

経営経済のための 最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第3回 二部グラフのマッチング

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

今回の講義の目標

前回の内容:

複数不可分財のオークションにおいて,

- 与えられた財の配分が均衡配分か否かを判定したい
- 与えられた均衡配分に対応する均衡価格を計算したい
→ 差分不等式系の求解に帰着 → 最短路問題に帰着

今回の内容:

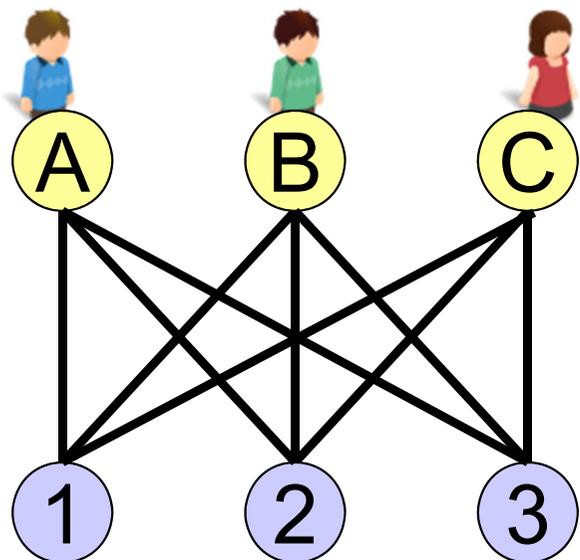
複数不可分財のオークションにおいて,

- 与えられた財の価格が均衡価格か否かを判定したい
- 与えられた均衡価格に対応する均衡配分を計算したい
→ 2部グラフのマッチング問題に帰着

均衡価格の判定: 例

複数不可分財のオークションにおいて,

- 与えられた**財の価格**が**均衡価格**か否かを判定したい
- 与えられた**均衡価格**に対応する**均衡配分**を計算したい



価格
0
3
2

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	6	5	3
③	2	4	1

この価格は均衡価格か？

均衡価格の定義

定義: 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は **均衡価格**

\leftrightarrow 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在

ただし $q(i) \equiv \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$ \leftarrow 入札者 i の最大利得

① 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)

$\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)$

② 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$) $\rightarrow q(i) \leq 0$

③ 財 j が誰にも割り当てられない $\rightarrow p(j) = 0$

条件②, ③は対偶をとるとわかりやすい

② 入札者 i に財の割り当てがある ($\alpha(i) \neq 0$) $\leftarrow q(i) > 0$

③ 財 j は誰かに割り当てられる $\leftarrow p(j) > 0$

均衡価格の判定(その2)

均衡価格の定義の書き換え:

財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格

↔ 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在
ただし $q(i) \equiv \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)

→ $0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)$

② $q(i) > 0$ → 入札者 i に財の割り当てがある

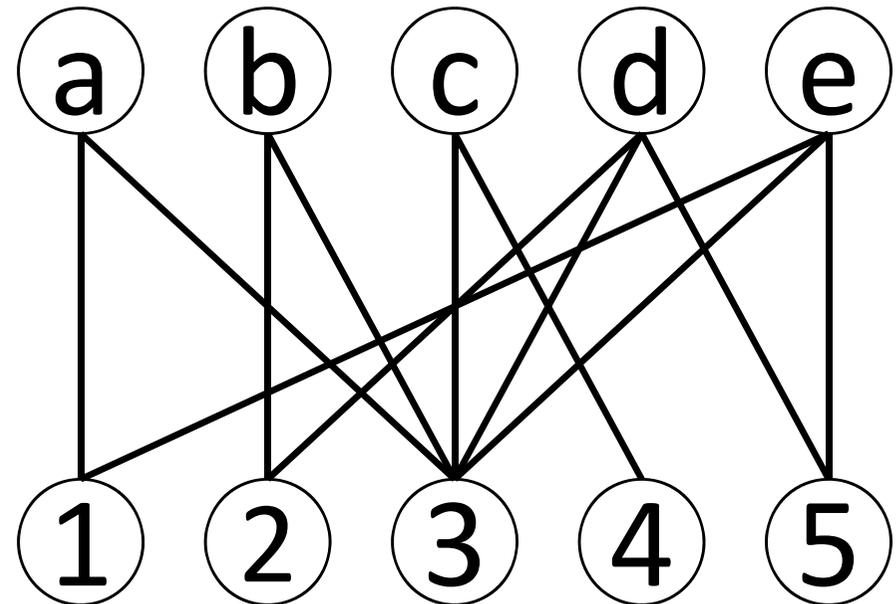
③ $p(j) > 0$ → 財 j は誰かに割り当てられる

入札者への財の割当を, 二部グラフのマッチングと見なし,
上記の条件を書き換える

二部グラフ

- 例: 入札者への財の割り当て
 - 5人の入札者 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 5つの財 $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - 各々の入札者は欲しい財と欲しくない財がある
- グラフで表現可能

頂点の2つのグループ
 B と N の間にのみ、枝が存在
 ← **二部グラフ** と呼ばれる



二部グラフ G の

頂点集合が $B \cup N$,

枝集合が E のとき,

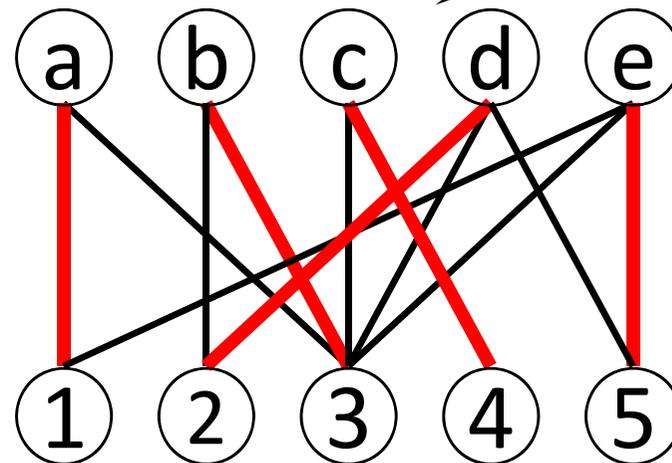
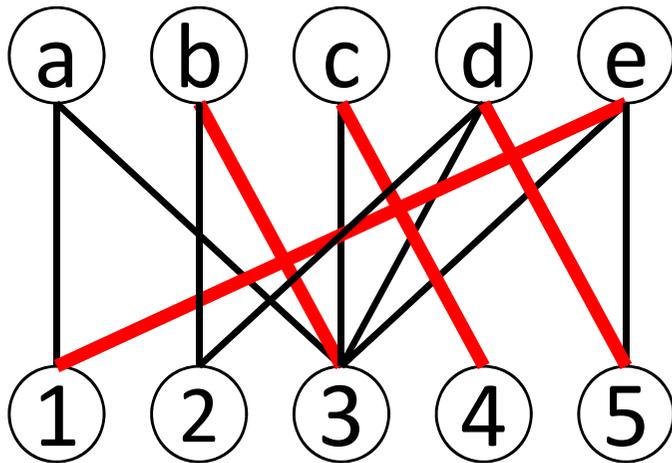
$G = (B \cup N, E)$ のように表現する

