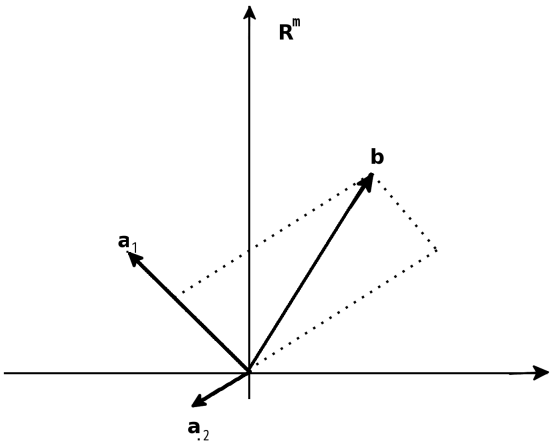

図 14: 線形方程式系の線形結合による表現.

となる.

さらに,

$$X_i := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_{i\cdot}^T \boldsymbol{x} = b_i\} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

と定義すると，線形方程式系 (3) の解は

$$\bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

となる.

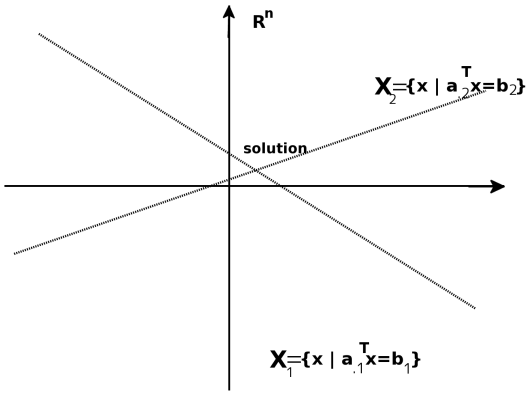

図 15: 線形方程式系の内積を用いた表現.

[問題 03-01] 線形方程式系

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

を線形結合による表現を用いた解釈および内積表現を用いた解釈に従って図示し，解を求めよ.

[問題 03-02] 線形方程式系

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

の『要素による表現』,『線形結合による表現』,『内積を用いた表現』を説明し，それぞれの意味を簡単に説明せよ．ただし，$a_{ij} \in \mathbb{R}$，$b_i \in \mathbb{R}$ は定数であり，$x_j \in \mathbb{R}$ は変数とみなす $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

3.5 線形方程式系の解の存在について

一般に $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (3) において $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ で $m > n$ の場合は優決定系（overdetermined）である可能性があり，$m < n$ の場合は劣決定系（underdetermined）である可能性がある．解の存在や個数は以下の定理で確認できる．

定理３．１：

(a) 線形方程式系　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (3) が解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}).$$

(b) 線形方程式系　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (3) が唯一の解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}) = n.$$

[問題 03-03] $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n} \in \mathbb{R}^m$ とし，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}$ は線形独立，また，任意の $i \geq r+1$ に対して，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}, \boldsymbol{a}_{\cdot i}$ は線形従属であると仮定する．この時，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつことであることを証明せよ．

[問題 03-04] $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r} \in \mathbb{R}^m$ を線形独立と仮定する．このとき，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot r}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot r})$$

であることを証明せよ．

[問題 03-05] $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n} \in \mathbb{R}^m$ とする．以下の (a) と (b) を証明せよ．

(a) 線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}).$$

(b) 線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が唯一の解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}) = n.$$

[問題 03-06] $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n\right)$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする．ただし，$\boldsymbol{a}^j \in \mathbb{R}^m \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする．この時，

(i) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数の定義を述べよ．

(ii) 線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は『$\boldsymbol{A}$ の階数と $m \times (n+1)$ 行列 $\left(\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots \boldsymbol{a}^n\ \boldsymbol{b}\right)$ の階数が一致することである』を証明せよ．

系３．２：$m = n$ の場合，以下の (a)，(b)，(c)，(d)，(e) は全て同値である．

(a) 線形方程式系 (3) は唯一の解をもつ．

(b) $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

(c) $\boldsymbol{A}$ は逆行列をもつ．

(d) $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n}$ は線形独立である．

(e) $\boldsymbol{a}_{1\cdot}, \boldsymbol{a}_{2\cdot}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n\cdot}$ は線形独立である．

