

経営・経済のための最適化理論

第10回

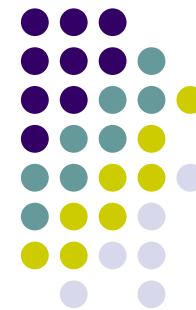
最大流問題

最小費用流問題

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp



応用:プロ野球リーグの優勝可能性 判定と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エクス ポス
ブレー ブス 	83	71		1	6	1
フィ リーズ 	80	79	1		0	2
メッツ 	78	78	6	0		0
エクス ポス 	77	82	1	2	0	

(2000年頃のデータ)

エクスポスの
優勝可能性

× 残り全勝して
も80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝可能性判定：やや難しいケース



アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エクス ポス
ブレー ブス 	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィ リーズ 	80	79	1勝 1		0	2勝 2
メッツ 	78	78	6勝 6	0		0
エクス ポス 	77	82	1	2	0	

ブレーブスが全敗で
同じ勝ち数に

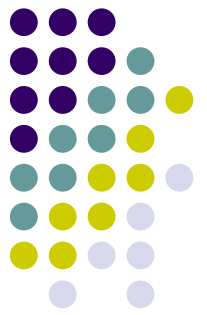
残り試合全勝で83勝

メッツが84勝

フィリーズの
優勝可能性



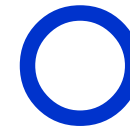
優勝可能性判定: やや難しいケース



アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エクス ポス
ブレー ブス 	83 83	71		1	6	1
フィ リーズ 	80 81	79	1		0	2
メッツ 	78 84	78	6	0		0
ナシヨナ ルズ 	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で
下位チームが
上位チームに
勝った場合



優勝の可能性は
ゼロではない

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝可能性判定: 複雑なケース



他の地区所属のチームとの試合

では、次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

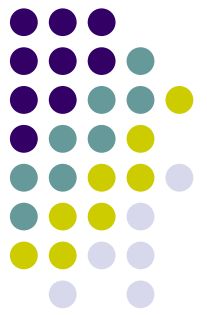
	勝	敗	残り試合数					
			ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ	レイズ	その他
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13
レイズ	49	86	3	4	0	0		20