※2部グラフにおいて、 B と N の頂点数は同じでなくても良い

二部グラフのマッチング

- できるだけ多くの入札者に、欲しい財を割り当てたい
 - 各入札者には、高々1つの財が割り当て可能
 - 各財は、高々1人の入札者に割り当て可能
- 財の割当を枝集合で表現可能

最大
マッチング



- (グラフの) **マッチング**:

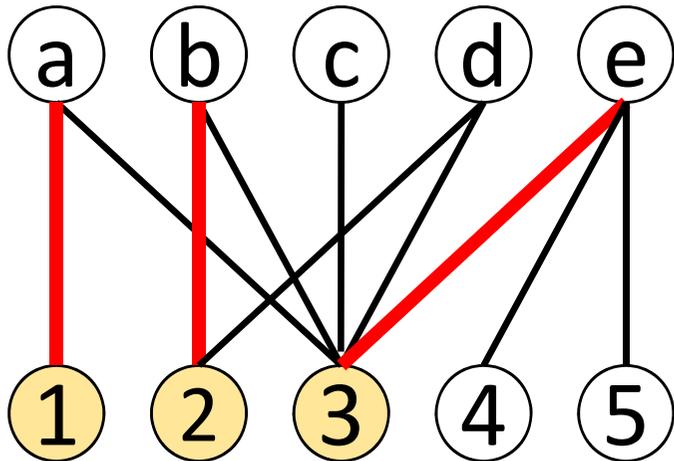
グラフの枝集合であって、各頂点に接続する枝の数(次数)が1以下

- **最大(サイズ)マッチング**:

与えられたグラフのマッチングの中で、枝数最大のもの

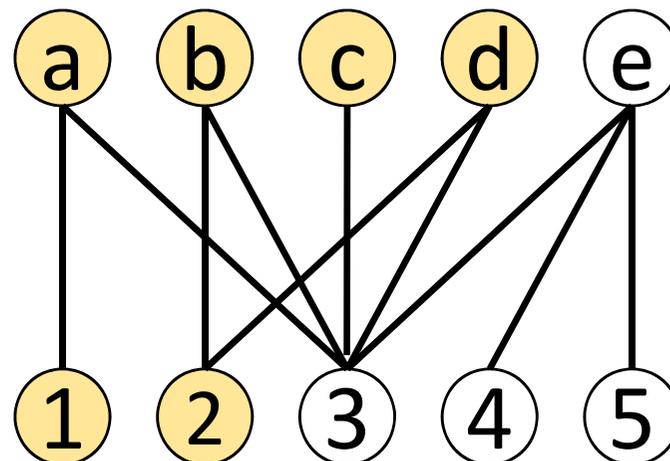
被覆制約つきマッチング問題

- 指定された頂点を全て被覆(カバー)するマッチングの有無を判定
 - 存在する場合は, そのようなマッチングを求めたい



片側被覆制約:

{1,2,3}をカバーする
マッチングは存在する



両側被覆制約:

{a,b,c,d},{1,2}をカバーする
マッチングは存在しない

あとで説明するように

- 両側被覆制約の問題 → 2つの片側被覆制約の問題に帰着可能
- 片側被覆制約の問題 → 最大マッチング問題に帰着可能

均衡価格の判定(その3)

マッチングを用いて、均衡価格の定義を書き換える
使う二部グラフ $G=(B \cup N, E)$

B は入札者に対応する頂点集合,

N は財に対応する頂点集合,

枝集合 $E = \{(i, j) \mid i \in B, j \in N, 0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)\}$

さらに、頂点 B, N の部分集合 B', N' を定義:

$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, \quad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\}$$

入札者 i と
最大利得の財 j
のペア

① 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)

$$\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)$$

② $q(i) > 0 \rightarrow$ 入札者 i に財の割り当てがある

③ $p(j) > 0 \rightarrow$ 財 j は誰かに割り当てられる

マッチングの枝は
 E に含まれる

マッチングは
 N' をカバーする

マッチングは
 B' をカバーする

均衡価格の判定: 例の続き

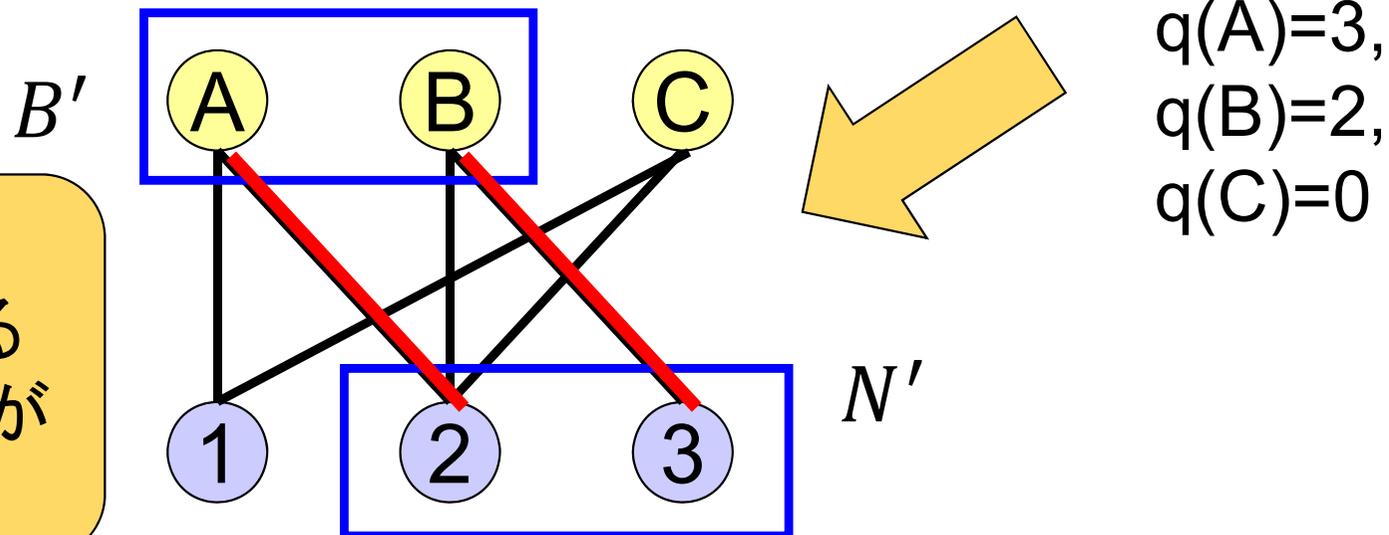
枝集合 $E = \{(i, j) \mid i \in B, j \in N, 0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)\}$

