応用線形代数—第３回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０２０年度 第１クォーター

提出〆切　５月１９日（火）　２３時５０分まで

OWC-i に必ず *pdf* ファイルとしてアップロード

1. 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を Gauss-Jordan の消去法もしくは Gauss の消去法で解く場合，基本演算を順次行う．特に $\boldsymbol{A}$ のある行にゼロでない定数をかけたり，$\boldsymbol{A}$ の j 行に $\boldsymbol{A}$ の i 行のゼロでない定数倍を足した演算を行う．これらの２つ変換は線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の左からある行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ をそれぞれかけることによって行うことができる．線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が解を持ち，その解が一意である場合，これらの２つの変換を逐次行って得られた線形方程式系 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$ も同じ解を持ち，一意であることを示せ．

2. 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を Cramer の公式を用いて解くと解は

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で求まる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

に対して

(a) Cramer の公式を用いて解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(b) Gauss の消去法（Gauss-Jordan の消去法ではありません）を用いて同じ解が求まるか確かめよ．

（裏面に続く）

3. 次の行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

4. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，つまり，$n$ 次正方行列であるとき，

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$$

であることを示せ．