経営経済のための
最適化理論特講

複数財オークションのアルゴリズムと離散最適化

第2回 差分不等式系と最短路問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

復習：記号の説明

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ 財の集合（各財の在庫は1つのみ）

$B = \{1,2, \ldots, m\}$ 入札者の集合

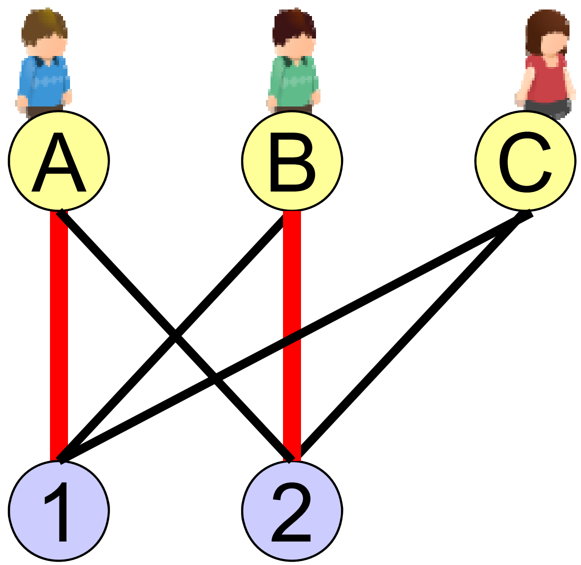
$v(i,j) \in \mathbb{R}_+$ 入札者 i の 財 j に対する評価額（非負の実数値）

$p(j) \in \mathbb{R}_+$ 財 j の価格 （非負の実数値）

$\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ 入札者 i に割り当てられた財

（入札者 i へ財の割り当てなし←→ $\alpha(i) = 0$）

ただし $\alpha(i), \alpha(i') \in N$ ならば $\alpha(i) \neq \alpha(i')$



$\alpha(A) = 1,$
$\alpha(B) = 2,$
$\alpha(C) = 0$

復習：ワルラス均衡

定義： 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ および財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$
は ワルラス均衡（競争均衡）
⟺ 以下の条件を満たす

- 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）
  ➔ $0 \leq v(i,j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha(i) = 0$）
  ➔ $\max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

利得最大の財が割り当て

どの財も欲しくない

価格＞0の財は皆売れる

- 定義： 均衡配分 ＝ 均衡に現れる配分
  均衡価格 ＝ 均衡に現れる価格

今回の講義の目標

- 配分が与えられたとき，均衡配分であることの確認
- 均衡配分が与えられたとき，均衡価格の計算

--- これらの計算問題が，

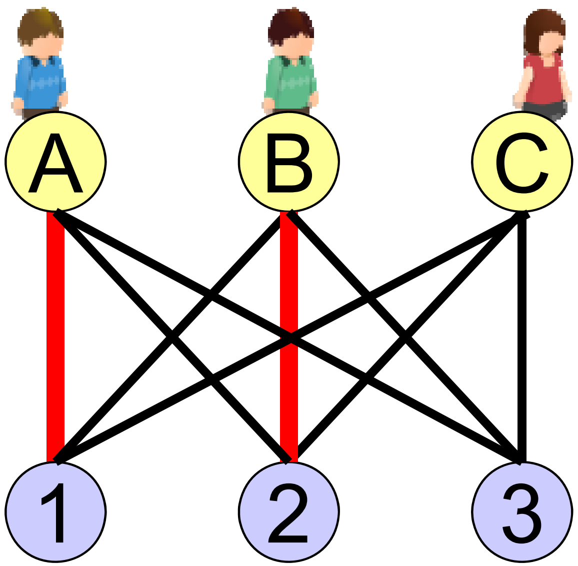
差分不等式系の求解に帰着できることを理解する

- 差分不等式系の問題が最短路問題に帰着できることを理解する
  - 最短路，負閉路，ポテンシャルの関係を理解する

均衡配分の判定の例

複数不可分財のオークションにおいて，

- 与えられた財の配分が均衡配分か否かを判定したい
- 与えられた均衡配分に対応する均衡価格を計算したい



v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

この配分は均衡配分か？

均衡配分の判定(その1)

複数不可分財のオークションにおいて,

- 与えられた財の配分が均衡配分か否かを判定したい
- 与えられた均衡配分に対応する均衡価格を計算したい

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分

⇔ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

- 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)
  ➔ $0 \leq v(i,j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない($\alpha(i) = 0$)
  ➔ $\max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

この条件のチェックは,
不等式系の解の有無の判定に帰着可能

均衡配分の判定(その2)

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分

⟷ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

均衡条件を不等式系として書き換え

- 入札者 i に財 j が割り当てられる

➔ $v(i,j) - p(j) \geq 0, v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$

- 入札者 i に財の割り当てがない

➔ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$

- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

条件を満たす価格が存在する ➔ 与えられた配分は均衡配分

しない ➔ 均衡配分ではない

均衡配分の判定：例のつづき

- 入札者 i に財 j が割り当てられる

➔ $v(i,j) - p(j) \geq 0, v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$

- 入札者 i に財の割り当てがない

➔ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$

- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

3-p(1)≧0, 3-p(1)≧6-p(2), 3-p(1)≧2-p(3)
5-p(2)≧0, 5-p(2)≧1-p(1), 5-p(2)≧4-p(3)