$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\}$

価格	$v(i, j)$	A	B	C
0	①	3	1	0
3	②	6	5	3
2	③	2	4	1

→

利得	A	B	C
①	3	1	0
②	3	2	0
③	0	2	-1



B' と N' を
カバーする
マッチングが
存在

例 その2

価格 $p(j)$	$v(i,j)$	A	B	C
0	①	3	1	1
3	②	6	5	3
2	③	2	4	4

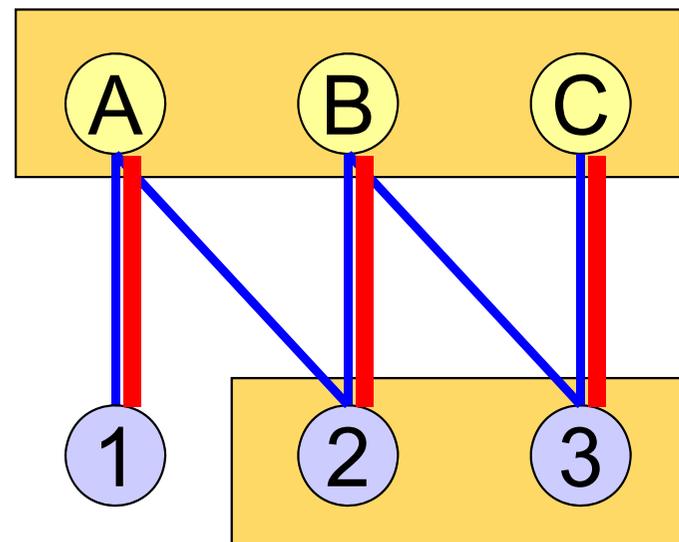
最大利得 $q(i)$ 3 2 2

枝集合 E の二部グラフにおいて、
 頂点集合 $B' \cup N'$ をカバーする
 マッチングが存在する
 \therefore この価格は均衡価格である

(このマッチングは均衡配分)

$B' = \{A, B, C\}$, $N' = \{2, 3\}$

$E = \{(A, 1), (A, 2), (B, 2), (B, 3), (C, 3)\}$



例 その3

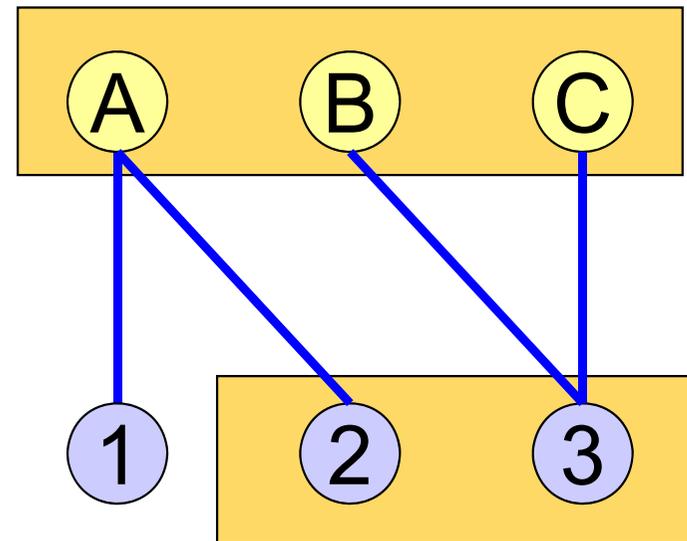
価格 $p(j)$	$v(i,j)$	A	B	C
0	①	3	1	1
3	②	6	5	3
1	③	2	4	4

最大利得 $q(i)$ 3 3 3

$$B' = \{A, B, C\}, N' = \{2, 3\}$$

$$E = \{(A, 1), (A, 2), (B, 3), (C, 3)\}$$

枝集合 E の二部グラフにおいて、
 頂点集合 $B' \cup N'$ をカバーする
 マッチングが存在しない
 \therefore この価格は均衡価格ではない



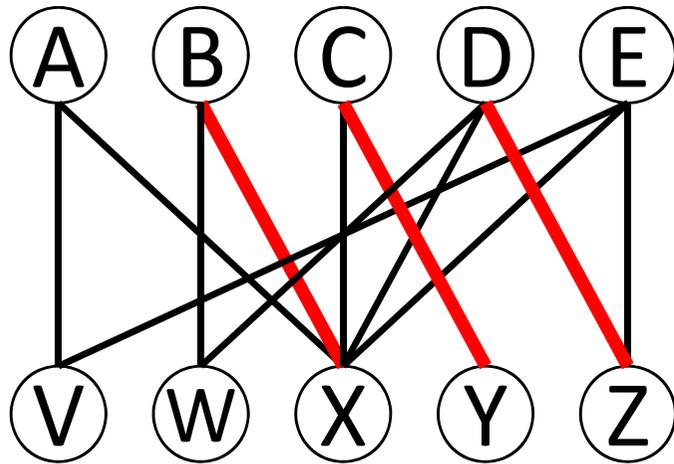
マッチングと交互路

マッチングに関する交互路

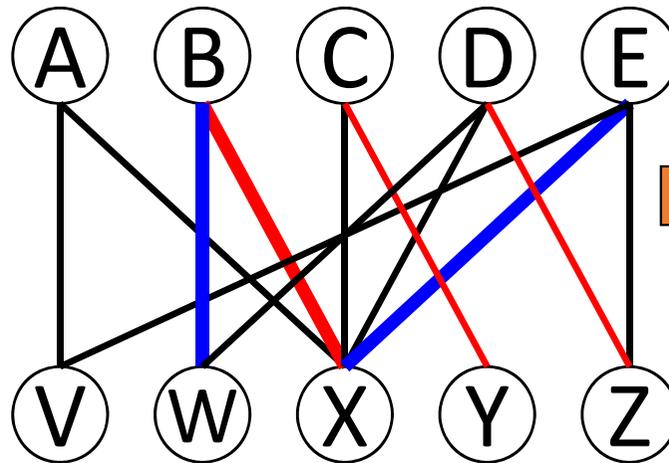
交互路 – 新しいマッチングを作るための「道具」

定義: マッチング M に関する**交互路**

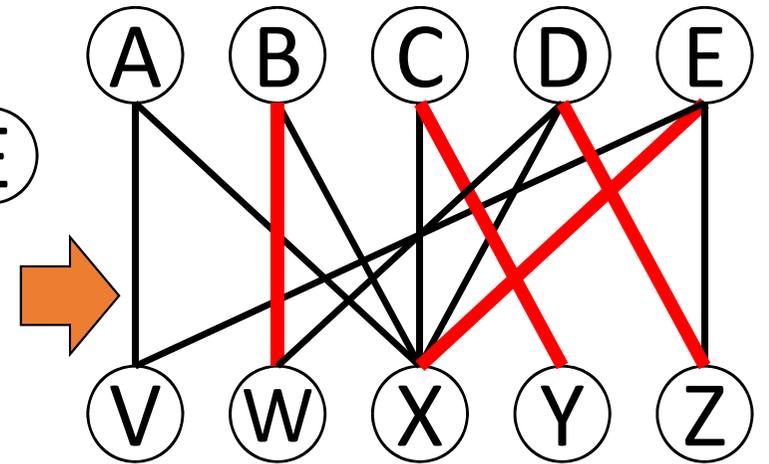
- (i) M の枝と M 以外の枝が**交互に現れる路**
- (ii) 路の最初の枝が M 以外 \rightarrow 路の始点は, M の枝の端点ではない
- (iii) 路の最後の枝が M 以外 \rightarrow 路の終点は, M の枝の端点ではない



