

$$\begin{aligned}
&= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{P}_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|cc} \lambda_1 & * & * \\ 0 & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_1 \\ 0 & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{P}_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{c|cc} \lambda_1 & * & * \\ 0 & & \\ \vdots & & \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_2 \\ 0 & & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & * & \\ 0 & 0 & \lambda_n & \end{array} \right)
\end{aligned}$$

となる.

□

[問題 11-01] 次の行列の三角化を行え (計算せよ).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -9 & -7 & -11 \\ -3 & -1 & -3 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

定理 1.1.3 (Cayley-Hamilton の定理):  $\mathbf{A}$  を正方行列,  $\phi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$  を  $\mathbf{A}$  の固有方程式としたとき,  $\lambda$  の代わりに  $\mathbf{A}$  を代入すると  $\phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$  となる.

例:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  とする. この行列の固有方程式は  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$  となり, Cayley-Hamilton の定理より  $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \mathbf{O}$  という行列の方程式が成り立つ.

$\mathbf{A}$  の逆行列を計算したい場合, 上記の行列方程式に ( $\mathbf{A}$  が正則であるという仮定の元)  $\mathbf{A}^{-1}$  をかけると,  $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} - 5\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{O}$  が導かれ, 結局

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\mathbf{A} - \frac{2}{5}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

が求まる.

さらに,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^4 &= \mathbf{A}^2 \mathbf{A}^2 = (2\mathbf{A} + 5\mathbf{I})^2 = 4\mathbf{A}^2 + 20\mathbf{A} + 25\mathbf{I} \\
&= 4(2\mathbf{A} + 5\mathbf{I}) + 20\mathbf{A} + 25\mathbf{I} = 28\mathbf{A} + 45\mathbf{I} \\
&= \begin{pmatrix} 73 & 56 \\ 84 & 73 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる.

## 12 複素行列の固有値

今まででは, 実数の  $n$  次元 Euclid 空間や実数行列を扱ってきた. ここでは少し一般化して, 複素行列を考える. つまり  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  を  $m \times n$  複素行列とすると,  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) である.

実数行列と同様に  $n$  次複素正方行列  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda$  や固有ベクトル  $\mathbf{p}$  が定義できるが、それらの要素は複素数になることに注意されたい。

定義 1.2.1 :  $\mathbf{H}$  を  $n$  次複素正方行列とし、 $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}$  が成り立つとき、 $\mathbf{H}$  をHermite 行列とよぶ。ただし、 $\mathbf{H}^* := \overline{\mathbf{H}}^T$  は  $\mathbf{H}$  の随伴行列を意味する。

定理 1.2.2 :  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を  $n$  次 Hermite 行列の固有値とする。

- (a)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  は実数であるが、対応する固有ベクトルは複素ベクトルになる。
- (b) 固有値  $\lambda_i$  に対応する固有ベクトル  $\mathbf{p}_i$  をお互いに直交し、かつ、その長さを 1 にとることができる。すなわち、

$$(\mathbf{p}_i)^T \bar{\mathbf{p}}_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \|\mathbf{p}_i\| = 1. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

したがって、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  は線形独立になる。

証明 (略) :

- (a)  $\lambda$  を  $\mathbf{B}$  の固有値とする。すなわち、

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$$

を仮定する。複素共役を<sup>-</sup>で表すとする。 $(\mathbf{B}\mathbf{y})^T = \lambda\mathbf{y}^T$  の複素共役をとると、 $\bar{\mathbf{y}}^T \overline{\mathbf{B}}^T = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{B}^* = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{y}}^T$  となる。したがって、

$$\lambda\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}^T (\lambda\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{B}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{B}^* \mathbf{y} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{y}$$

となる。ここで、 $\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2$  はゼロでない実数であるので  $\lambda = \bar{\lambda}$  を得る。

注 :  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{y} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n)^T$  の場合、 $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k)(a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$  となる。