1-p(1)≦0, 3-p(2)≦0, 4-p(3)≦0

p(3)=0

解は存在せず ← 矛盾する式が存在

均衡配分の判定：例のつづき

- 入札者 i に財 j が割り当てられる

➔ $v(i,j) - p(j) \geq 0, v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$

- 入札者 i に財の割り当てがない

➔ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$

- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

3-p(1)≧0, 3-p(1)≧6-p(2), 3-p(1)≧2-p(3)
5-p(2)≧0, 5-p(2)≧1-p(1), 5-p(2)≧4-p(3)
4-p(3)≧0, 4-p(3)≧1-p(1), 4-p(3)≧3-p(2)

➔ 解は存在，例えば
p = (0,3,2)

Cに③を
割り当てる

均衡価格の計算

均衡配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が既知のとき,
均衡価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ を求めたい

均衡価格の条件:不等式系

- 入札者 i に財 j が割り当てられる
➔ $v(i,j) - p(j) \geq 0, v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$
- 入札者 i に財の割り当てがない
➔ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$
- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

「配分が均衡配分であることの判定」のときと
同じ不等式系を解けば良い

解きたい問題：差分不等式系

- 入力：n 個の変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ からなる，次の形の不等式系

$p_i - p_j \leq \alpha_{ij},\quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$ --- 各制約に変数2個以下

（注意：等式を含んでも良い）

- 出力：不等式系に解が「ある」または「ない」の答え

「ある」➔解を求める

「ない」➔解がないことの証拠（できれば）

具体例

$p_2 - p_1 \leq 1,\ p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3,\ p_4 - p_2 \leq 5,$
$p_4 - p_3 \leq 4,\ p_3 - p_4 \leq 6,$
$p_1 = 0,\ p_4 \leq 5$

⇒ 解あり

$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0,1,1,5)$

不等式 $p_1 - p_3 \leq -5$ を追加

⇒ 解なし

以下の不等式は矛盾する

$p_2 - p_1 \leq 1,\ \ p_3 - p_2 \leq 3,$
$p_1 - p_3 \leq -5$

解きたい問題：差分不等式系

- 入力：n 個の変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ からなる，次の形の不等式系

  $p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$ --- 各制約に変数2個以下

  （注意：等式を含んでも良い）
- 出力：不等式系に解が「ある」または「ない」の答え

  「ある」➔解を求める

  「ない」➔解がないことの証拠（できれば）

これからの目的：

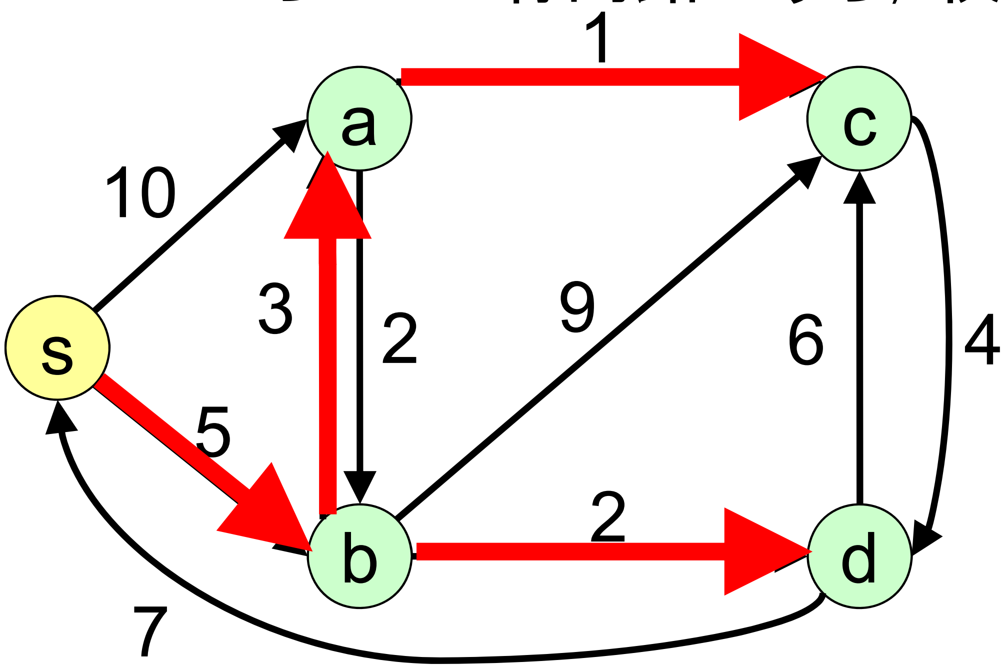
差分不等式系の求解が最短路問題に帰着できることを示す

最短路問題

（単一始点全終点）最短路問題

枝の長さが負の場合も扱う

- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$, 始点 s∈V
  （仮定：始点 s から各頂点に向かう有向路が存在）
- 出力：s から すべての頂点 v への最短路P(v)とその長さd(v)
  （sからvへの最短路 P*
  = sからvへの有向路のうち，枝の長さの和 $\ell(P^*)$が最小のもの）

