

応用線形代数—第6回レポート

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系
福田光浩

2020年度 第1クォーター

提出〆切 6月2日(火) 23時50分まで

OWC-i に必ず *pdf ファイル* としてアップロード

以下の問題では Matlab/Octave を用いて答えよ。

また、学籍番号の一番最後の桁の数を a とする。例えば、19B01234 ならば $a = 4$ とする。
裏面もあることに注意せよ。

1. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ と $e \in \mathbb{R}^3$ を以下のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) A のべき乗のうち $A^2, A^3, A^{10}, A^{100}$ を求めよ。
(b) $x = (A^{100})^{-1}e$ とするとき、ベクトル x の第1成分を求めよ。
(c) 自然数 n に対する A^n を (a) の結果から推測し、数学的帰納法により証明せよ。
2. 3×3 の対称行列 B を以下のように定義する。

$$B = \begin{pmatrix} 4 \times (a+1) & a+1 & -\sqrt{a+1} \\ a+1 & 4 \times (a+1) & -(a+1) \\ -\sqrt{a+1} & -(a+1) & 4 \times (a+1) \end{pmatrix}$$

- (a) B の固有値のうち、負の固有値の数を答えよ。
(b) Matlab のコマンドで $[P, D] = \text{eig}(B)$ とすると、 B の固有値を対角成分にもつ対角行列 D と固有ベクトルを列とする行列 P に分解できる。 PDP^{-1} と B の差を Matlab のノルムで評価せよ。
(裏面に続く)

(c) Matlabでは、行列 \mathbf{X} について、 $\mathbf{Y} = \text{sqrt}(\mathbf{X})$ とすると \mathbf{X} の各成分の平方根を成分に持つ行列 \mathbf{Y} が得られる。これを $\mathbf{Y} = \sqrt{\mathbf{X}}$ と書くこととする。ここで、 $\mathbf{B}^{1/2}$ を $\mathbf{B}^{1/2} = \mathbf{P}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}$ で定義したときに、 $(\mathbf{B}^{1/2})^2$ と \mathbf{B} の差を Matlab のノルムで評価せよ。

3. $\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^{-1}$ と \mathbf{b} を以下のようにして定義する。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 10^{a+5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-a-5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) 線形方程式系 $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を \mathbf{x} について解け。

(b) $\mathbf{C}\mathbf{x}$ と \mathbf{b} の差を Matlab のノルムで評価せよ。

(c) 上記の問題 2(b), 2(c) と比較して 3(b) で求めた値について何か気が付いたことがあれば、簡単にその事実とその理由を書け。

4. n を十分大きな正整数とし、正方行列 \mathbf{A} と \mathbf{B} をそれぞれ `rand(n)`, `magic(n)` というコマンドで生成する。また、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ をゼロでないベクトルとする。線形方程式系 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ と $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{c}$ を変数 \mathbf{x} と \mathbf{y} で解いた際、それぞれにかかった計算時間は異なるか。解の精度つまり $\mathbf{A}\mathbf{x}$ と \mathbf{c} の差、もしくは $\mathbf{B}\mathbf{x}$ と \mathbf{c} の差についてはどうだろうか。違いがある場合はその理由などを議論せよ。