- (b)  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  を  $\lambda, \mu$  の相異なる固有値に対応する固有ベクトルとする。すなわち、

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \quad \overline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{z}} = \mu\bar{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}.$$

このとき、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{B}\mathbf{y} &= \bar{\mathbf{z}}^T (\lambda\mathbf{y}) = \lambda\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{y}, \\ \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{B}\mathbf{y} &= \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{B}^* \mathbf{y} = \mu\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$0 = \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{B}\mathbf{y} - \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{B}\mathbf{y} = (\lambda - \mu)\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{y}.$$

仮定より、 $\lambda \neq \mu$  であるから、 $\bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{y} = 0$  を得る。

注 : ベクトル空間  $\mathbb{C}^n$  において、 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  と  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$  の内積は  $\mathbf{y}^T \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n (a_k^y + ib_k^y)(a_k^z - ib_k^z)$  として定義される。

以上のことから異なる固有値に対する固有ベクトルは直交している。さらに、 $\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$  であれば、両側を  $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^T \bar{\mathbf{y}}}$  で割ることによって

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

ノルムが 1 の固有ベクトル  $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$  を得ることができる。その他の事実についても実対称行列の場合と同じなので省略する。

□

### 12.1 Gersgorin の定理（弱い形）

定理 12.3 :  $n$  次複素正方行列  $\mathbf{H} = (h_{ij})$  の任意の固有値  $\lambda$  は

$$G_k := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - h_{kk}| \leq r_k\}, \quad r_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n |h_{kj}|$$

で定義される、複素平面上の  $n$  個の円  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の和集合  $\bigcup_{k=1}^n G_k$  の中にある。

証明 :  $\mathbf{H}$  の固有値  $\lambda$  と対応する固有ベクトルを  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  としたとき、 $\mathbf{Hx} = \lambda \mathbf{x}$  より、

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

となる。ここで  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  を  $|x_k| = \max_j |x_j| \neq 0$  とおくと、

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n h_{kj} x_j + h_{kk} x_k = \lambda x_k$$

になるので、

$$|\lambda - h_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |h_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |h_{kj}| = r_k$$

を得る。

例 :

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}$  の固有値は  $\frac{3 \pm \sqrt{53}}{2}$  であり、 $r_1 = 1$ 、 $r_2 = 1$  となるので、

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2| \leq 1\}, \quad G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5| \leq 1\}$$

の Gersgorin の円が得られる。図 27 を参照。

[問題 12-01] 次の複素正方行列の Gersgorin の円を全て求めよ。ただし、固有値を求める必要はない。

$$\begin{pmatrix} 5i & 1+i & 0 \\ 0 & 3 & 1-i \\ -5 & 2i & -i \end{pmatrix}$$

## 13 特異値分解

近年、データマイニング、機械学習、ビックデータなどのキーワードの元で行列の低ランク近似や行列の要素の補間などが取り上げられている。その中、行列の特異値を用いた問題がしばしば登場する。正方行列に対する固有値と異なり、正方でない任意の行列に対して特異値は定義されている。

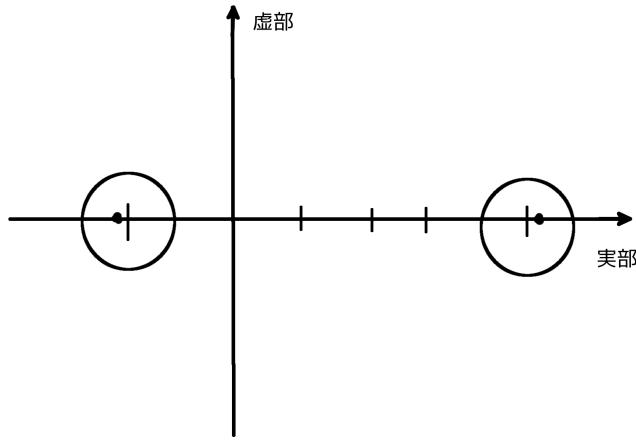


図 27:  $\mathbf{H}$  に対する Gershgorin の円.

