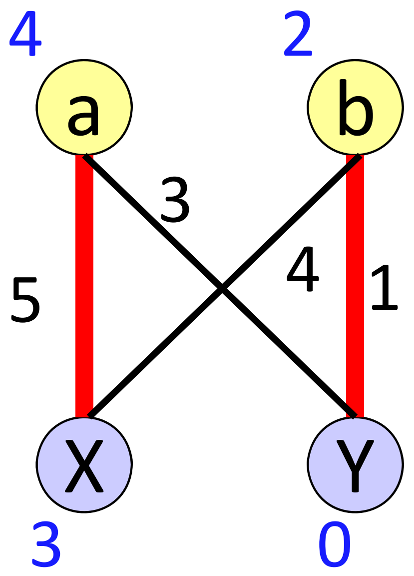
← これを使って，所望の (q,p) を求める

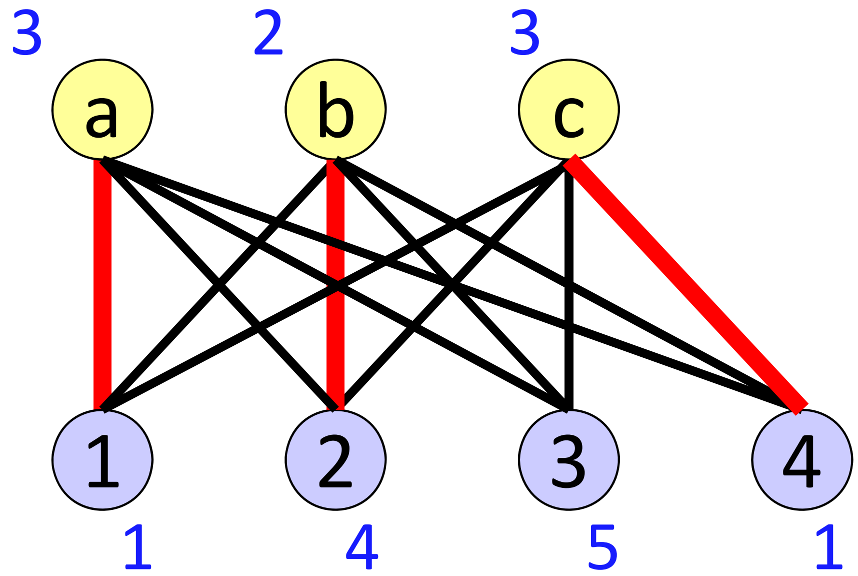
弱双対定理

最大重みマッチング問題の最適値 ≦ 双対問題の最適値

定理:
任意のマッチング M と任意の双対実行可能解 (q,p) に対し,

マッチング M の重み ≦ $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$





v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

系: 任意のマッチング M と任意の双対実行可能解 (q,p) は,
以下の条件を満たすとき, それぞれ最適解である:

マッチング M の重み ＝ $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

弱双対定理：証明

定理：
任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) に対し,
マッチング M の重み ≦ $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

（証明）マッチングの枝集合を $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_k, j_k)$ とする
双対問題の実行可能性より $v(i_t, j_t) \geq q(i_t) + p(j_t)$ $(t = 1,2, \dots, k)$
∴ マッチング M の重み＝$\sum_{t=1}^{k} v(i_t, j_t) \geq \sum_{t=1}^{k} q(i_t) + \sum_{t=1}^{k} p(j_t)$
$i_1, i_2, \dots, i_k$ は B に含まれる，互いに異なる要素であるので,

$$\sum_{t=1}^{k} q(i_t) \leq \sum_{i \in B} q(i) .$$

同様に，$\sum_{t=1}^{k} p(j_t) \leq \sum_{j \in N} p(j)$.
よって，マッチング M の重み ≦ $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$ が成り立つ.

← の証明

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
←→ 双対問題の実行可能解(q,p)で，条件(a), (b), (c)を満たすものが存在:
(a) マッチング M に含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)
(b) i∈B にマッチング M の枝が接続していない → q(i)=0
(c) j∈N にマッチング M の枝が接続していない → p(j)=0

弱双対定理の系より，

マッチング M の重み $= \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

を示せばよい.

