応用線形代数—第２回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０２０年度 第１クォーター

提出〆切　５月１５日（金）　２３時５０分まで

OWC-i に必ず *pdf* ファイルとしてアップロード

1. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ と $b \in \mathbb{R}$ を固定し，変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ との内積に定数を加えて $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b$ とした $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 写像を定義する．この写像は線形写像であるか．線形写像である場合は定義を用いて示せ．そうでない場合は理由を述べよ．
2.
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$
としたとき，$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$5\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ のランクを求めよ.（答えだけではなく，どのように求めたかも明記せよ.）
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が与えられ，$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}$ が線形独立であるとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ はアフィン独立であると呼ばれる．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が線形独立であれば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ がアフィン独立であることを示せ．
4. $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n} \in \mathbb{R}^m$ とし，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}$ は線形独立，また，任意の $i \geq r+1$ に対して，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}, \boldsymbol{a}_{\cdot i}$ は線形従属であると仮定する．この時，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつことであることを証明せよ．