### 13.1 定義と基本的な性質

定義 13. 1 :  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  に対し, その特異値分解とは

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$$

となるものである. ただし,  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  はユニタリ行列,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  は対角行列である. それに加え,  $\Sigma$  の対角要素  $\sigma_i$  は非負で非増加順に並んでいると仮定する. つまり  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ ,  $p = \min(m, n)$  である.

例 1 :

$$(1 \ 2) = (1) \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

例 2 :

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5} \\ \frac{40\sqrt{3}-9}{50} & -\frac{40+9\sqrt{3}}{50} \\ \frac{15\sqrt{3}+6}{25} & \frac{6\sqrt{3}-15}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{3}{5} & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

定理 13. 2 : 行列  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  に対して必ず特異値分解が存在する. さらに, 定義 13. 1 の特異値  $\{\sigma_j\}$  は一意に定まる.

証明 :

$\max\{n, m\}$  に関して帰納法を用いる.  $\max\{n, m\} = 1$  の場合は自明であるので,  $\max\{n-1, m-1\} = n-1$  もしくは  $m-1$  以下の場合, 結論が成り立つとする.

$\sigma_1 := \|\mathbf{A}\|_{\text{spec}} = \max_{\|\mathbf{v}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2$  とし,  $\mathbf{A}$  を写像として見做したとき, 定義域が有界で閉集合であるので,  $\|\mathbf{A}\mathbf{v}_1\|_2 = \sigma_1$ ,  $\|\mathbf{v}_1\|_2 = 1$  となる  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$  が存在する. よって  $\|\mathbf{u}_1\|_2 = 1$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \sigma_1\mathbf{u}_1$  となる  $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^m$  も存在する.

$v_1$ とともに  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底となる  $v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  を選び、 $u_1$ とともに  $\mathbb{C}^m$  の正規直交基底となる  $u_2, u_3, \dots, u_m \in \mathbb{C}^m$  を選ぶ。それぞれを列として並べて得られた行列  $V_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  と  $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$  はユニタリ行列となる。よって、

$$U_1^* A V_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & w^* \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} =: S$$

が得られる。また、

$$\left\| S \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 & w^* \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \sigma_1^2 + w^* w = \sqrt{\sigma_1^2 + w^* w} \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2$$

より  $\|S\|_2 \geq \sqrt{\sigma_1^2 + w^* w}$  がいえる。一方、 $U_1, V_1$  はユニタリ行列であるので、 $\|S\|_2 = \|U_1^* A V_1\|_2 = \|A\|_2 = \sigma_1$  となるので、結局  $w = \mathbf{0}$  である。

$A_1 \in \mathbb{C}^{(m-1) \times (n-1)}$  であるので、帰納法の仮定よりユニタリ行列  $V_2, U_2$  と要素が非負である対角行列  $\Sigma_2$  が存在し、 $A_1 = U_2 \Sigma_2 V_2^*$  となる。最後に、

$$A = U_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & V_2 \end{pmatrix}^* V_1^*$$

となるので、特異値分解の存在性は証明されたことになる。

特異値の一意性については省略する。  $\square$

定理 13. 3 : 行列  $A$  のランク（階数） $r$  は  $A$  の正の特異値の数と一致する。

証明 :

$A$  の特異値分解  $A = U \Sigma V^*$  を考え、 $U, V$  がユニタリ行列であるので、 $A$  の左から行に関する「基本変形」を  $U^*$  として、 $A$  の右からその列に対する「基本変形」を  $V$  によって行うと、 $U^* A V = (U^* U) \Sigma (V^* V) = \Sigma$  となる。結局、 $A$  のランクは  $\Sigma$  の対角の非ゼロ要素の数と一致する。  $\square$