マッチング M



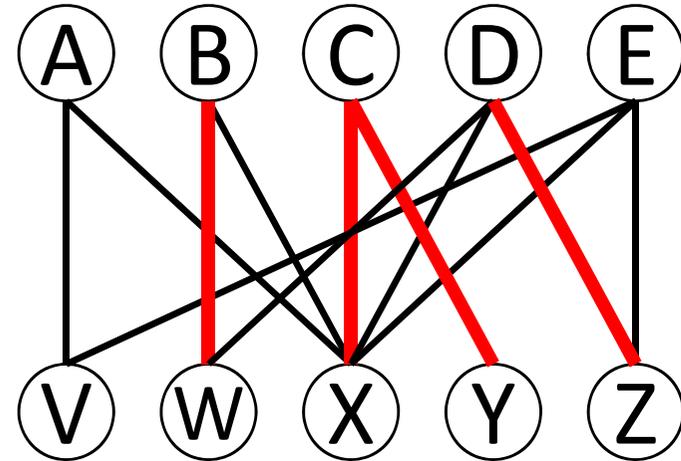
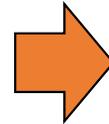
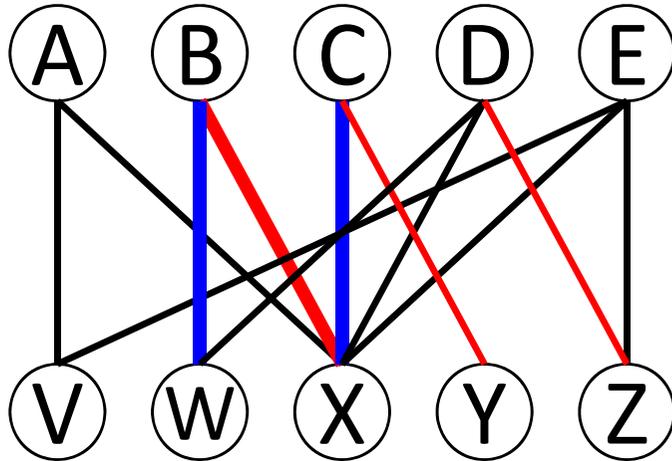
交互路



交互路を使って、
マッチングの枝を
入れ替えした結果

マッチングに関する交互路

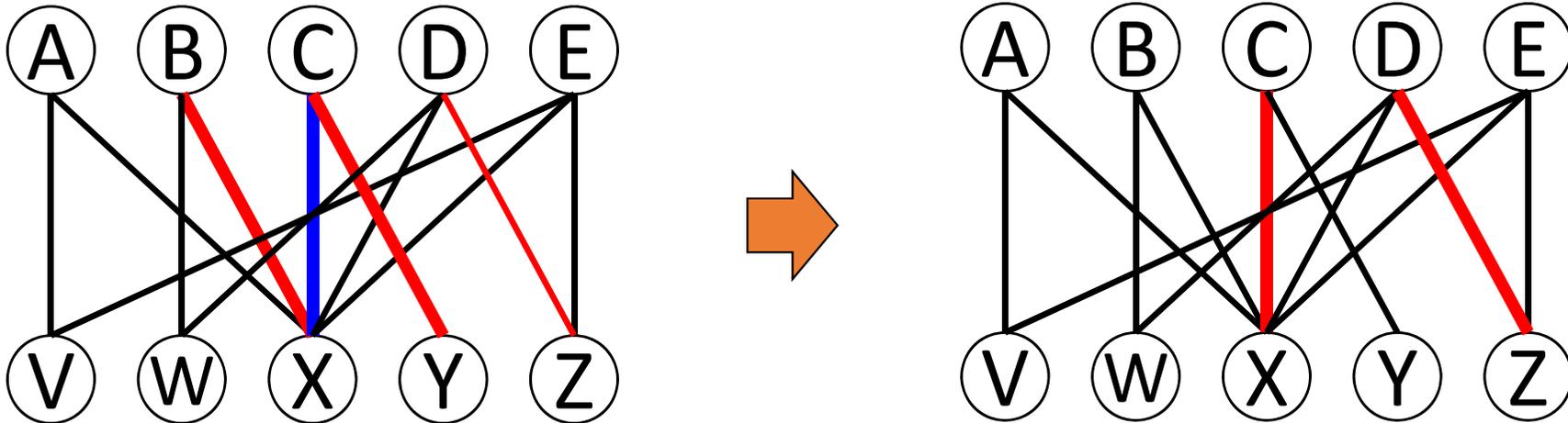
交互路でない例



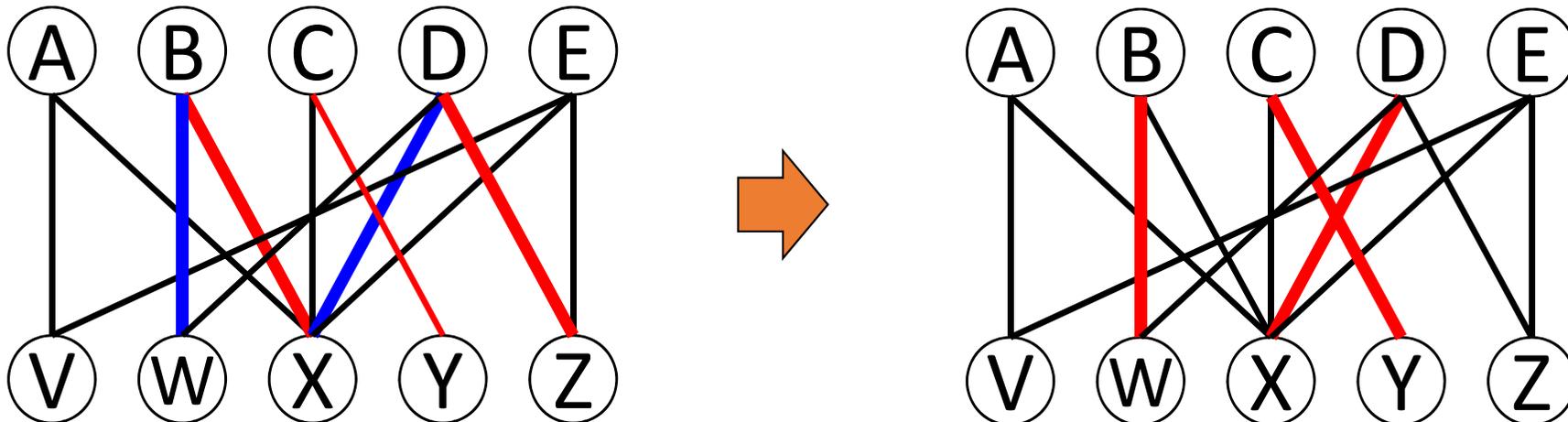
条件(ii)を満たさない
 → 枝を入れ替えても
 マッチングにならない

マッチングに関する交互路

交互路タイプ2: M 以外の枝数 = M の枝数 - 1
 (枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1減る「減少路」)



