経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと離散最適化

第3回　二部グラフのマッチング

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

今回の講義の目標

前回の内容:
複数不可分財のオークションにおいて,
- 与えられた財の配分が均衡配分か否かを判定したい
- 与えられた均衡配分に対応する均衡価格を計算したい

→ 差分不等式系の求解に帰着 → 最短路問題に帰着

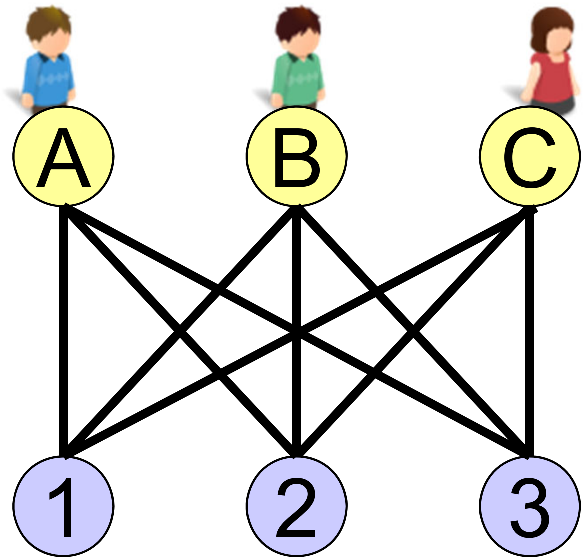
今回の内容:
複数不可分財のオークションにおいて,
- 与えられた財の価格が均衡価格か否かを判定したい
- 与えられた均衡価格に対応する均衡配分を計算したい

→ 2部グラフのマッチング問題に帰着

均衡価格の判定:例

複数不可分財のオークションにおいて,

- 与えられた財の価格が均衡価格か否かを判定したい
- 与えられた均衡価格に対応する均衡配分を計算したい



価格	v(i,j)	A	B	C
0	①	3	1	0
3	②	6	5	3
2	③	2	4	1

この価格は均衡価格か?

均衡価格の定義

定義: 財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格

⇔ 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在

ただし $q(i) \equiv \max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$ ← 入札者 i の最大利得

① 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）
→ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$
② 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha(i) = 0$） → $q(i) \le 0$
③ 財 j が誰にも割当られない → $p(j) = 0$

条件②, ③は対偶をとると わかりやすい

② 入札者 i に財の割り当てがある（$\alpha(i) \neq 0$） ← $q(i) > 0$
③ 財 j は誰かに割り当てられる ← $p(j) > 0$

均衡価格の判定(その2)

均衡価格の定義の書き換え:

財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格

➔➔ 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在

ただし $q(i) \equiv \max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)

➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$

② $q(i) > 0$ ➔ 入札者 i に財の割り当てがある

③ $p(j) > 0$ ➔ 財 j は誰かに割り当てられる

入札者への財の割当を, 二部グラフのマッチングと見なし,

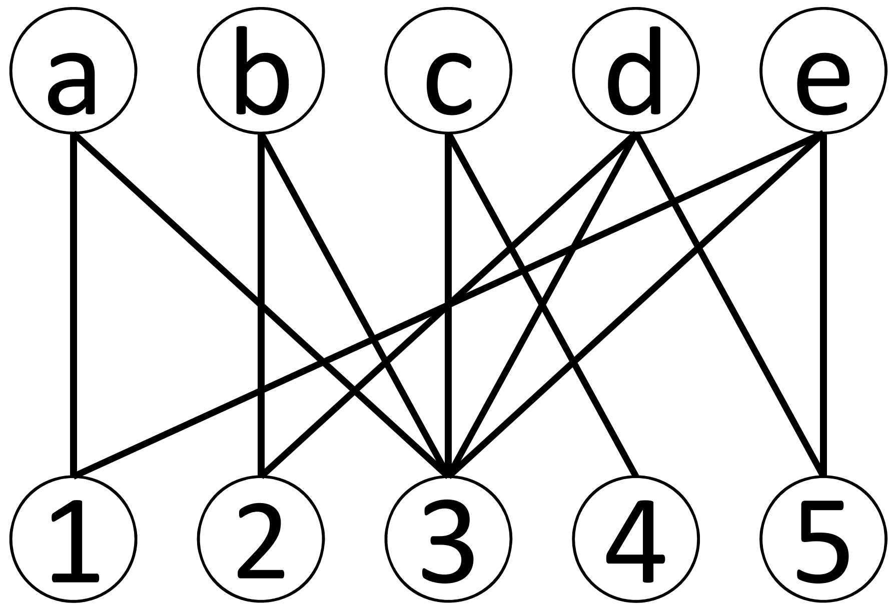
上記の条件を書き換える

二部グラフ

- 例：入札者への財の割り当て
  - 5人の入札者 B={a, b, c, d, e}　5つの財 N={1, 2, 3, 4, 5}
  - 各々の入札者は欲しい財と欲しくない財がある

  ➔ グラフで表現可能

頂点の2つのグループ
B と N の間にのみ，枝が存在
🡐 二部グラフと呼ばれる

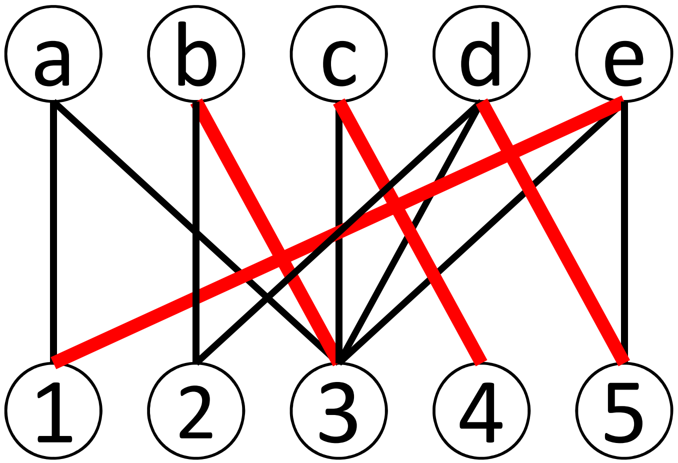


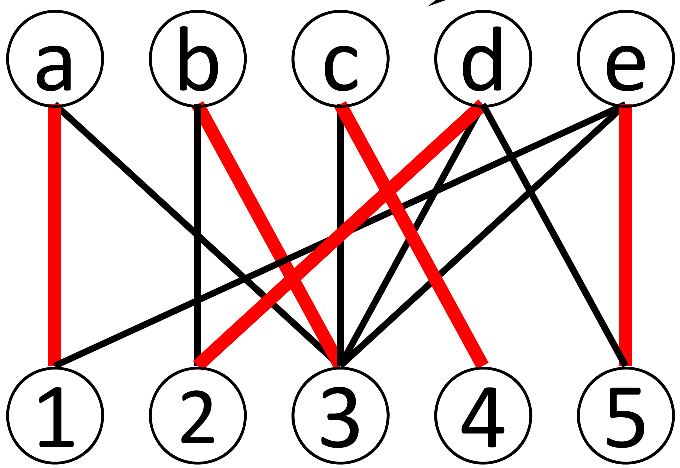
二部グラフ G の
　頂点集合が B∪N,
　枝集合が E のとき,
G=(B∪N, E) のように表現する
※2部グラフにおいて，B と N の頂点数は同じでなくても良い