マッチングの枝集合を $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_k, j_k)$ とする.

(b),(c)

$$\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) = \sum_{h=1}^{k} (q(i_h) + p(j_h))$$

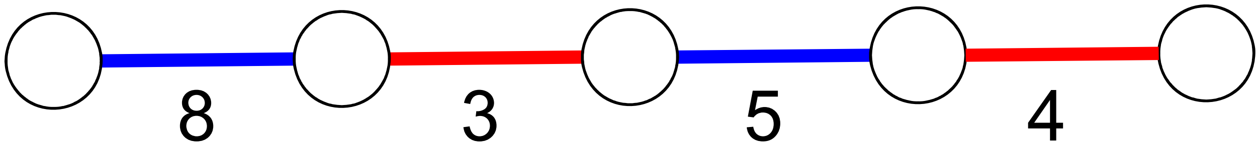
$$= \sum_{h=1}^{k} v(i_h, j_h) \ = \text{ M の重み}$$

(a)

■

交互路・交互閉路による マッチングの更新

定義：マッチング Mに関する交互路（交互閉路）Pの重み
＝ $P \setminus M$の枝重みの和 ー P∩Mの枝重みの和



➡ 交互路の重み
＝8-3+5-4=6

命題 M：マッチング，P：（Mに関する）交互路
⇔Pを使ってMの枝を入れ替えて得られる
マッチング $(M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ の重み ＝ M の重み + P の重み

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
➔現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
➔正の重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

最大重みマッチングの最適性条件：交互路を用いた条件

命題　正の重みの交互路(交互閉路)が存在
➔現在のマッチングMは最大重みではない
(対偶：マッチングMは最大重みマッチング
➔正重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

逆も成り立つ

命題　正の重みの交互路(交互閉路)が存在
←現在のマッチングMは最大重みではない
(対偶：マッチングMは最大重みマッチング
←正重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

マッチングが最適解であるための必要十分条件

定理： マッチング M は最大重みマッチング
↔正重みの交互路および交互閉路は存在しない

演習問題

問1： 入札者{A,B,C}, 財{1,2}の場合において，
均衡配分が最大重みマッチングになることを以下の手順で証明せよ.
なお，入札者 X の財 j に対する評価値は v(X, j) とする.

(1) すべての財が割り当てられるような均衡配分が存在することを証明せよ.

(2) すべての財が割り当てられるような最大重みマッチングが存在することを証明せよ.

一般性を失うことなく，均衡配分α^*ではAに財1，Bに財2が割り当てられると仮定する（つまり，$\alpha^*(A)=1, \alpha^*(B)=2, \alpha^*(C)=0$）

(3) この配分に対する均衡条件をすべて書け.

(4) 任意の配分 $\alpha\colon\{A,B,C\}\to\{0,1,2\}$ に対し，

$v\big(A,\alpha(A)\big)+v\big(B,\alpha(B)\big)+v(C,\alpha(C))\le v(A,1)+v(B,2)$ を示せ.

ここで，$v(X,0)=0\ \ (\forall X\in\{A,B,C\})$ とする.

演習問題

問２：入札者{A,B,C}, 財{1,2}の場合において，最大重みマッチングが均衡配分になることを以下の手順で証明せよ.

問1で示した(1)―(4)を使ってよい.

以下，最大重みマッチングでは，入札者 B に財1が，入札者 C に財2が割り当てられ，入札者 A には財の割り当てがないと仮定する

（つまり，$\alpha(B) = 1, \alpha(C) = 2, \alpha(A) = 0$）

また，均衡配分α^*ではAに財1，Bに財2が割り当てられる

（つまり，$\alpha^*(A) = 1, \alpha^*(B) = 2, \alpha^*(C) = 0$）と仮定し，

均衡価格を p とする.

(5) $v(B,1) - p(1) = v(B,2) - p(2), v(C,2) - p(2) = v(C,0) - p(0),$
$v(A,0) - p(0) = p(A,1) - p(1)$ が成り立つことを示せ.

(6) 配分 α と価格 p が均衡の条件を満たすことを示せ.