定理 13. 4 :  $\|A\|_2 = \sigma_1$  であり、 $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}$  である。ただし、 $r$  は  $A$  のランクである。

証明 :

$\|A\|_F := \sqrt{\text{tr}(A^* A)}$  より、 $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(V \Sigma^T U^* U \Sigma V^*)} = \sqrt{\text{tr}(V \Sigma^T \Sigma V^*)} = \sqrt{\text{tr}(\Sigma^T \Sigma V^* V)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}$ 。定理 13. 2 とは別の見方として、

$$\|A\|_2 := \sup_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq \mathbf{0}} \frac{\sqrt{x^* V \Sigma^T U^* U \Sigma V^* x}}{\sqrt{x^* V V^* x}} = \sup_{y \in \mathbb{C}^m, y \neq \mathbf{0}} \frac{\sqrt{y^* \Sigma^T \Sigma y}}{\sqrt{y^* y}} = \sigma_1$$

ただし、 $y = V^* x$  という変数変換を行っている。 $V$  はユニタリ行列であるので、正則行列であることに注意。  $\square$

定理 13. 5 :  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  は  $r$  個のランク 1 行列の和である。

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^*$$

ただし、 $u_j$  は  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  の  $j$  列であり、 $v_j$  は  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  の  $j$  列である。

## 13.2 特異値分解の計算

定理 13. 6 :  $\mathbf{A}$  の非ゼロ特異値は  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  もしくは  $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$  の固有値の平方根と一致する.

証明 :

$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^*\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^* = (\mathbf{V})\Sigma^T\Sigma(\mathbf{V}^*)$  となるので,  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  の固有値は  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0$  となる. ただし,  $r$  は  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  のランクである. よって, 定理の主張が示せた.  $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$  についても同様である.

□

1. 上記の定理から,  $m \geq n$  の場合, 行列  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  の特異値分解を得るためにまずは  $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  の固有値分解を行い,  $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^*$  を計算する.  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  は Hermite 行列になっていることに注意.
2. つぎに,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  の対角要素 ( $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  の固有値) の平行根を  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  として, 正のものだけをその順番に  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  の対角におく. 上記の入れ換えを考慮し, 必要であれば  $\mathbf{P}$  の列の入れ替えをする.
3.  $\mathbf{P} = \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  とおき, 最後に  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$  となるように, ユニタリ行列  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  を求め. 定理 13. 1 からわかるように, 行列  $\mathbf{A}$  の特異値は一意であるが, その特異値分解は一意ではないので  $\mathbf{U}$  を計算するときに自由度がある.

[問題 13-01] 例 1, 例 2 に出てくる行列の特異値分解を上記の方法を用い確かめよ.

## 13.3 Moore-Penrose 形一般逆行列

定義 13. 7 :  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  の特異値分解を  $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$  とすると  $\mathbf{A}$  の Moore-Penrose 一般逆行列を  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}\Sigma^\dagger\mathbf{U}^*$  と定義する. ただし,  $\Sigma^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$  の対角行列でその要素は

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma_j} & , \text{ if } \sigma_j > 0 \\ 0 & , \text{ if } \sigma_j = 0 \end{cases}$$

として定められている.

上記の  $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times m}$  は  $\mathbf{A}$  の 疑似逆行列 とよばれることもあり, 以下の性質を満す唯一の行列  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  である.

1.  $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$
2.  $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$
3.  $(\mathbf{AX})^* = \mathbf{AX}$
4.  $(\mathbf{XA})^* = \mathbf{XA}$

当然ながら,  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$  ( $\leq m$ ) のとき  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$  であり,  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n = m$  であるとき  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$  である.

このことから  $\mathbf{A}$  の Moore-Penrose 一般逆行列は  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$  の最小ノルムを満すベクトル  $\mathbf{x}$  のなかでさらに最小ノルムのものを実現するベクトル  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{b}$  に関連していることがわかる.