交互路タイプ3: M 以外の枝数 = M の枝数
 (枝を入れ替えても、マッチングの枝数は不変)



マッチングに関する交互閉路

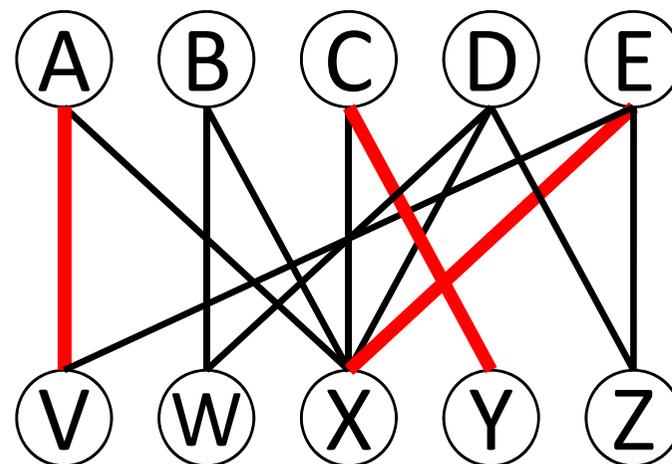
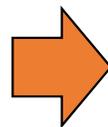
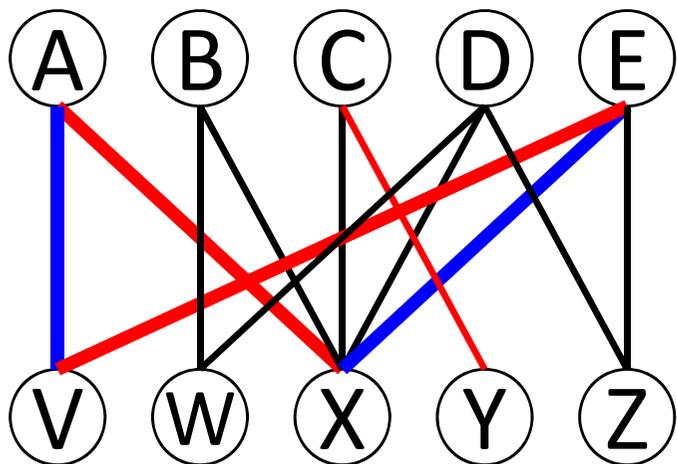
定義: マッチング M に関する**交互閉路**

= M の枝と M 以外の枝が交互に現れる閉路

交互閉路では、「 M 以外の枝数 = M の枝数」

→ 枝を入れ替えても、マッチングの枝数は不変

交互閉路の例

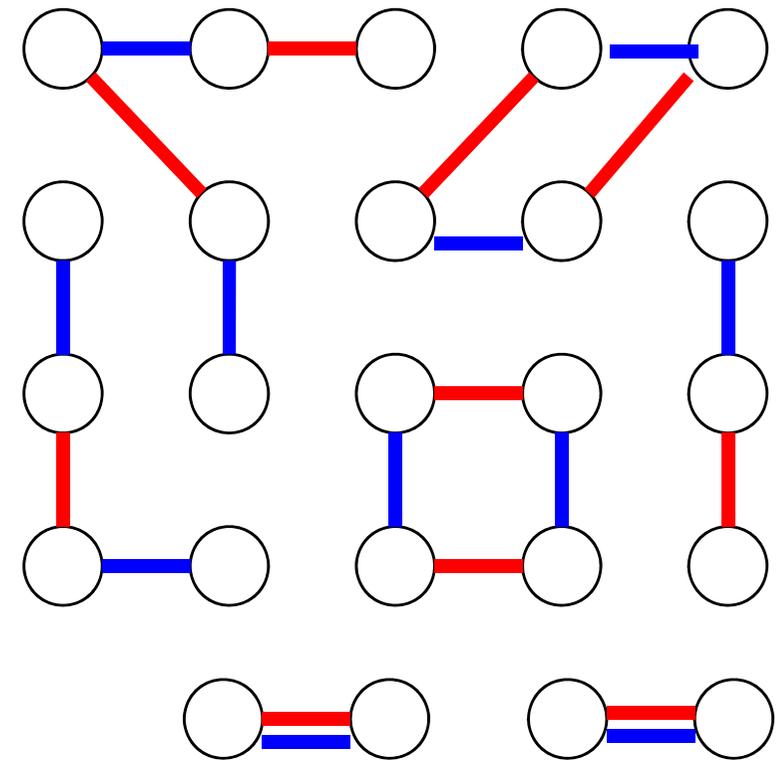


2つのマッチングに関する性質

命題 同じグラフの2つのマッチング M, M' に対し,
差集合 $(M' \setminus M) \cup (M \setminus M')$ は交互路, 交互閉路に分解可能.
 とくに, $|M'| > |M| \rightarrow M$ に関する増加路を含む.

(証明の概略)

グラフの各頂点には, M と M' の枝が
 高々1本ずつ接続するから.

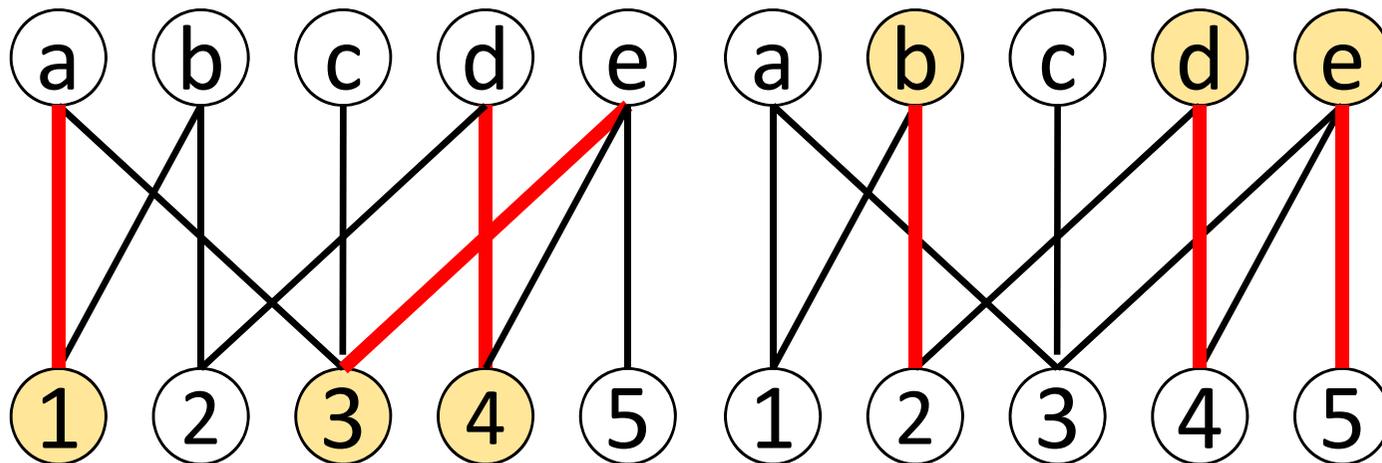


指定頂点をカバーするマッチング

片側被覆制約と両側被覆制約の関係

定理 $B' \subseteq B$ および $N' \subseteq N$ に対し,
 B' をカバーするマッチング, N' をカバーするマッチング
 がそれぞれ存在