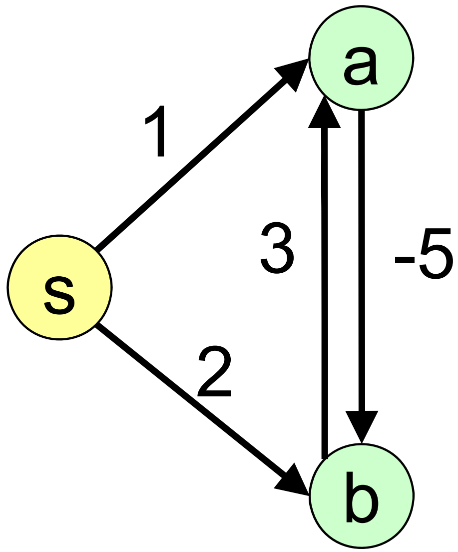


注意：有向路は，同じ頂点，枝を何回通っても可
s->a->b->d->s->a
のような路でもOK

最短路の存在

sからvへの最短路＝sからvへの有向路の中で長さ最小

最短路は存在しないこともある
- sからvへの有向路が存在しない場合
- 長さ最小の有向路が定まらない場合（「最小」が存在しない場合）

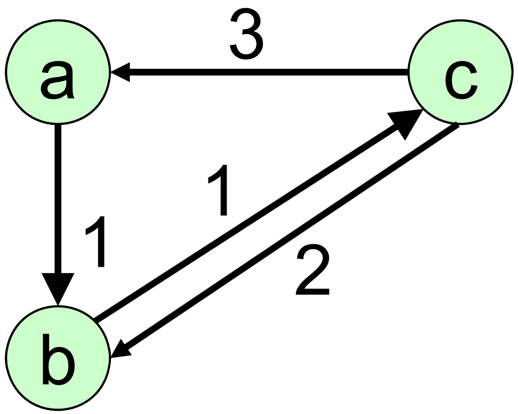


s から a への最短路は存在しない
s->a->b->a->b->a->…
のように a, b の往復を繰り返すと,
長さが任意に短くなる

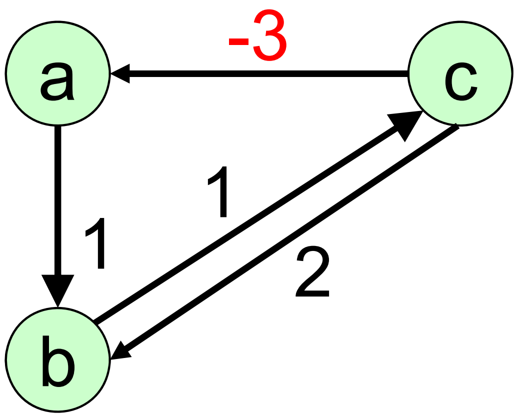
負閉路 (a,b), (b,a) の存在が原因
（負閉路＝枝長の和が負の有向閉路）

ポテンシャル

定義: 実数 $p(v)(v \in V)$ はポテンシャル
⟺ 各枝(u,v)に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u,v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル



※ポテンシャルは存在しないこともある
左のグラフにおいて,

$$p(a) - p(c) \leq -3, p(c) - p(b) \leq 2,$$
$$p(b) - p(a) \leq 1$$

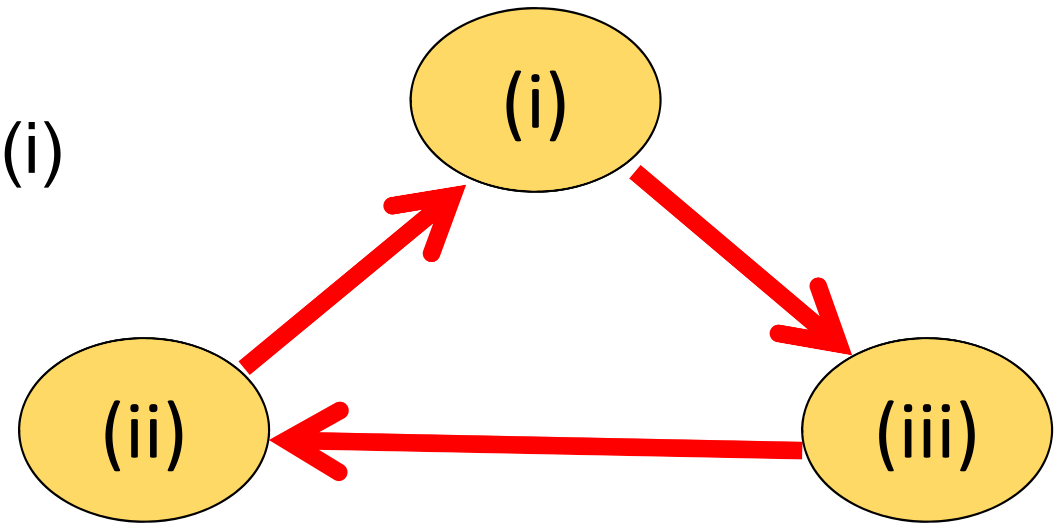
は解をもたない

最短路と負閉路とポテンシャル

与えられたグラフにおける最短路，負閉路，ポテンシャルの存在に関して，以下の関係が成り立つ．

定理：次の (i), (ii), (iii) は等価
(i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
(ii) 負閉路が存在しない
(iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ：
(iii)➔(ii), (i)➔(iii), (ii)➔(i)
を順番に証明



ポテンシャル存在➔負閉路が非存在

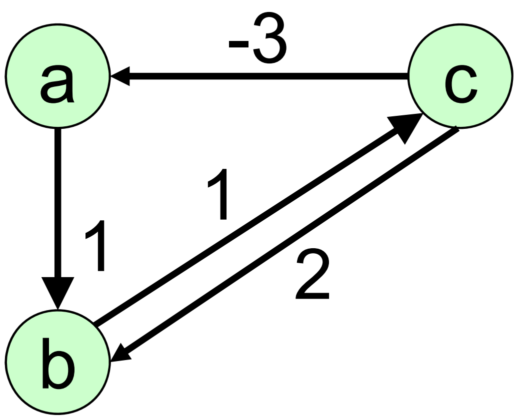
定義: 実数 $p(v)(v \in V)$はポテンシャル
⟷各枝(u,v)に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす

命題 ポテンシャルが存在➔負閉路は存在しない
（対偶:負閉路が存在➔ポテンシャルは存在しない）

（証明）任意の閉路C の長さが非負であることを示せば良い.
不等式 $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ $((u, v) \in C)$ を辺々足す

➔ $0 = \sum_{(u,v)\in C}[p(v) - p(u)]$

$\leq \sum_{(u,v)\in C} \ell(u, v)$ =閉路の長さ ■



左のグラフにおいて,

$$p(a) - p(c) \leq -3, p(c) - p(b) \leq 2,$$
$$p(b) - p(a) \leq 1$$

は解をもたない

最短路と負閉路とポテンシャル

与えられたグラフにおける最短路，負閉路，ポテンシャルの存在に関して，以下の関係が成り立つ，

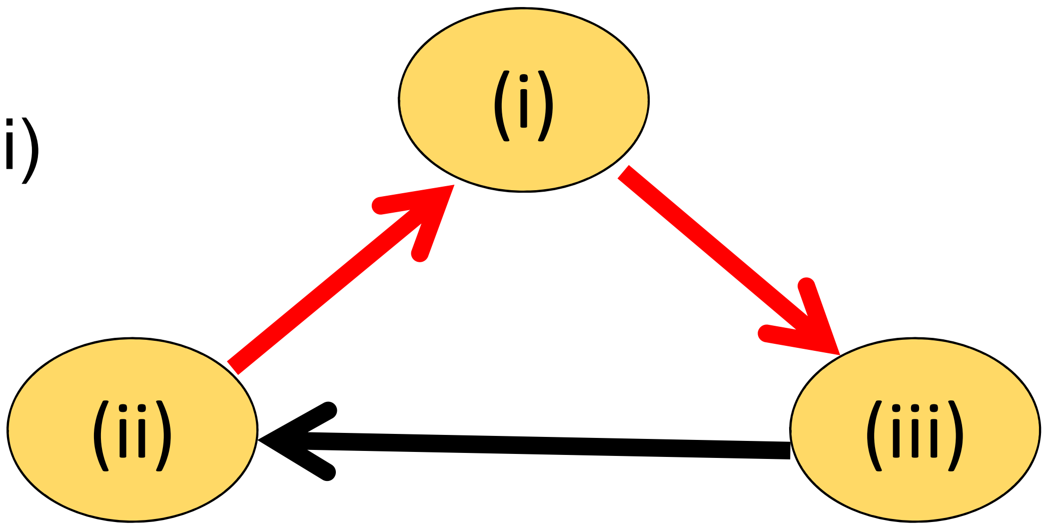
定理：次の (i), (ii), (iii) は等価

(i) 始点 s から各項点への最短路が存在

(ii) 負閉路が存在しない

(iii) ポテンシャルが存在

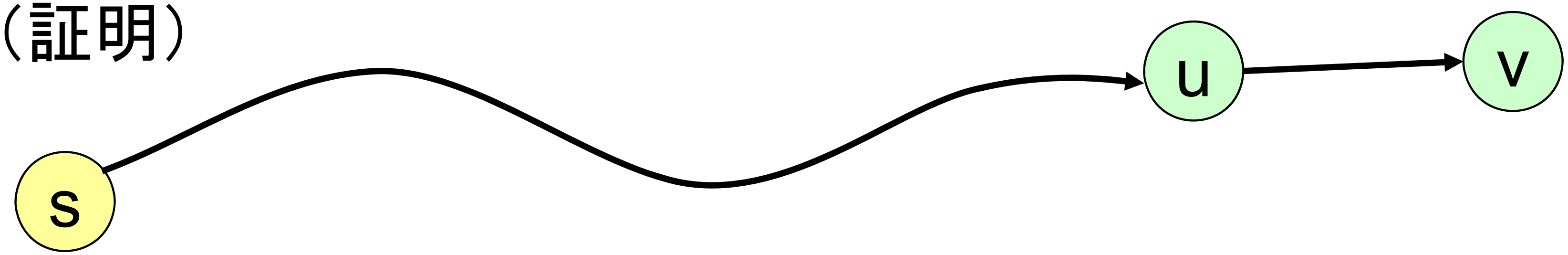
これからの流れ：
(iii)➔(ii)，(i)➔(iii), (ii)➔(i)
を順番に証明



最短路存在➔ポテンシャル存在

命題　頂点sから各頂点への最短路が存在すると仮定.
このとき，ポテンシャルが存在する.
とくに，頂点 v への最短路長を d(v) とすると,
p(v)=d(v) はポテンシャル