二部グラフのマッチング

- できるだけ多くの入札者に，欲しい財を割り当てたい
  - 各入札者には，高々１つの財が割り当て可能
  - 各財は，高々１人の入札者に割り当て可能

  ➔ 財の割当を枝集合で表現可能





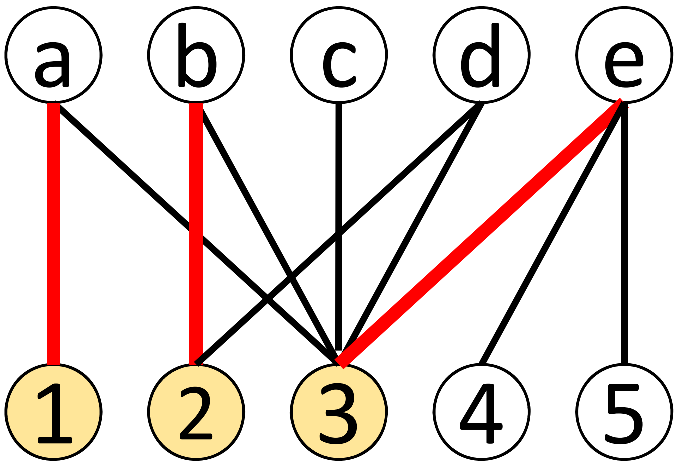
- （グラフの）マッチング：

  グラフの枝集合であって，各頂点に接続する枝の数（次数）が１以下
- 最大（サイズ）マッチング：

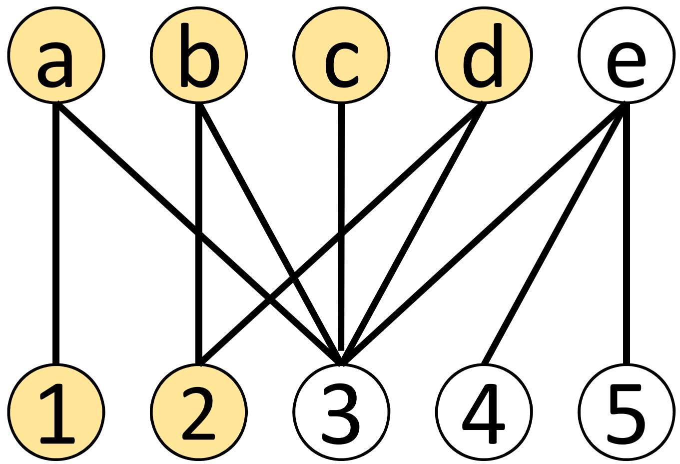
  与えられたグラフのマッチングの中で，枝数最大のもの

被覆制約つきマッチング問題

- 指定された頂点を全て被覆(カバー)するマッチングの有無を判定
  - 存在する場合は，そのようなマッチングを求めたい



片側被覆制約:
{1,2,3}をカバーする
マッチングは存在する



両側被覆制約:
{a,b,c,d},{1,2}をカバーする
マッチングは存在しない

あとで説明するように

- 両側被覆制約の問題 → ２つの片側被覆制約の問題に帰着可能
- 片側被覆制約の問題→ 最大マッチング問題に帰着可能

均衡価格の判定(その3)

マッチングを用いて，均衡価格の定義を書き換える

使う二部グラフ G=(B∪N, E)

B は入札者に対応する頂点集合，

N は財に対応する頂点集合，

枝集合 $E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \leq v(i,j) - p(j) = q(i)\}$

入札者 i と最大利得の財 j のペア

さらに，頂点B, N の部分集合 B', N' を定義：

$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}$, $N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)
  ➔ $0 \leq v(i,j) - p(j) = q(i)$

マッチングの枝はEに含まれる

② $q(i) > 0$ ➔ 入札者 i に財の割り当てがある

マッチングはB'をカバーする

③ $p(j) > 0$ ➔ 財 j は誰かに割り当てられる

マッチングはN'をカバーする

均衡価格の判定：例の続き

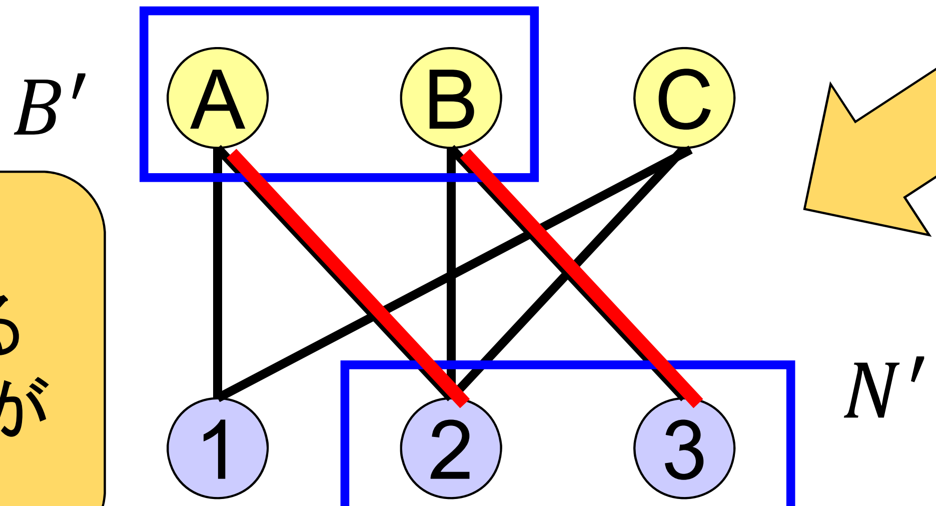
枝集合 $E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)\}$

$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\},\ \ N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$

価格	v(i,j)	A	B	C
0	①	3	1	0
3	②	6	5	3
2	③	2	4	1

利得	A	B	C
①	3	1	0
②	3	2	0
③	0	2	-1

q(A)=3,
q(B)=2,
q(C)=0



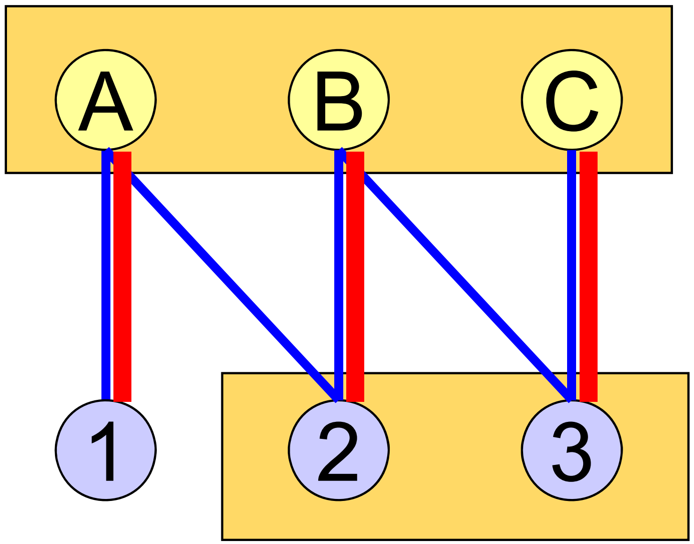
B'とN'をカバーするマッチングが存在

例 その2

価格p(j)	v(i,j)	A	B	C
0	①	$\boxed{3}$	1	1
3	②	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	3
2	③	2	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$