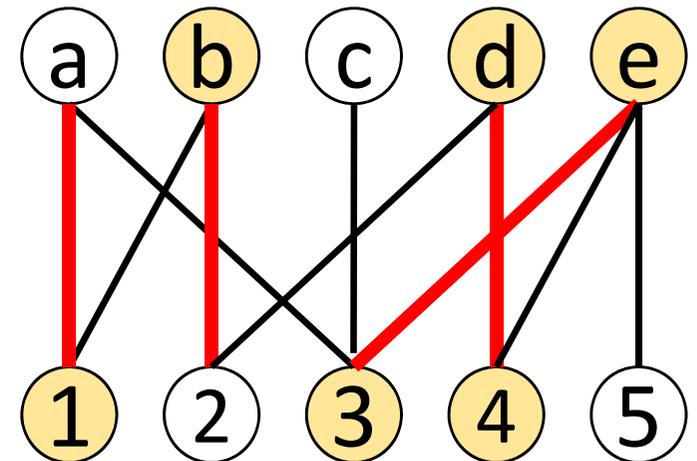
\leftrightarrow B' と N' を同時にカバーするマッチングが存在



$\{b, d, e\}, \{1, 3, 4\}$ を
 カバーする
 マッチング

$N' = \{1, 3, 4\}$ を
 カバーする
 マッチング

$B' = \{b, d, e\}$ を
 カバーする
 マッチング



片側被覆制約と両側被覆制約の関係

「片側→両側」の証明:

M: B' をカバーするマッチング

L: N' をカバーするマッチング

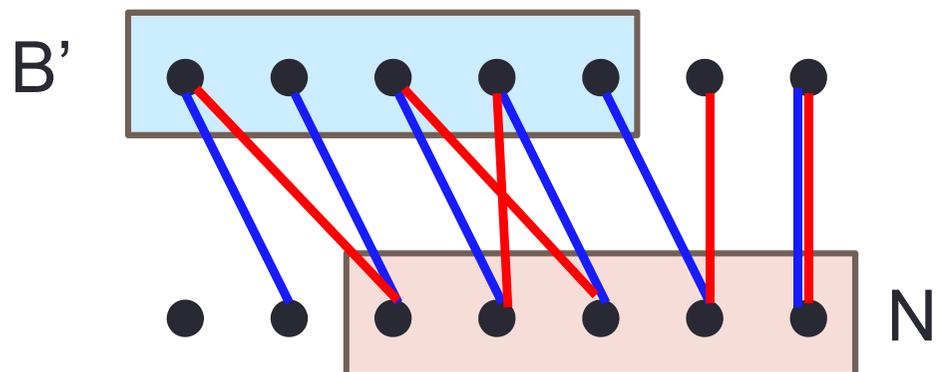
$M \setminus L$ の各枝の端点の一方は B' に含まれる

($\leftarrow \rightarrow$ B' に接続しない枝は $M \setminus L$ に含まれない)と仮定してよい

(\because そのような枝は不要)

同様に, $L \setminus M$ の各枝の端点の一方は N' に含まれると仮定してよい

- M, L の枝を用いて, B' と N' を同時にカバーするマッチングを作る



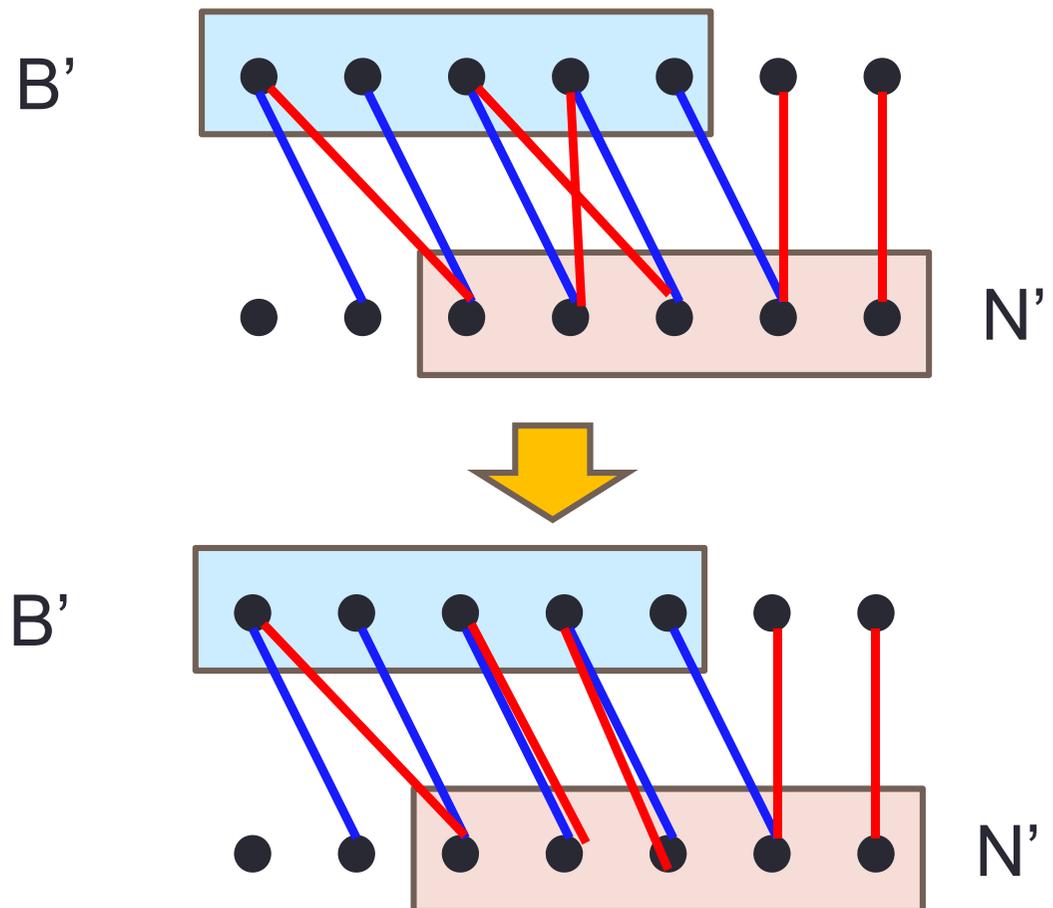
証明：交互閉路の扱い

枝集合 $(L \setminus M) \cup (M \setminus L)$ からなるグラフ
 → 交互路と交互閉路に分解できる

交互閉路 C が存在する場合

$L \cap C$ の枝を
 $M \cap C$ の枝に置き換えても、
 カバーされる頂点は不変

∴ 交互閉路は存在しないと仮定して良い



証明：枝数奇数の交互路の扱い

枝数が奇数の交互路 P が存在する場合

$|M \cap P| = |L \cap P| + 1$ の場合を考える.