（証明）



P: 頂点 s から u への最短路 → d(u)= P の長さ

➔ $\tilde{P} = P \cup \{(u,v)\}$ は s から v への路,

その長さ$= d(u) + \ell(u,v)$

≥ v への最短路長=d(v) ■

最短路と負閉路とポテンシャル

与えられたグラフにおける最短路，負閉路，ポテンシャルの存在に関して，以下の関係が成り立つ，

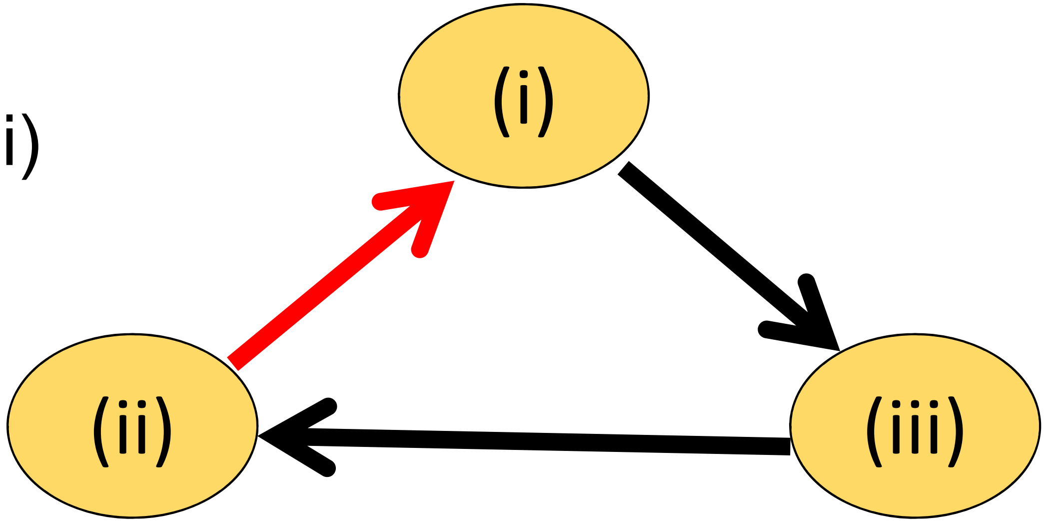
定理： 次の (i), (ii), (iii) は等価

(i) 始点 s から各頂点への最短路が存在

(ii) 負閉路が存在しない

(iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ：
(iii)➔(ii), (i)➔(iii), (ii)➔(i)
を順番に証明



負閉路が不存在➔最短路が存在

定理：有向グラフに負閉路が存在しない
➔ 始点から各頂点 v へ，枝数≦|V|-1 の最短路が存在

（証明）以下では n = |V| とおく．
P*: s から v への，枝数 n-1 以下の路の中で最短（←必ず存在）

次の命題を示せば良い．
(A) s から v への，枝数が n 以上の任意の路 P に対し $\ell(P^*) \leq \ell(P)$

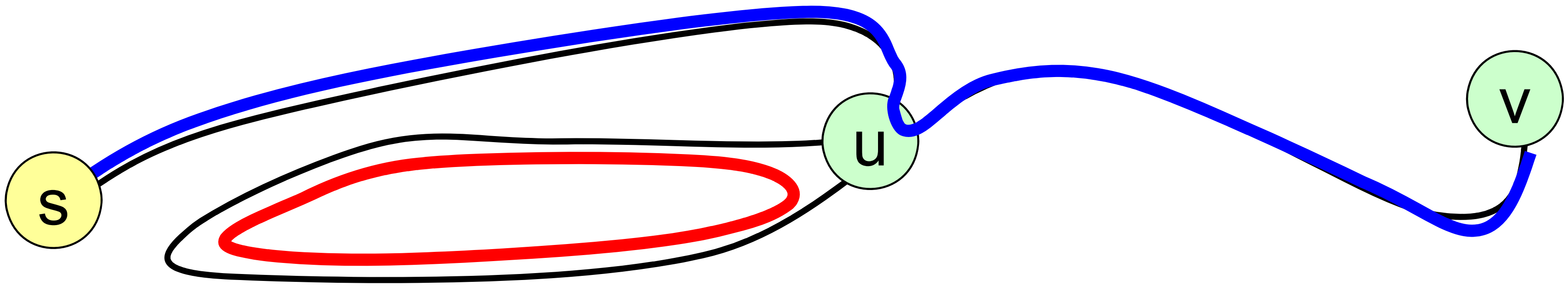
命題(A)を示すには，次の(B)を示せば良い（なぜか？）
(B) s から v への，枝数が n 以上の任意の路 P に対し，
枝数がPより少ない，v への路 P’ が存在して，$\ell(P') \leq \ell(P)$

負閉路が不存在➔最短路が存在（つづき）

定理：有向グラフに負閉路が存在しない
➔ 始点から各頂点 v へ，枝数≦|V|-1 の最短路が存在

（証明のつづき） 次の(B)を示す：
(B) s から v への，枝数が|V|以上の任意の路 P に対し，
枝数がPより少ない v への路 P' が存在して，$\ell(P') \leq \ell(P)$

sからvへの路 P，枝数≧n
➔ ある頂点が必ず2回現れる（u とする）



u から u への部分路は閉路➔長さは非負
➔削除すると，枝数が少なく，長さが$\ell(P)$以下の路 P' を得る ■

ポテンシャルと負閉路と最短路

- これまで示した定理，命題より，次の定理が得られる

定理：次の (i), (ii), (iii) は等価
(i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
(ii) 負閉路が存在しない
(iii) ポテンシャルが存在

差分不等式系の解の計算

変数の差の不等式系の解を求める

2つの場合に分けて考える

ケース1：各制約に2つの変数が現れる

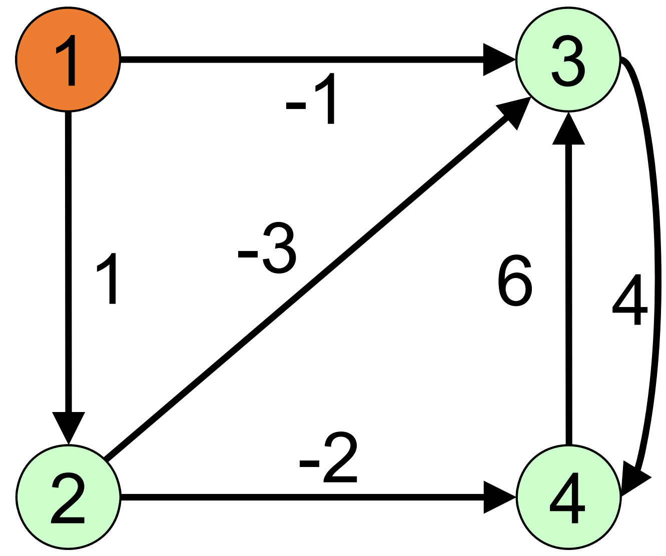
$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq -1,$
$p_3 - p_2 \leq -3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$