最大利得 q(i)　3　2　2

B’={A,B,C}, N’={2,3}
E={(A,1), (A,2), (B,2), (B,3), (C,3)}



枝集合 E の二部グラフにおいて,
頂点集合 B’∪N’ をカバーする
マッチングが存在する
∴ この価格は均衡価格である

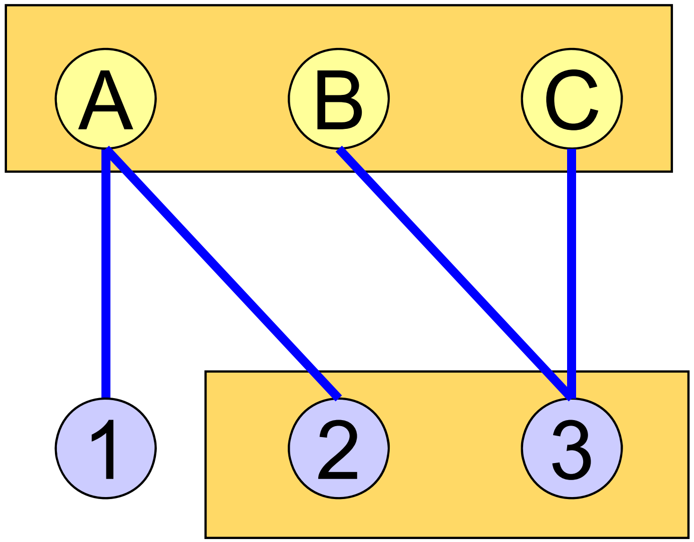
（このマッチングは均衡配分）

例 その3

価格p(j)
0
3
1

v(i,j)	A	B	C
①	$\boxed{3}$	1	1
②	$\boxed{6}$	5	3
③	2	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$
最大利得 q(i)	3	3	3