[問題 03-07] Farkas の補題

$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^m \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して，以下の２組の等式・不等式について考える．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i x_i = \boldsymbol{b}, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$

(b) $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (\boldsymbol{a}_i)^T \boldsymbol{y} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} > 0$

この時，

$$\text{(a) が解を持つ} \ \Leftrightarrow\ \text{(b) が解を持たない}$$

が成立する． $m = 2$ の場合について，この命題を図を用いて確かめよ．また，一般の m, n の場合について，この命題の一部『(a) が解をもつ $\Rightarrow$ (b) が解を持たない』を証明せよ．

[問題 03-08] Gordan の定理
上記の [問題 03-07] と同様の考察を次の (a)，(b) に対して行え．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i x_i = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \neq \boldsymbol{0},$

(b) $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (\boldsymbol{a}_i)^T \boldsymbol{y} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

4　行列式

正方行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の行列式は以下のような計算式で定義される．

$$\det(\boldsymbol{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ただし，S_n は n 個の要素を置換する写像の集合からなる n 次対称群であり，$\mathrm{sign}(\cdot)$ は置換写像の符号を表す．つまり，

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

は $\sigma(1) = i_1,\ \sigma(2) = i_2,\ \ldots,\ \sigma(n) = i_n$ を表し，

$$\mathrm{sign}(\sigma) := \begin{cases} 1, & \sigma\text{が偶置換のとき} \\ -1, & \sigma\text{が奇置換のとき} \end{cases}$$

$\det(\boldsymbol{A})$ を $|\boldsymbol{A}|$ とも表記する．

例：２次元の場合

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ とすると，$\boldsymbol{A}$ の行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{A})|$ は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ で作られる平行四辺形の面積となり，行列式の符号は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の位置に関する『向き』を表している（図 16）．

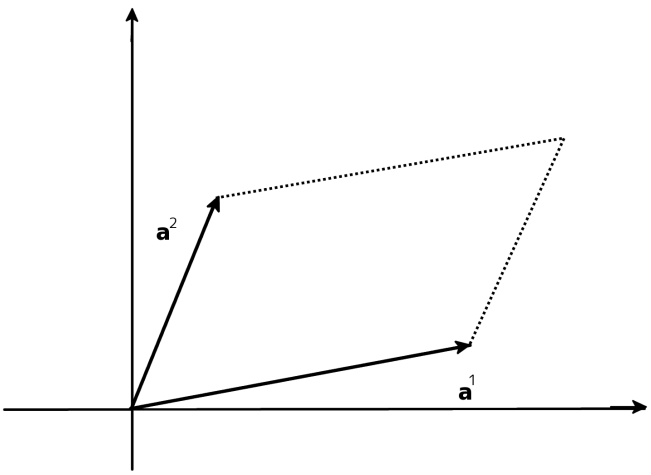

図 16: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ によって定められた平行四辺形．

[問題 04-01]　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)$ とする．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が作る平行四辺形の面積は $|\det(\boldsymbol{A})|$ に一致することを示せ．

例：3 次元の場合

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ とすると，$\boldsymbol{A}$ の行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{A})|$ は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ で作られる平行六面体の体積となり，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ はそれらの位置に関する『向き』を表している（図 17）．

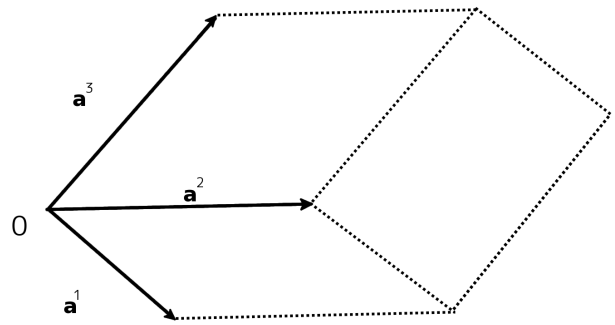

図 17: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ によって定められた平行六面体．

定理４．１：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とすると

(a) $\det(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \alpha\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_n) = \alpha \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_n)$;

(b) $\det(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{a}_i + \alpha\boldsymbol{a}_j\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{A}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n,\ j \neq i)$;

(c) $\det(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{a}_j\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_{j-1}\ \boldsymbol{a}_i\ \boldsymbol{a}_{j+1} \ldots \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{A}) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n \quad i \neq j)$.