($|L \cap P| = |M \cap P| + 1$ の場合も同様)

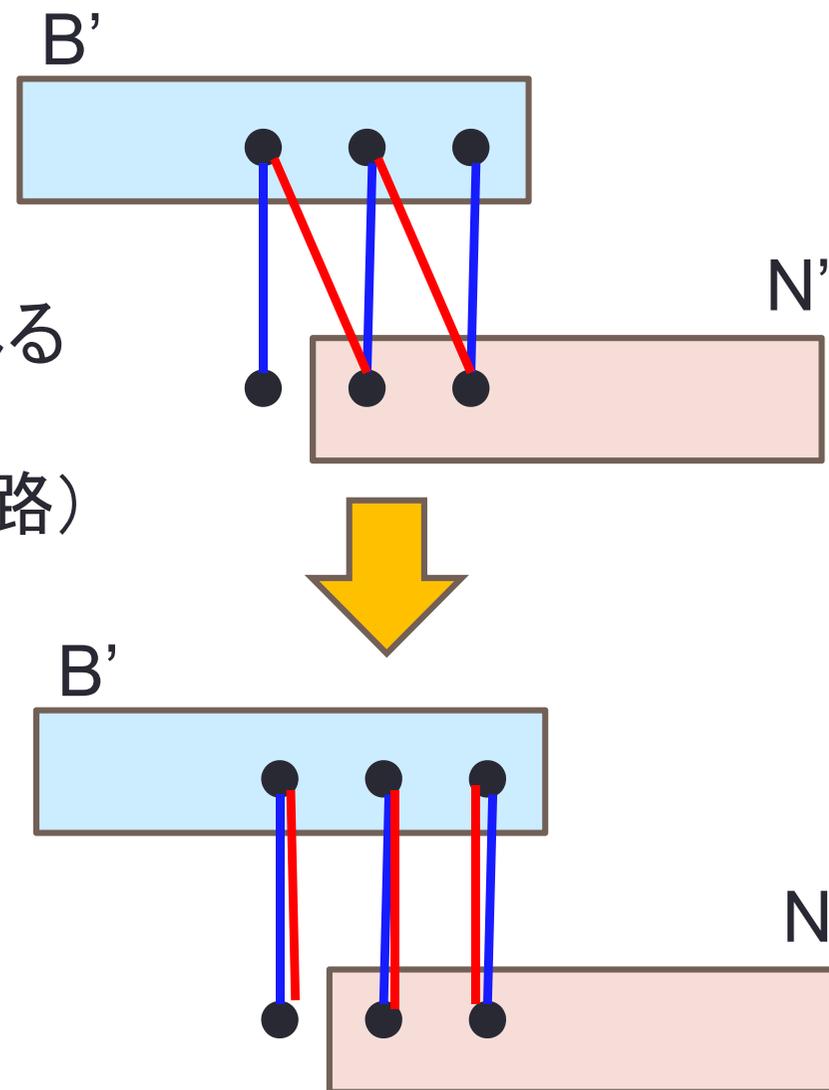
マッチング L の仮定より,

$L \cap P$ の枝の下側端点は N' に含まれる
これらの端点は $M \cap P$ によっても

カバーされている ($\because P$ は交互路)

$\therefore L \cap P$ の枝を $M \cap P$ の枝に
置き換えても, L は N' をカバーする

\therefore 枝数奇数の交互路は存在しないと
仮定して良い

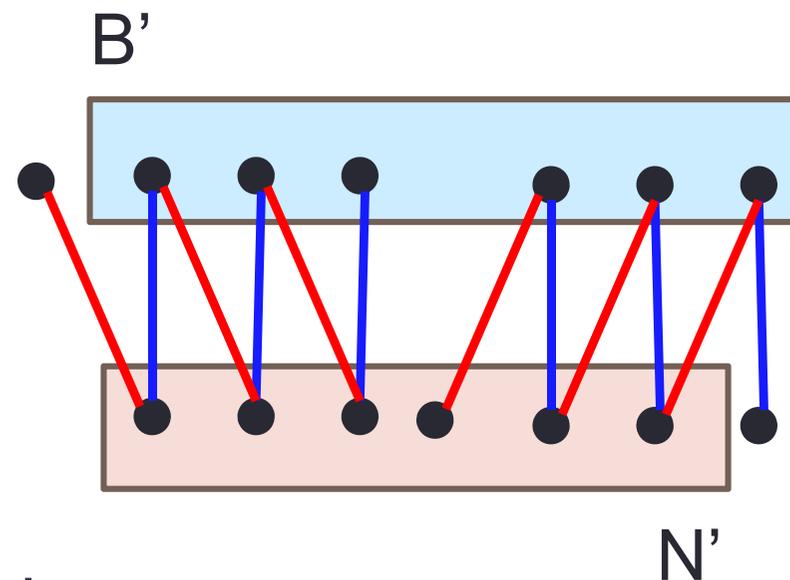


証明：枝数偶数の交互路の扱い

枝数が偶数の交互路 P が存在する場合

$|M \cap P| = |L \cap P|$ が成立

$\therefore P$ の最初の枝は L に含まれ、
最後の枝は M に含まれると
仮定して良い



P の枝数が偶数なので、

次の2つのケースのどちらかになる：

(i) 路 P の最初と最後の頂点 $\in B$

このとき、最初の頂点 $u \notin B'$

($\because u \in B'$ ならば、 u に M の枝が接続.

よって、 u が交互路の最初の頂点であることに矛盾)

(ii) 路 P の最初と最後の頂点 $\in N$

このとき、最後の頂点 $\notin B$ (\because 上記と同じ理由)

証明：枝数偶数の交互路の扱い

(i) 路 P の最初と最後の頂点 $\in B$

このとき、最初の頂点 $u \notin B'$.

よって、 u はカバーしなくてよい.

$L \cap P$ の枝の下側端点は N' に含まれる.