B’={A,B,C}, N’={2,3}
E={(A,1), (A,2), (B,3), (C,3)}



枝集合 E の二部グラフにおいて，
頂点集合 B’∪N’ をカバーする
マッチングが存在しない
∴ この価格は均衡価格ではない

マッチングと交互路

マッチングに関する交互路

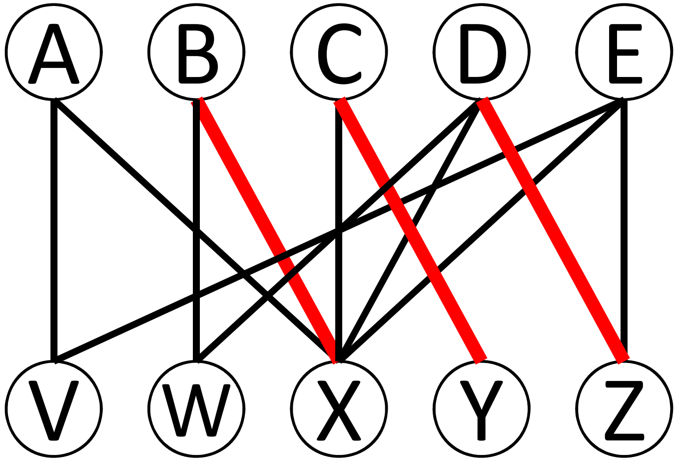
交互路 – 新しいマッチングを作るための「道具」

定義：マッチング Mに関する交互路

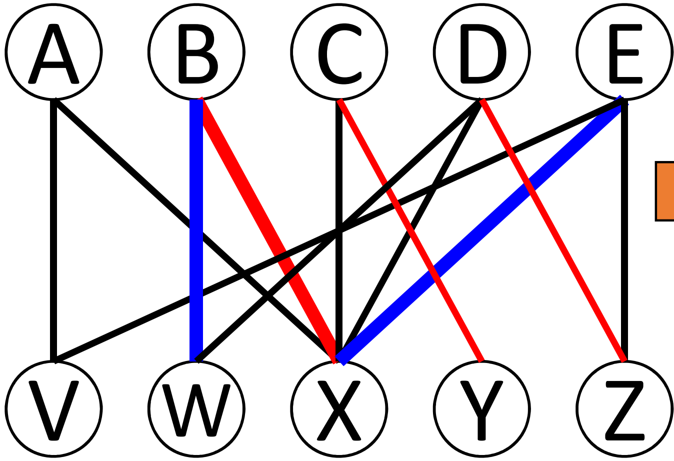
(i) Mの枝とM以外の枝が交互に現れる路

(ii) 路の最初の枝がM以外➔路の始点は，Mの枝の端点ではない

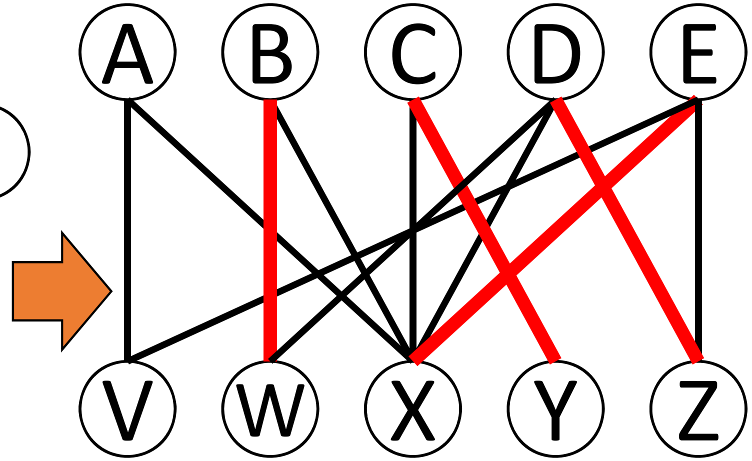
(iii) 路の最後の枝がM以外➔路の終点は，Mの枝の端点ではない



マッチング M

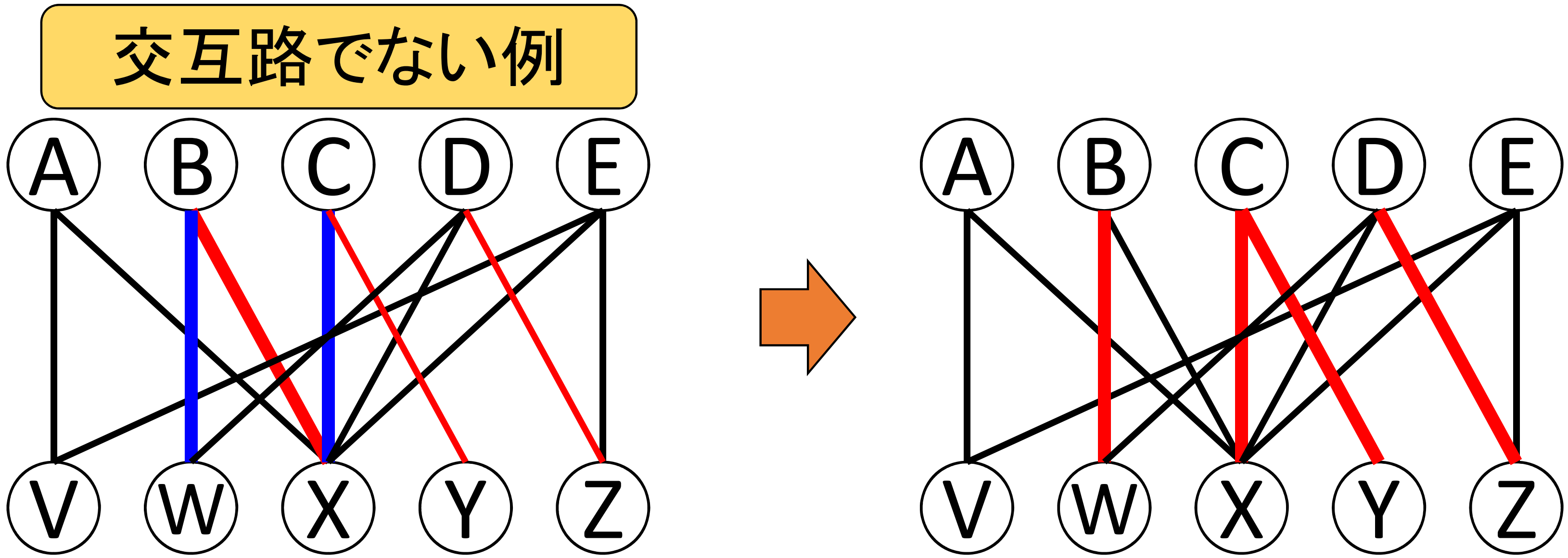


交互路



交互路を使って，マッチングの枝を入れ替えした結果

マッチングに関する交互路



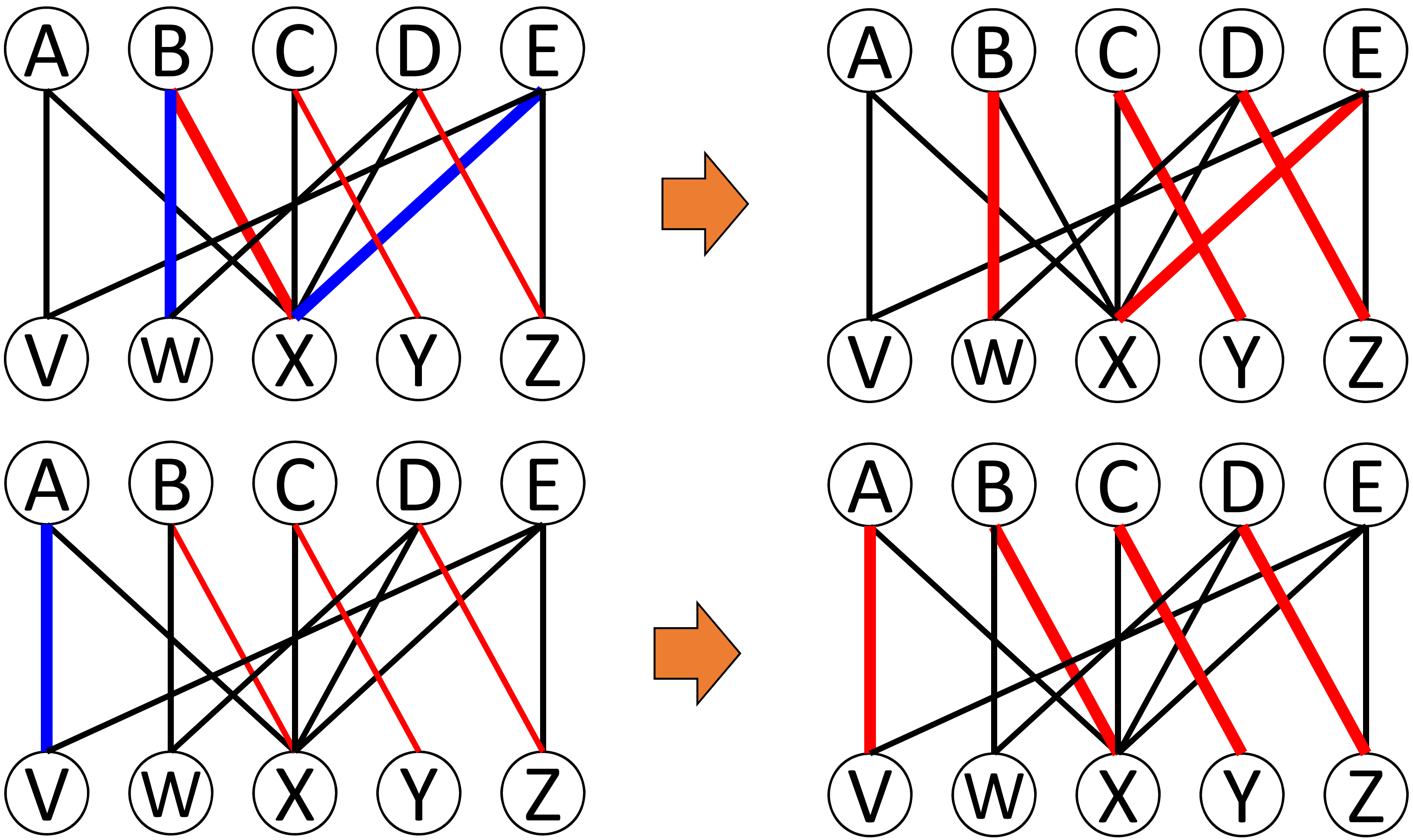
条件(ii)を満たさない

➔枝を入れ替えても

マッチングにならない

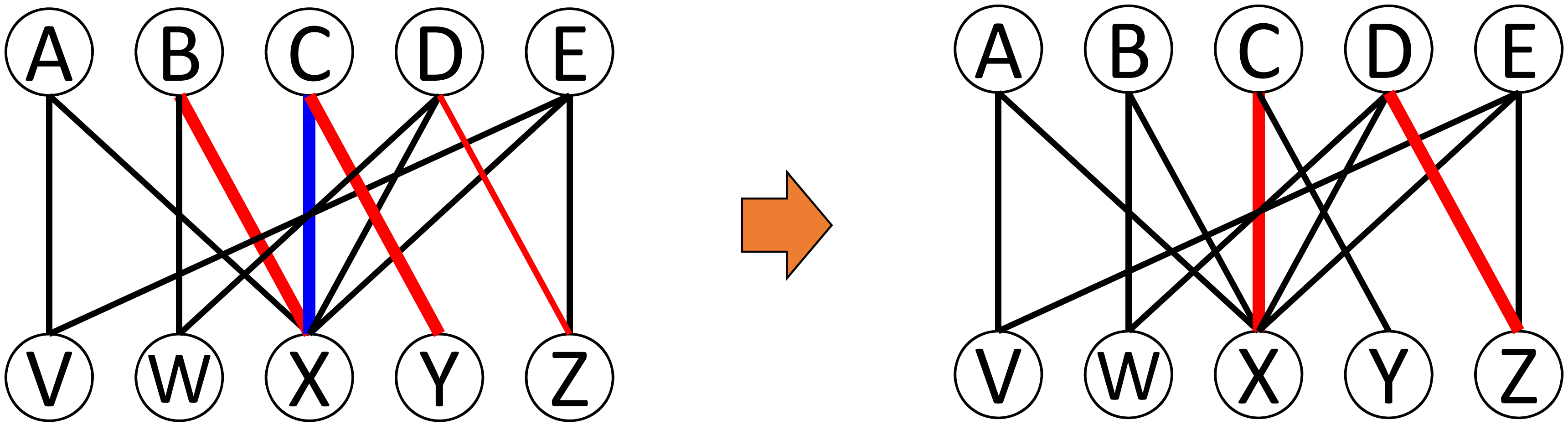
マッチングに関する交互路

交互路タイプ1：M以外の枝数＝Mの枝数＋1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1増える）
➔ 増加路と呼ばれる