これらは列に関する性質であるが，行に関しても同様に成り立つ．

定理４．２：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を適当な次元の行列だとすると

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{C})$$

が常に成り立つ．さらに，

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) \qquad \det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$$

も成り立つ．

よって，行列式を計算する場合，余因子を用いた展開でも可能であるが，行列の基本変形（ある行/列に定数をかけて異なる行/列に足す）を用いて上（下）三角行列に変形すると計算が容易にできる．

4.1 外積

定義４．３：実数ベクトル空間である $\mathbb{R}^3$ において，以下の（演算）関数 $\cdot\times\cdot : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を外積と呼ぶ．つまり $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ に対して，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3.$$

ただし，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底とする．記号の意味を多少乱暴に使うと，以下のような記憶し易い形になる

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

定理４．４：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，以下の性質が成り立つ．

1. $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ で θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす角である．
2. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$
3. $(\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
4. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$
5. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

例：先程の３次元での例において $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ とすると，$\boldsymbol{A}$ の行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{A})|$ は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ で作られる平行六面体の体積となっていたが，この体積は $|(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)^T\boldsymbol{a}_3|$ として外積と内積を用いても計算できる．

5 線形方程式系の解法，逆行列と行列式の計算

線形方程式系を解くには Cramer の公式などがあるが，ここではより計算効率のよい Gauss-Jordan と Gauss の消去法を用いる．

5.1 Gauss-Jordan の消去法

例：

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 4 \qquad (1) \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \qquad (2) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

上記の行列の左側が単位行列になるように基本演算を施す．

$(1)\times\frac{1}{2}$ として (3) とおく．
$(2)-(1)\times\frac{1}{2}$ として (4) とおく．

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & = & 2 \qquad (3) \\ & & \frac{3}{2}x_2 & = & 3 \qquad (4) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$(4) \times \frac{2}{3}$ として (6) とおく．
$(3) - (4) \times \frac{1}{3}$ として (5) とおく．

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 1 & (5) \\ x_2 & = & 2 & (6) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

解は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ となる．

これらの計算で加減算は合計で 7 回，乗算は 16 回，除算は 4 回行ったことになる．

以上の計算により，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して定理４．１より，

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$$

となるので，$\det(\boldsymbol{A}) = 3$ となる．

また，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解 } \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の解 } \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

から $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{y}_1\ \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{I}$ となるので，$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{y}_1\ \boldsymbol{y}_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ であり，上記の右辺の行列には線形方程式系の係数行列の逆行列が求まるようになっている．

5.2 Gauss の消去法

今度はより一般的に $n \times n$ 次元の正則行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について考える．

• 行に関する基本演算を行うことは（その線形方程式系に）左側から正則行列をかけることに相当する．

• 行に関する基本変形によって $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ から $(\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{c})$ が得られたとすると，ある $n \times n$ 次元の正則行列 $\boldsymbol{P}$ が存在して，

$$\boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{c})$$

となる．ゆえに，線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ と同値となる．

Gauss-Jordan の消去法では，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ となるように基本変形を行った．この時には $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ となる．

Gauss の消去法では $\boldsymbol{B}$ が<u>上三角行列</u>になるようにする:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

この時，

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{c_n}{b_{nn}} \\
x_i &= \frac{c_i - \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j}{b_{ii}} \quad (i = n-1, n-2, \ldots, 1)
\end{aligned}
$$

のように方程式を解くことを後退代入を行うという．

例： 先程と同じ例で考える．

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & x_2 & = & 4 \qquad (1) \\
x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \qquad (2)
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}
$$

上記の行列の左側が上三角行列になるように基本演算を施す．

$(2) - (1) \times \frac{1}{2}$ として (4) とおく．

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & x_2 & = & 4 \qquad (3) \\
 & & \frac{3}{2}x_2 & = & 3 \qquad (4)
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}
$$

ここから後退代入を逐次行う．

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2 \\
x_1 &= \frac{4 - x_2}{2} = \frac{4-2}{2} = 1
\end{aligned}
$$

解は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ となる．

これらの計算で加減算は合計で 3 回，乗算は 3 回，除算は 3 回行ったことになる．

さらに，定理４．１と定理４．３より，$\det(\boldsymbol{A}) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ となる．

以上をまとめると，Gauss-Jordan の消去法と Gauss の消去法が問題なく実行できるとすると，四演算は行列の次元 n に対して，表 1 のようになる．