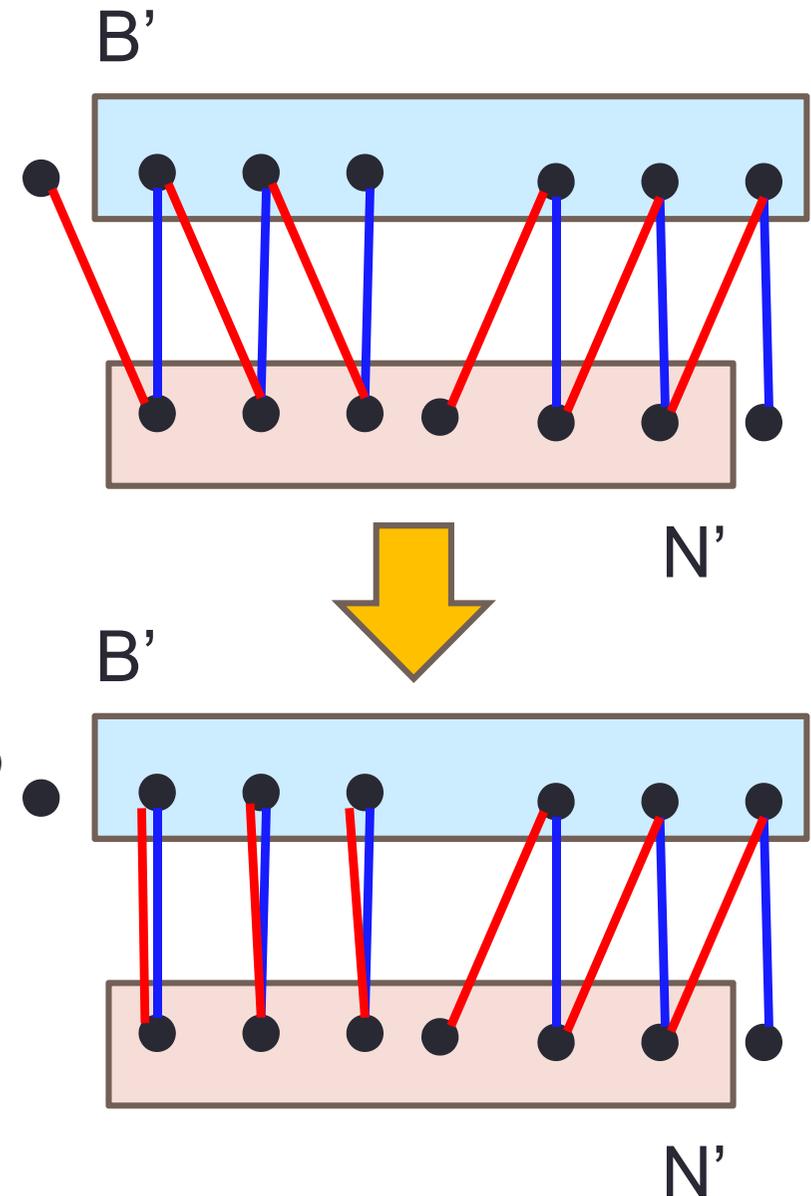
これらの端点は $M \cap P$ によっても

カバーされている.

($\because P$ は交互路)

$\therefore L \cap P$ の枝を $M \cap P$ の枝に

置き換えても、 L は N' をカバーする



証明：枝数偶数の交互路の扱い

枝数が偶数の交互路 P が存在する場合

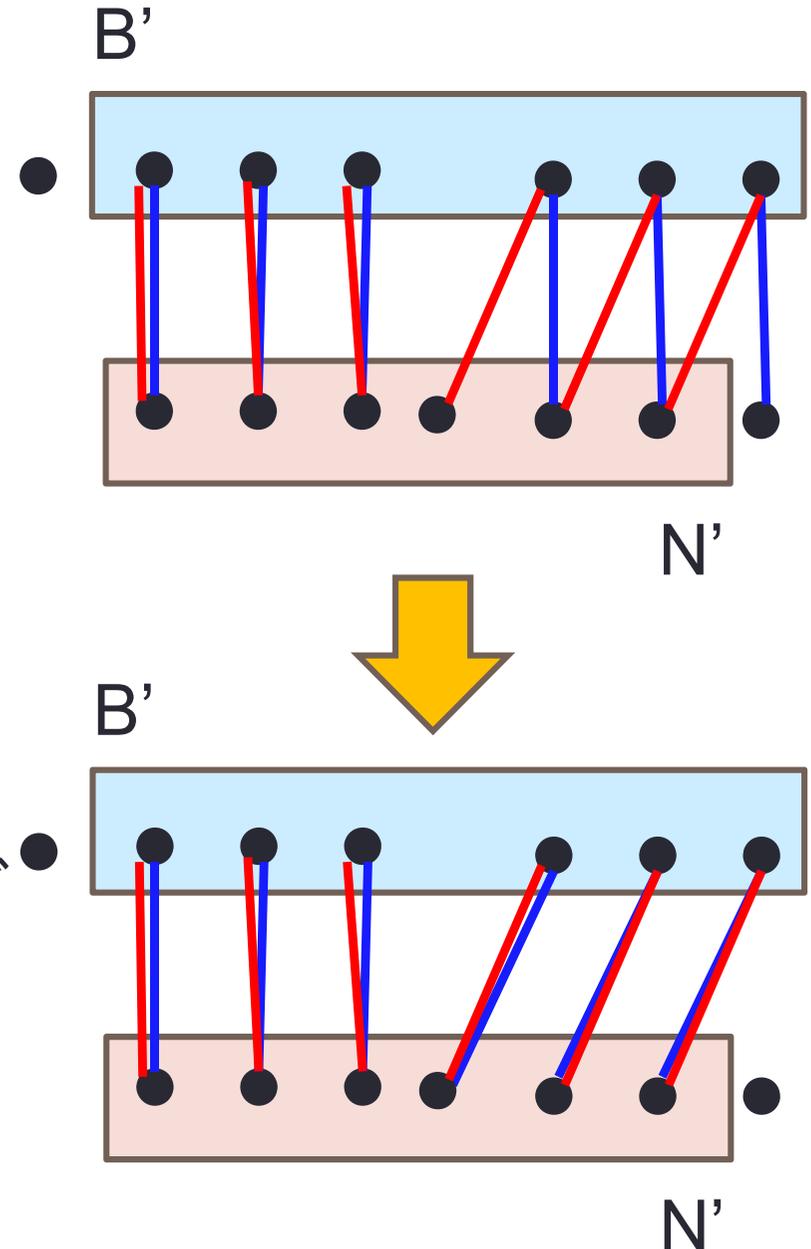
(ii) 路 P の最初と最後の頂点 $\in N$

(i) の証明と同様にして
 $M \cap P$ の枝を $L \cap P$ の枝に置き換えてよい

以上の修正により、交互閉路・交互路が
 なくなった

\therefore マッチング M と L は一致

$\therefore B'$ と N' を同時にカバーするマッチング



両側被覆制約を満たすマッチングの計算

定理 $B' \subseteq B$ および $N' \subseteq N$ に対し,
 B' をカバーするマッチング, N' をカバーするマッチング
がそれぞれ存在
 $\iff B'$ と N' を同時にカバーするマッチングが存在

この命題およびその証明より,

B' と N' を同時にカバーするマッチングは以下の手順で計算可能

(1) B' をカバーするマッチング M を計算.

存在しなければ, $B' \cup N'$ をカバーするマッチングも存在しない

(2) N' をカバーするマッチング L を計算.

存在しなければ, $B' \cup N'$ をカバーするマッチングも存在しない

(3) M と L の枝を使って, $B' \cup N'$ をカバーするマッチングを計算
(証明で説明したやり方を使えば簡単)

(1), (2) の計算方法は次回.

演習問題

下記のように評価値と財の価格(赤い数字)が与えられたとき、均衡価格か否か判定したい。

- (1) (i), (ii), (iii) それぞれに対し、判定のための二部グラフ(の枝集合E)を書け。
また、頂点集合 B' , N' を明記せよ(答えのみ書けばよい)
- (2) 頂点集合 $B' \cup N'$ を同時にカバーするマッチングが存在するか否か、調べよ。
存在する場合は具体的に書くこと(答えのみ書けばよい)

(i)

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

3
6

(ii)

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

0
5
6

(iii)

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

0
4
4
0