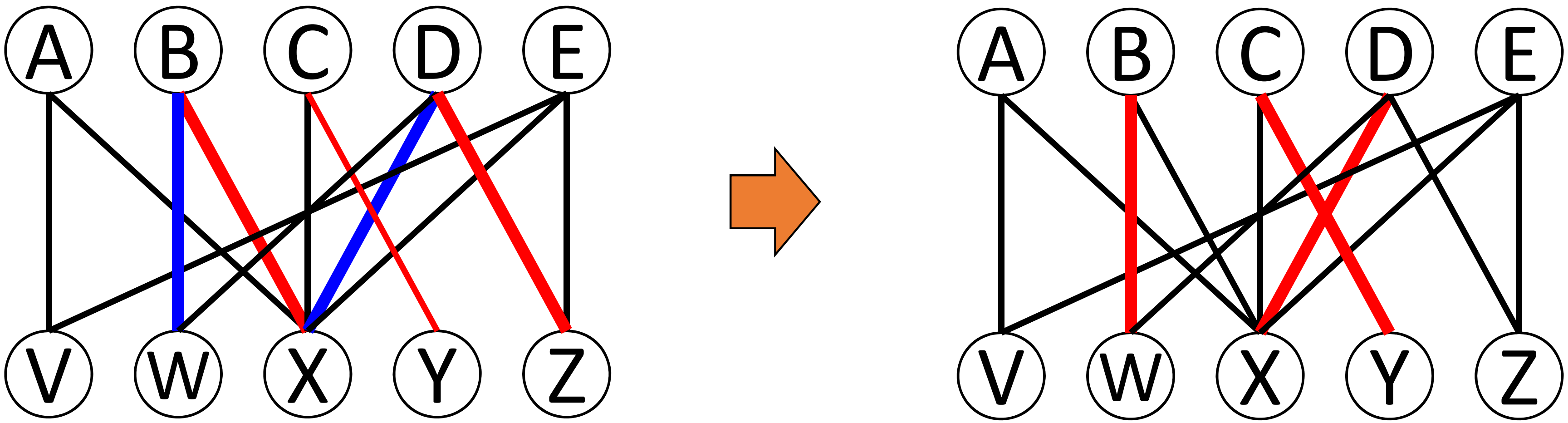


マッチングに関する交互路

交互路タイプ2：M以外の枝数＝Mの枝数−1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1減る「減少路」）



交互路タイプ3：M以外の枝数＝Mの枝数
（枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変）

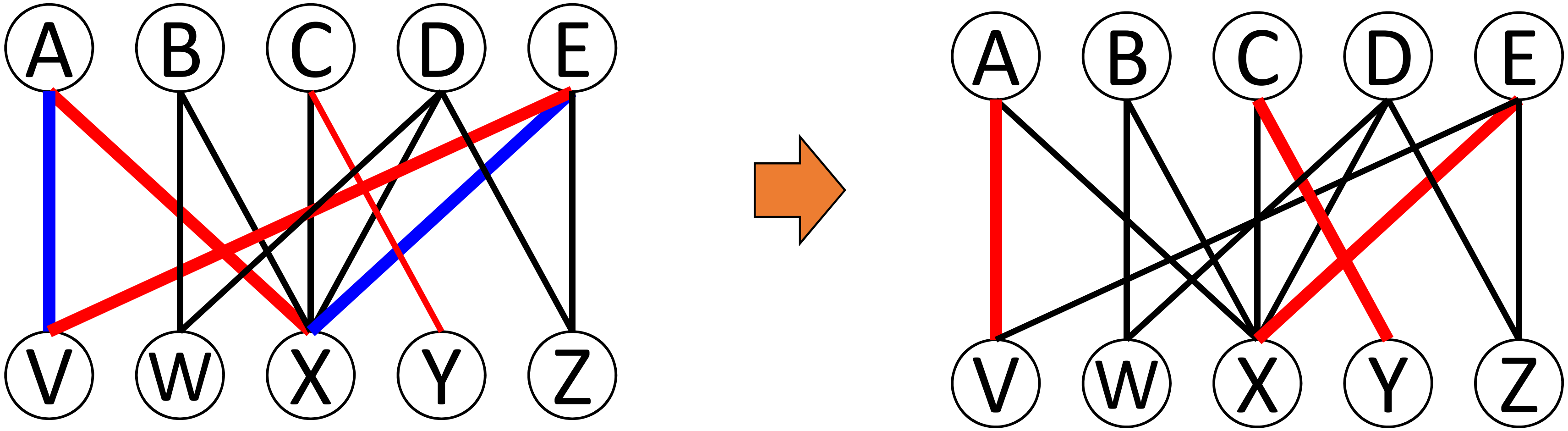


マッチングに関する交互閉路

定義: マッチング Mに関する交互閉路
＝Mの枝とM以外の枝が交互に現れる閉路

交互閉路では，「M以外の枝数＝Mの枝数」
➔枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変

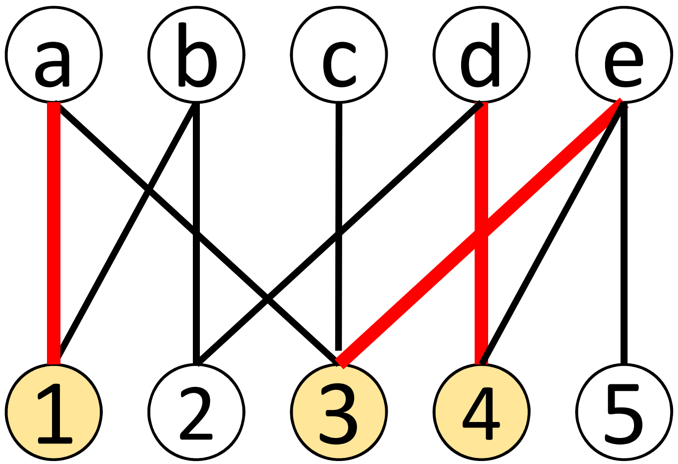
交互閉路の例

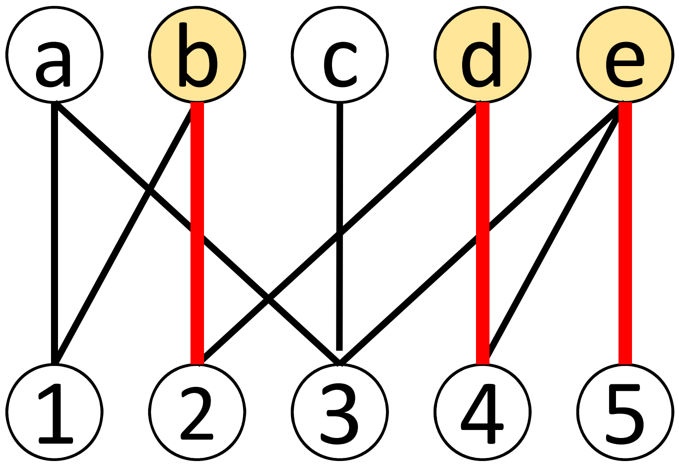


指定頂点をカバーするマッチング

片側被覆制約と両側被覆制約の関係

定理　B’ ⊆ B および N’ ⊆ N に対し,
B’ をカバーするマッチング,　N’ をカバーするマッチング
　　がそれぞれ存在
　　　　　　　　⟷ B’ と N’を同時にカバーするマッチングが存在