表 1: Gauss-Jordan の消去法および Gauss 消去法の四演算数．

	$\pm$	$\times$	$\div$	$\pm$	$\times$
Gauss-Jordan	$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$	$\frac{n}{2}(n^2+n+2)$	n^2	$n^2(n-1)$	n^3
Gauss	$\frac{n(2n^2+3n-5)}{6}$	$\frac{n(2n^2+3n-5)}{6}$	$\frac{n(n+1)}{2}$		

上記の表から 2 つ手法は計算量オーダーでは同じであるが，Gauss の消去法の方が係数が小さいので，計算が少なくなる．

[問題 05-01] $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して，消去法を使って

(a) 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を解け．

(b) $\det(\boldsymbol{A})$ を計算せよ．

(c) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を計算せよ．

[問題 05-02] $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする．行列の基本変形（または消去演算）を用いて

(a) 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$；

(b) $\boldsymbol{A}$ の逆行列；

(c) $\boldsymbol{A}$ の行列式

を計算する方法について，数値例とともに説明せよ．

5.3 枢軸（pivot）選択

今迄の議論では Gauss-Jordan もしくは Gauss の消去法は常に実行でき，計算機による有限桁制限による計算誤差が起こらないとことを暗に仮定していた．

例：

$$\begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x_1 & + & x_2 & = & 1 \qquad (1) \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \qquad (2) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

上記のように誤差がある線形方程式系を数値計算ソフトウェア MATLAB を用いて Gauss の消去法を行うと，

$(2) - (1) \times \frac{1}{10^{-17}}$ として (4) とおく．

$$\begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x_1 & + & x_2 & = & 1 \qquad (3) \\ & & -10^{17}x_2 & = & -10^{17} \qquad (4) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 & 1 \\ 0 & -10^{17} & -10^{17} \end{pmatrix}$$

ここから後退代入を逐次行う．

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-10^{17}}{-10^{17}} = 1 \\ x_1 &= \frac{1-1}{10^{-17}} = 0 \end{aligned}$$

解は $(x_1, x_2) = (0, 1)$ となる．

このような現象を避けるために枢軸（pivot）選択を行う．例えば，これから計算をする行列の係数の中で一番絶対値が大きいものを見つけ出し（完全枢軸（pivot）選択），行と列を入れ替える．今回は幸い他の係数は ± 1 なので，1 行目と 2 行目を入れると以下のようになる．

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & = & 0 \qquad (1') \\ 10^{-17}x_1 & + & x_2 & = & 1 \qquad (2') \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-17} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

同様に数値計算ソフトウェア MATLAB を用いて Gauss の消去法を行うと，

$(2') - (1') \times \frac{10^{-17}}{1}$ として $(4')$ とおく．

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & = & 0 \qquad (3') \\ & & x_2 & = & 1 \qquad (4') \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここから後退代入を逐次行う．

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{1} = 1 \\
x_1 &= \frac{0+1}{1} = 1
\end{aligned}
$$

解は $(x_1, x_2) = (1, 1)$ となる．

6　ベクトル空間の次元，基底，直交補空間

ここで扱う n 次元 Euclid 空間 V はすべて $\mathbb{R}^n$ であるとみなす．

定義 6．1：S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．この時，S の次元 r は次の条件を同時に満たす正整数のことである．

(a) S 内に r 本の線形独立なベクトルの組が存在する．

(b) S 内の任意の $r+1$ 本のベクトルの組は線形従属である．

また，$\dim(S) = r$ と表記する．

定義 6．2：S を次元が r である $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が S の基底であるためには次の条件を同時に満たす必要がある．

(a) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in S$.

(b) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は線形独立である．

さらに，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ がお互いに直交するとき，すなわち

$$(\boldsymbol{a}_i)^T \boldsymbol{a}_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

のとき，これらのベクトルを S の直交基底と呼ぶ．それに加え，$\|\boldsymbol{a}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ のとき，これらのベクトルを正規直交基底と呼ぶ．

[問題 06-01] 以下の問いに答えよ．

(i) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 T が線形写像であることの定義を述べよ．

(ii) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S が部分空間であることの定義を述べよ．

(iii) S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間としたとき，その基底および次元の定義を述べよ．

(iv) S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間，T を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像としたとき，S の T による写像 $\{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in S\}$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間になることを証明せよ．