ケース2：変数1つの制約を含む場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, \;\; p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, \;\; p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$

- ケース2の方がより一般的
- しかし，ケース2はケース1の形に帰着可能（後で説明）

各制約に2つの変数が現れる場合



ケース1の例

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq -1,$
$p_3 - p_2 \leq -3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$

差分不等式系の解
＝以下のグラフのポテンシャル

- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約$p_v - p_u \leq \alpha$に対し，長さ= α の枝(u, v)を追加

したがって，このグラフのポテンシャルを求めれば良い

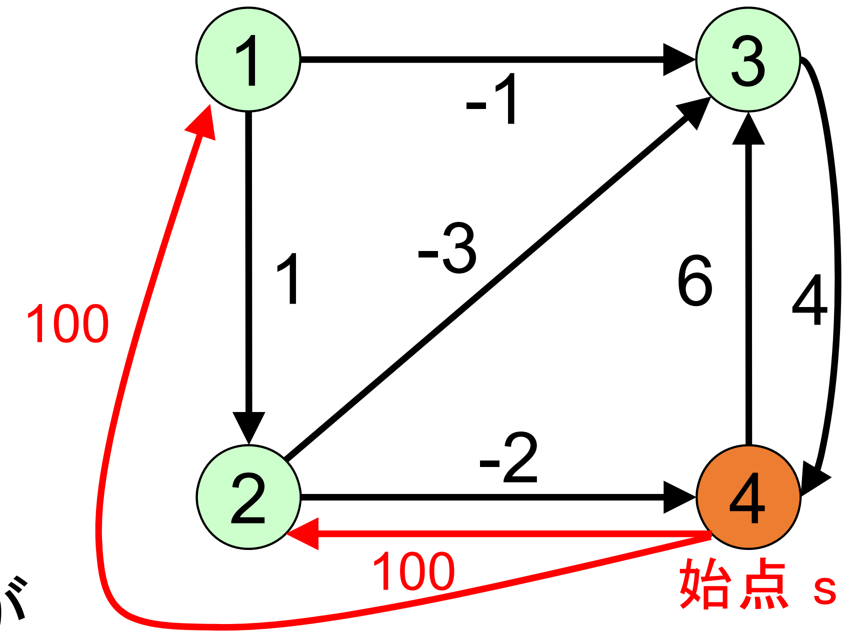
- 適当な頂点を始点 s とおき，s から各頂点への最短路長を計算
  - 負閉路が存在しない ➔ 最短路長d(v)は解
  - 負閉路が存在する ➔ 解は存在しない

（負閉路の枝集合←→矛盾する不等式）

各制約に2つの変数が現れる場合

ケース1の例

$$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq -1,$$
$$p_3 - p_2 \leq -3, p_4 - p_2 \leq -2,$$
$$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$$



※注意：頂点 s からある頂点 u への路が存在しない場合，

➔ 長さの十分大きい枝 (s, u) を追加し，最短路の存在を保証する

長さの十分大きい枝 (s, u) を追加

⟺ 元の不等式系に，$p_u - p_s \leq M$ を追加

（Mは十分大きな正の数）

M が十分大きい場合，$p_u - p_s \leq M$ を追加しても，解の有無に影響を与えない

変数1つの制約を含む場合:帰着方法

ケース2の例:

$p_2 - p_1 \le 1, p_3 - p_1 \le 1,\ \ p_3 - p_2 \le 3, p_4 - p_2 \le -2,$
$p_4 - p_3 \le 4, p_3 - p_4 \le 6,\ p_1 \le 0, p_4 \ge 3$

(1)変数2つの制約に変換する

- 新しい変数 p_s を追加　　（←→頂点 s 追加）
- 各変数$p_1, \dots, p_n$に対し,
  - $p_v \le \beta$の形の制約が存在 ➔ $p_v - p_s \le \beta$ に置き換え
  - $p_v \ge \gamma$の形の制約が存在 ➔ $p_s - p_v \le -\gamma$ に置き換え

$q_2 - q_1 \le 1, q_3 - q_1 \le 1,\ \ q - q_2 \le 3, q_4 - q_2 \le -2,$
$q_4 - q_3 \le 4, q_3 - q_4 \le 6,\ q_1 - q_s \le 0, q_s - q_4 \ge 3$

※元の不等式系との区別のため，変数の記号をqに変更

二つの不等式系の関係

元の不等式系:

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,\ \ p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6,\ p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$

新しい不等式系:

$q_2 - q_1 \leq 1, q_3 - q_1 \leq 1,\ \ q - q_2 \leq 3, q_4 - q_2 \leq -2,$
$q_4 - q_3 \leq 4, q_3 - q_4 \leq 6,\ q_1 - q_s \leq 0, q_s - q_4 \geq 3$

性質

(i) $(p_1, \ldots, p_6)$ は元の不等式系の解

➔ $(q_1, \ldots, q_6, q_s) = (p_1, \ldots, p_6, 0)$ は新しい不等式系の解

(ii) $(q_1, \ldots, q_6, q_s)$ は新しい不等式系の解

➔ $(p_1, \ldots, p_6) = (q_1 - q_s, \ldots, q_6 - q_s)$ は元の不等式系の解

よって，新しい不等式系（ケース1の形）を解けばよい

帰着後の不等式系の上手な解き方

新しい不等式系:

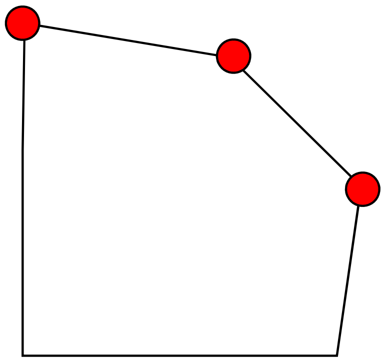
$q_2 - q_1 \leq 1, q_3 - q_1 \leq 1,\ \ q - q_2 \leq 3, q_4 - q_2 \leq -2,$
$q_4 - q_3 \leq 4, q_3 - q_4 \leq 6,\ \ q_1 - q_s \leq 0, q_s - q_4 \geq 3$

元の不等式系の解き方
(その1) 新しい不等式系を解いて，前のスライドの性質を利用
(その2) 上手な解き方
s を始点として，各頂点への最短路長を計算

- 負閉路が存在しない➔ $q_s = 0$ となるのでうまくいく
- 負閉路が存在する 🡸🡺 矛盾する不等式が存在

∴ もともとの不等式系でも解が存在せず

補足：解の極小性・極大性



定義：集合 S においてベクトル$x \in S$は極大
←→ x 以外の任意の $y \in S$ に対し,
$y \geqq x$ が成り立たない
極小も同様に定義

一般に，集合Sの極大解は（存在するならば）
複数個存在

- 差分不等式系の解集合は（上に有界ならば）
  極大解・極小解が唯一に定まる
- 最短路問題に帰着する前述の方法を使うと，極大解が得られる

補足：解の極小性・極大性

- 最短路問題に帰着する前述の方法を使うと，極大解が得られる
- 極小解を求めたい場合は，変数変換を使えばよい
  - 元の変数 p_i を $-q_i$ におき換えて，q_i に関して差分不等式系を前述の方法で解く → q_i に関する極大解
  - 得られた解 q_i に対し，$p_i = -q_i$ とおく → p_i に関する極小解

変数変換後のグラフの変化：各枝の向きを逆にし，長さはそのまま

$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}$ ➔ $q_j - q_i \leq \alpha_{ij}$

長さ α_{ij} の枝(j,i) ➔ 長さ α_{ij} の逆向き枝(i,j)

$-p_i \leq -\beta_i$ ➔ $q_i \leq -\beta_i$

長さ $-\beta_i$ の枝(i,s) ➔ 長さ β_i の逆向き枝(s,i)

$p_i \leq \gamma_i$ ➔ $-q_i \leq \gamma_i$

長さ γ_i の枝(s,i) ➔ 長さ $-\gamma_i$ の逆向き枝(i,s)

均衡配分の判定方法

均衡配分の判定方法

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分

$\Leftrightarrow$ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

- 入札者 i に財 j が割り当てられる

$\Rightarrow$ $v(i,j) - p(j) \geq 0,\ v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$

$\Rightarrow$ $p(j) \leq v(i,j),\ \ p(j) - p(h) \leq v(i,j) - v(i,h)\ (\forall h \in N)$

- 入札者 i に財の割り当てがない

$\Rightarrow$ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$ $\Rightarrow$ $-p(h) \leq -v(i,h)\ \ (\forall h \in N)$

- 財 j が誰にも割当られない $\Rightarrow$ $p(j) = 0$

- この差分不等式系に対応するグラフを作成し，
  ポテンシャルの有無（$\Leftrightarrow$負閉路の有無）を判定すれば良い
- 配分 $\alpha(i)$ が均衡配分ならば，ポテンシャルは必ず存在し，
  均衡価格に対応する

均衡配分判定のためのグラフ

変数1つの不等式が必ず含まれるので，
各変数 p(j) に対応する頂点 j に加え，頂点 s を追加

- 入札者 i に財 j が割り当てられる

➔ $v(i,j) - p(j) \geq 0,\ v(i,j) - p(j) \geq v(i,h) - p(h)\ (\forall h \in N)$

➔ $p(j) \leq v(i,j),\ \ p(j) - p(h) \leq v(i,j) - v(i,h)\ (\forall h \in N)$

∴ 長さ v(i,j) の枝 (s,j) および
各 $h \in N$ に対し，長さ v(i,j) – v(i,h) の枝 (h,j) を追加

- 入札者 i に財の割り当てがない

➔ $v(i,h) - p(h) \leq 0\ (\forall h \in N)$ ➔ $-p(h) \leq -v(i,h)\ \ (\forall h \in N)$

∴各 $h \in N$ に対し，長さ – v(i,h) の枝(h,s) を追加

- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

∴ 長さ 0 の枝 (s,j), (j,s) を追加

均衡配分の判定方法:具体例

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

入札者 A に財の割当がない

➔ $v(A,1)-p(1) \leqq 0$, $v(A,2)-p(2) \leqq 0$

入札者 B に財 1 が割り当てられる

➔ $v(B,1)-p(1) \geqq 0$, $v(B,1)-p(1) \geqq v(B,2)-p(2)$

入札者 C に財 2 が割り当てられる

➔ $v(C,2)-p(2) \geqq 0$, $v(C,2)-p(2) \geqq v(C,1)-p(1)$

差分不等式系:

$2= v(A,1) \leqq p(1) \leqq v(B,1) = 3$, $6= v(A,2) \leqq p(2) \leqq v(C,2) = 7$,