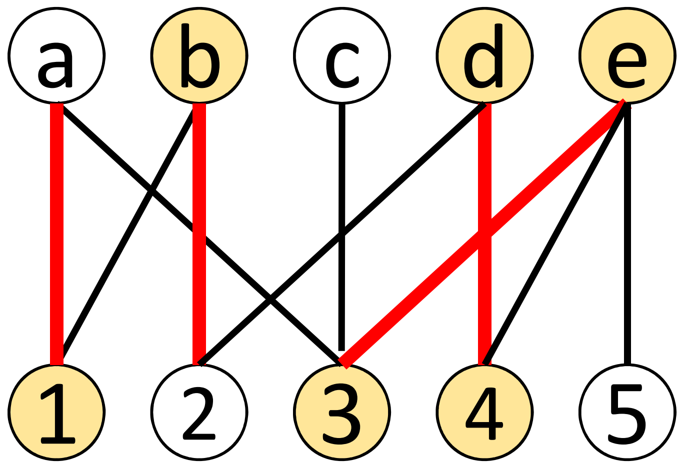




{b,d,e},{1,3,4} を
カバーする
マッチング

N’={1,3,4} を
カバーする
マッチング

B’={b,d,e} を
カバーする
マッチング

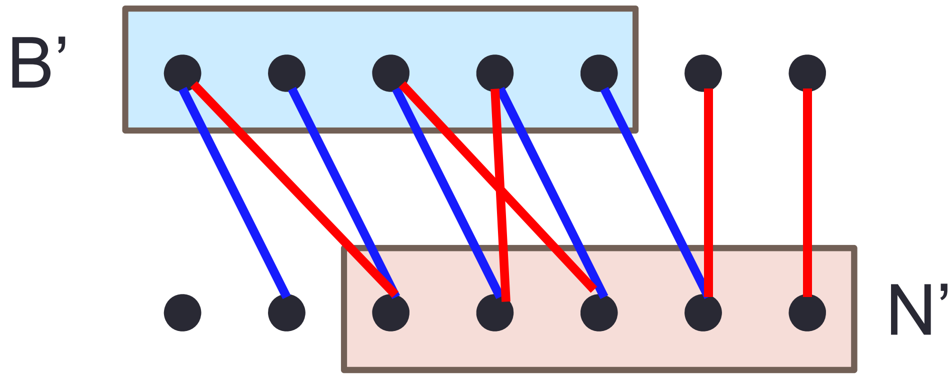


片側被覆制約と両側被覆制約の関係

「片側➔両側」の証明：

- M: B' をカバーするマッチング
  M の各枝の端点の一方は B' に含まれる
  (←→ B' に接続しない枝は M に含まれない)と仮定してよい
- L: N' をカバーするマッチング
  L の各枝の端点の一方は N' に含まれると仮定してよい

- M, L の枝を用いて，B' と N'を同時にカバーするマッチングを作る



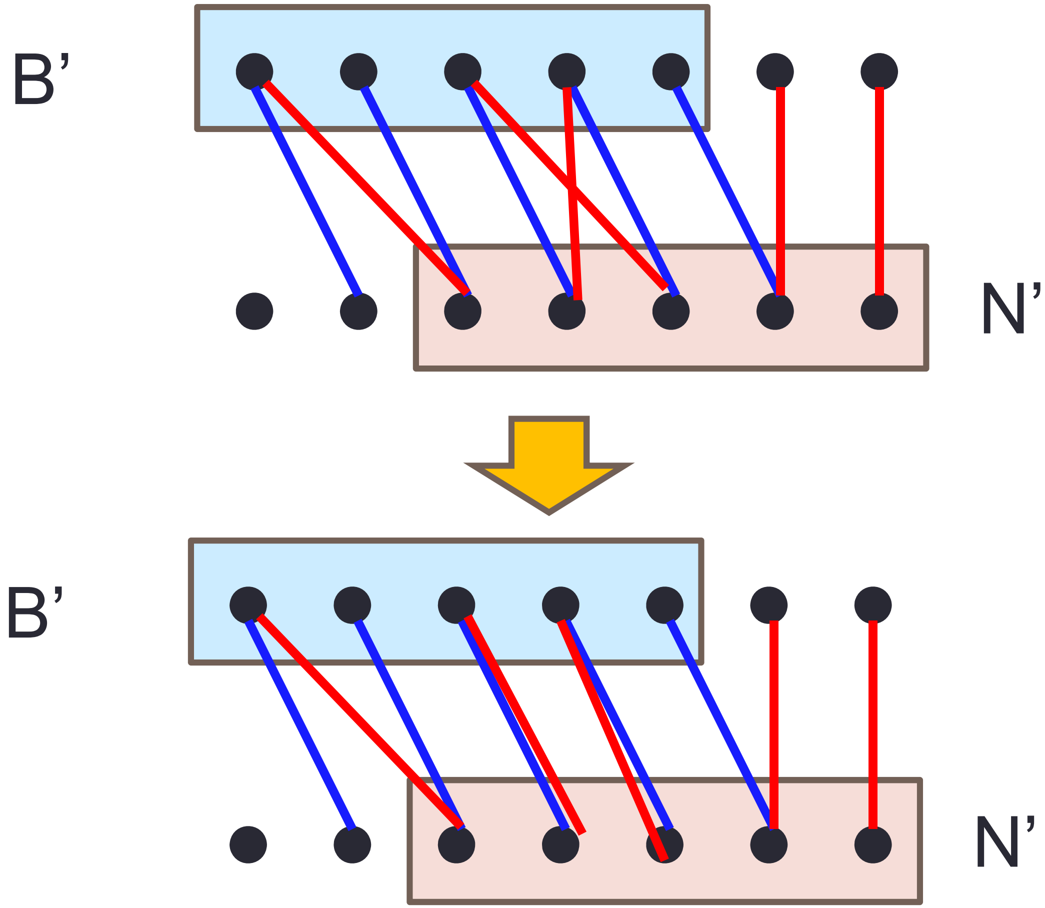
証明: 交互閉路の扱い

枝集合 M∪L からなるグラフ → 交互路と交互閉路に分解できる

交互閉路 C が存在する場合

L∩C の枝をM∩Cの枝に置き換えても，L は N' をカバーする

∴ 交互閉路は存在しないと仮定して良い

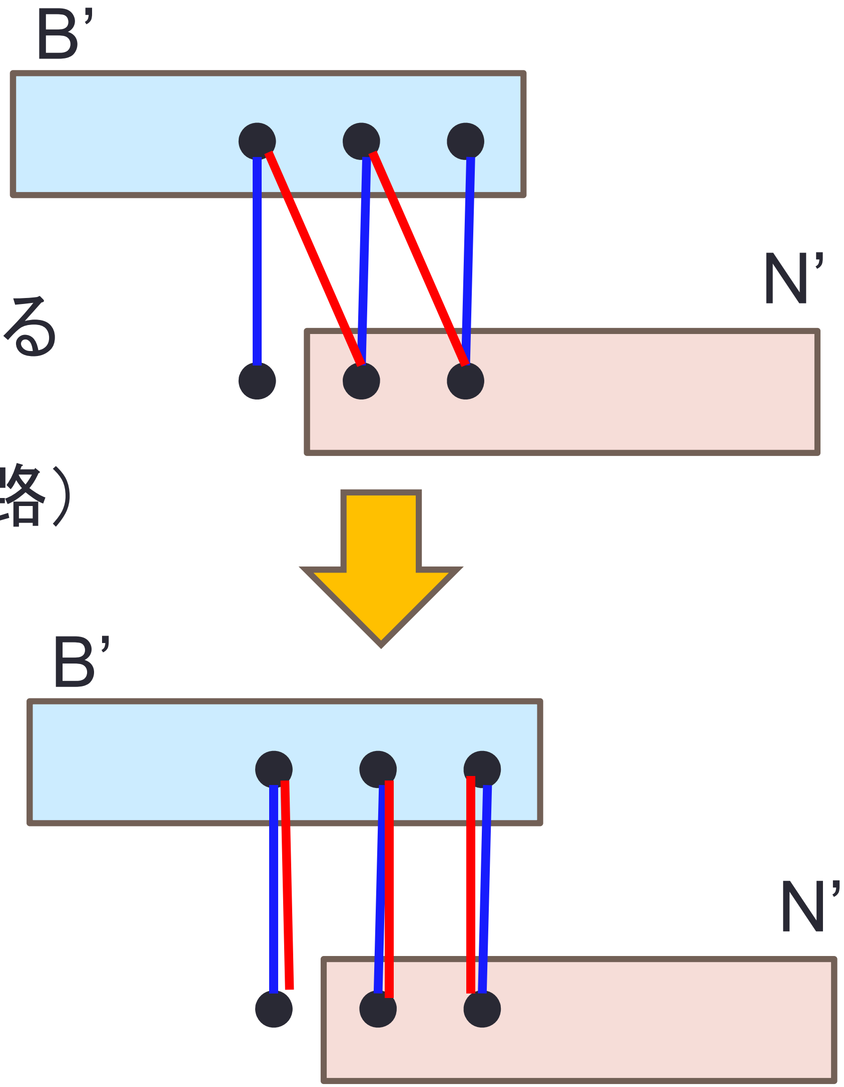


証明：枝数奇数の交互路の扱い

枝数が奇数の交互路 P が存在する場合

|M∩P|=|L∩P|+1 の場合を考える.

（ |L∩P|=|M∩P|+1 の場合も同様）



マッチング L の仮定より,

L∩P の枝の下側端点は N’ に含まれる

これらの端点は M∩P によっても

カバーされている（∵P は交互路）

∴ L∩P の枝をM∩Pの枝に

置き換えても，L は N’ をカバーする

∴枝数奇数の交互路は存在しないと

仮定して良い

証明：枝数偶数の交互路の扱い

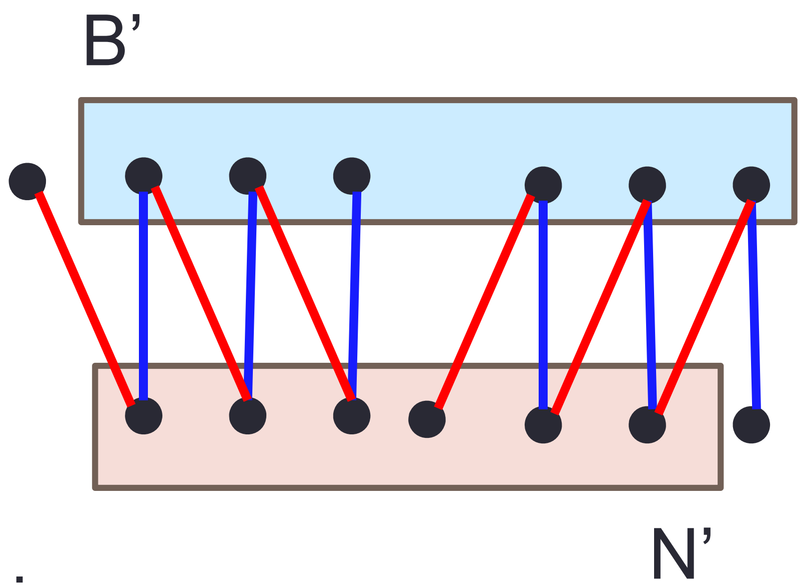
枝数が偶数の交互路 P が存在する場合

|M∩P|=|L∩P| が成立

∴ P の最初の枝は L に含まれ，

最後の枝は M に含まれると

仮定して良い



Pの枝数が偶数なので，

次の2つのケースのどちらかになる：

(i) 路 P の最初と最後の頂点∈B

このとき，最初の頂点 u∉B’