$4=v(B,2)-v(B,1) \leqq p(2) - p(1) \leqq v(C,2)-v(C,1)=1$

均衡配分の判定方法：具体例

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

差分不等式系：

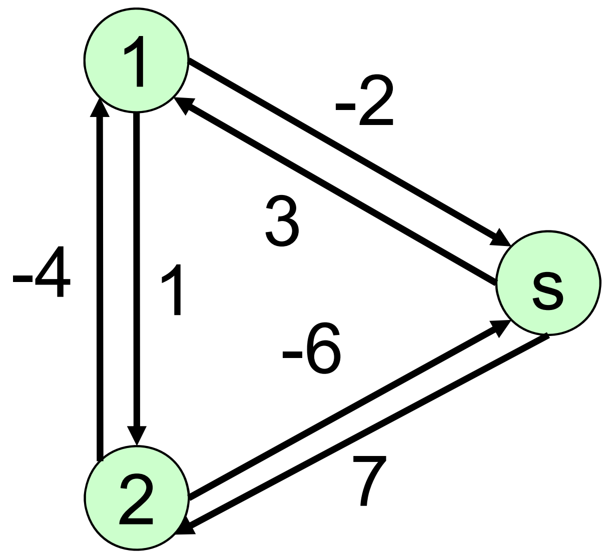
2= v(A,1) ≦ p(1) ≦ v(B,1) = 3, 6= v(A,2) ≦ p(2) ≦ v(C,2) = 7,

4=v(B,2)-v(B,1)≦ p(2) - p(1) ≦ v(C,2)-v(C,1)=1

変数は2つ，

変数がひとつだけの不等式がある

➔ 頂点2個＋頂点sのグラフを作る



負閉路 (1,2), (2,1) が存在するので

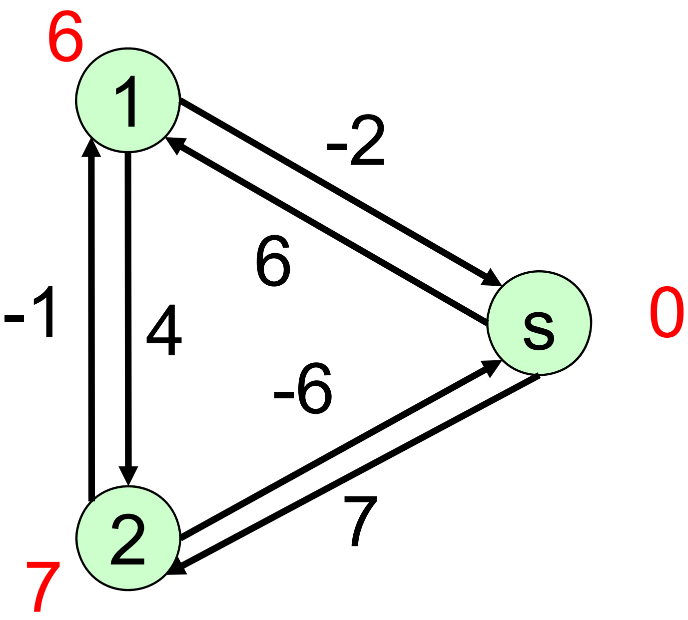
ポテンシャル存在せず

∴ 均衡配分ではない

均衡配分の判定方法:具体例

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

財の割当を変更



負閉路は存在しない

→ 最短路が存在，長さは右図の通り

∴均衡価格 p(1)=6, p(2)=7

これは極大均衡価格

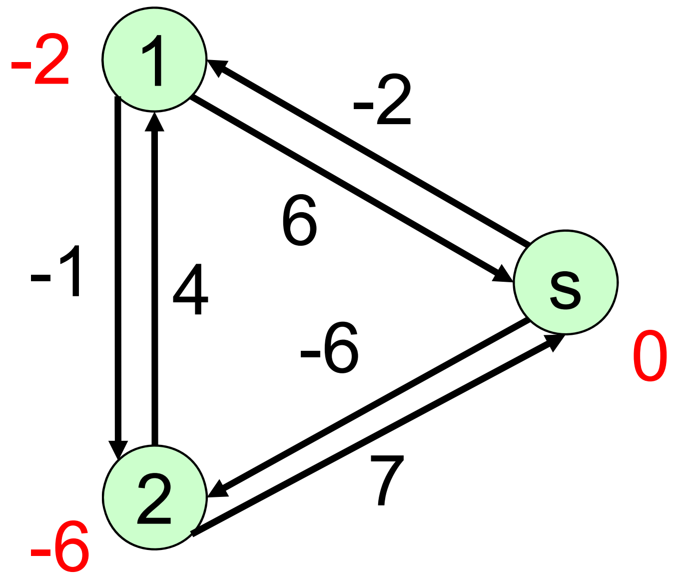
極小均衡価格を求めるために，

すべての枝を逆向きに

最短路長は右図の通り

∴均衡価格 p(1) = -q(1) = 2

p(2) = -q(2) = 6



演習問題

下記のように評価値および財の配分(赤丸)が与えられたとする.
この配分が均衡配分か否かを判定したい.
(1) (問1，問2のみ) 判定のための条件を差分不等式系の形で書け.
(2) 判定のためのグラフを書け.
(3) グラフに負閉路が存在する場合は,
そのような負閉路を求めよ.
一方，負閉路が存在しない場合は,
各頂点への最短路長を求めよ.
※以上は結果のみ書けばよい

可能であれば，以下もやってみてください
(4) 均衡価格が存在するものについては,
極小な均衡価格を求めよ.

問1

v(i,j)	A	B	C
①	3	4	6
②	6	6	8

問2

v(i,j)	A	B	C
①	4	1	0
②	7	6	4
③	1	7	5

問3

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8