（∵ u∈B’ ならば，u に M の枝が接続．

よって，u が交互路の最初の頂点であることに矛盾）

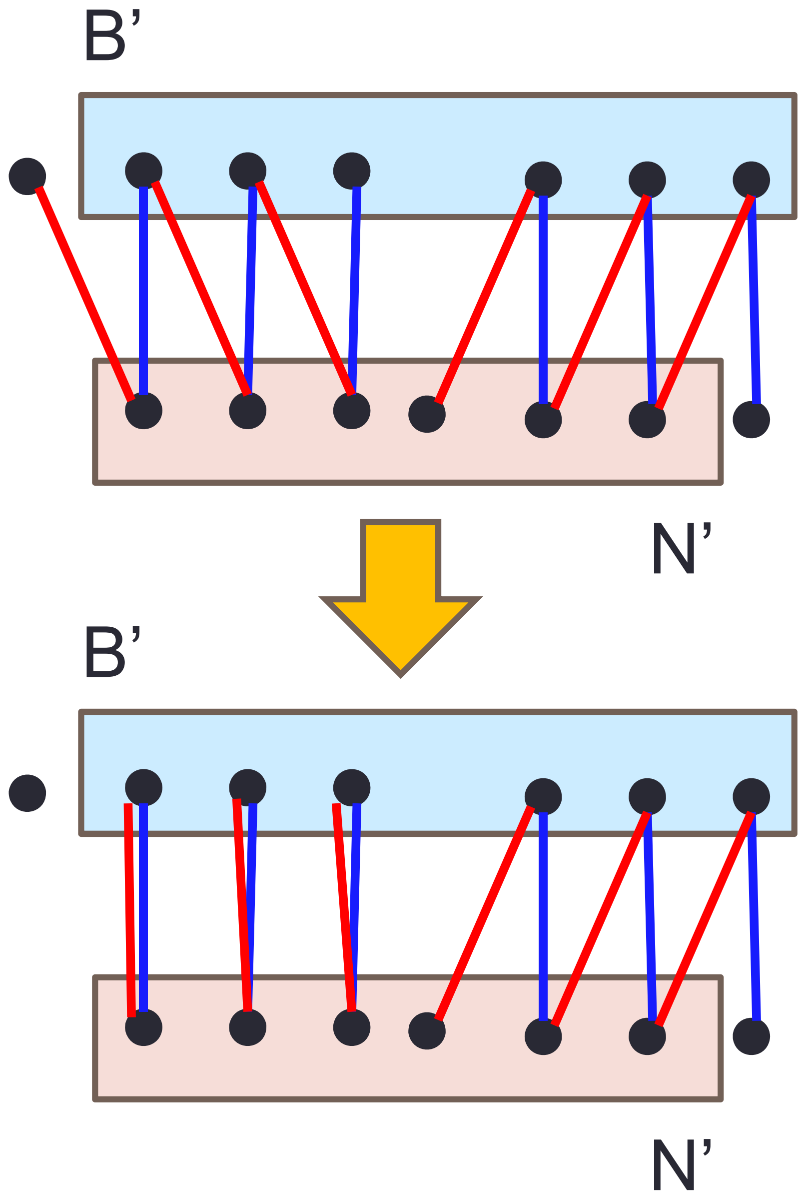
(ii)路 P の最初と最後の頂点∈N

このとき，最後の頂点 ∉ B　（∵ 上記と同じ理由）

証明：枝数偶数の交互路の扱い

(i) 路 P の最初と最後の頂点∈B
このとき，最初の頂点 u∉B’ .
よって，u はカバーしなくてよい.

L ∩P の枝の下側端点は N’ に含まれる.
これらの端点は M∩P によっても
カバーされている.
（∵P は交互路）
∴ L∩P の枝をM∩Pの枝に
置き換えても，L は N’ をカバーする



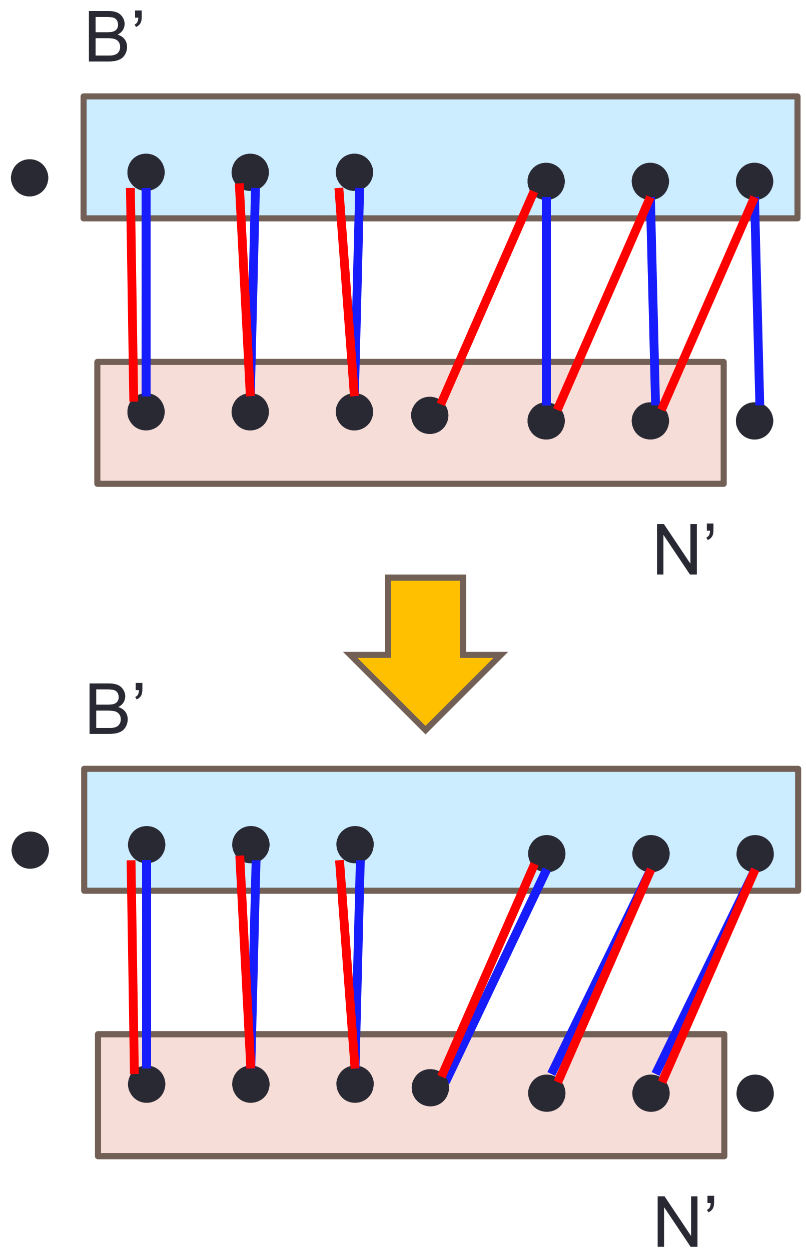
証明：枝数偶数の交互路の扱い

枝数が偶数の交互路 P が存在する場合

(ii)路 P の最初と最後の頂点∈N

(i) の証明と同様にして
M∩P の枝をL∩Pの枝に置き換えてよい

以上の修正により，交互閉路･交互路がなくなった
∴ マッチング M と L は一致
∴ B' と N' を同時にカバーするマッチング



片側被覆制約と両側被覆制約の関係

定理　B′ ⊆ B および N′ ⊆ N に対し，
B′ をカバーするマッチング，　N′ をカバーするマッチング
　　がそれぞれ存在
　　　　　　⟷ B′ と N′を同時にカバーするマッチングが存在

この命題およびその証明より，
B′ と N′を同時にカバーするマッチングは以下の手順で計算可能
(1) B′ をカバーするマッチング M を計算.
　存在しなければ，B′ ∪ N′をカバーするマッチングも存在しない
(2) N′ をカバーするマッチング L を計算.
　存在しなければ，B′ ∪ N′をカバーするマッチングも存在しない
(3) M と L の枝を使って，B′ ∪ N′をカバーするマッチングを計算
　（証明で説明したやり方を使えば簡単）

(1), (2) の計算方法は次回.

演習問題

下記のように評価値と財の価格（赤い数字）が与えられたとき，
均衡価格か否か判定したい．

（1）(i), (ii), (iii) それぞれに対し，判定のための二部グラフ（の枝集合E）を書け．
また，頂点集合B', N' を明記せよ（答えのみ書けばよい）

（2）頂点集合 B' ∪ N' を同時にカバーするマッチングが存在するか否か，調べよ．
存在する場合は具体的に書くこと（答えのみ書けばよい）

(i)

価格	v(i,j)	A	B	C
3	①	2	3	6
6	②	6	7	7

(ii)

価格	v(i,j)	A	B	C
0	①	3	1	0
5	②	7	6	7
6	③	1	7	8

(iii)

価格	v(i,j)	A	B	C
0	①	3	1	0
4	②	7	6	7
4	③	1	7	8
0	④	0	0	4