レイズは残り試合全勝すると76勝

ヤンキースの勝ち数以上→優勝の可能性？

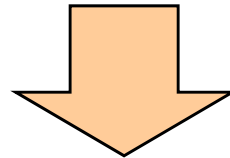
最大流問題を使って判定ができる

優勝可能性判定の基本的な考え方



レイズにとって都合の良いケースのみ考える

- レイズは残り全勝
- 東地区の他チームは他地区との試合において全敗

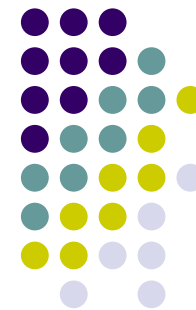


東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

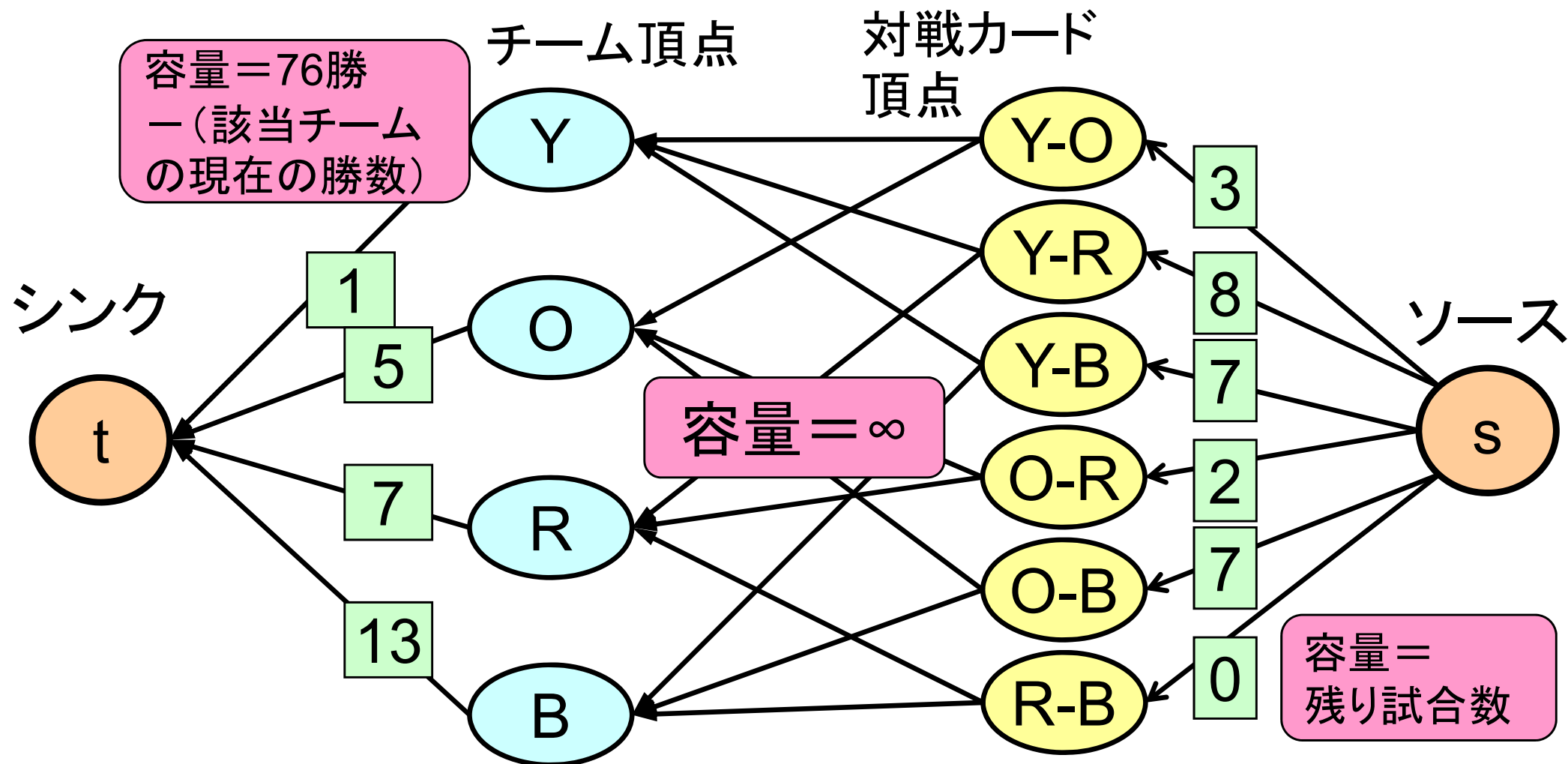
- どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる
→優勝の可能性なし
- あるケースにおいては、他チームは全て76勝以下
→優勝の可能性あり

最大流問題(供給需要を満たすフローの問題)に帰着

最大流問題への帰着： グラフの作り方



最大フローの総流量＝残り試合数の合計27⇔優勝可能性が存在





最大流問題への帰着： 枝容量の決め方

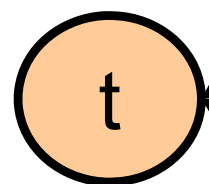
Yの勝数はレイズの
最大勝ち数76を超
えてはいけない

Yは各対戦カード
から
勝数を受け取る

YとOの対戦カード
から
合計3の勝数を
YとOに供給

容量 = 76勝
- (該当チーム
の現在の勝数)

シンク

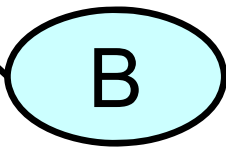
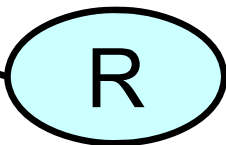
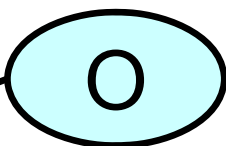
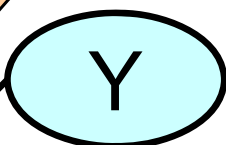


1

5

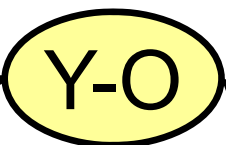
7

13

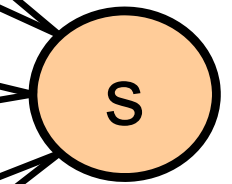


容量 = ∞

頂点



ソース



容量 =
残り試合数

3

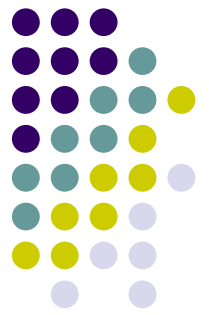
8

7

2

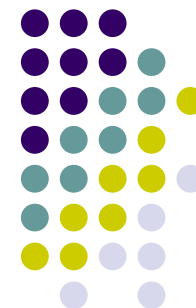
7

0



その他の優勝可能性判定問題

- アメリカのプロ野球の優勝可能性判定問題は比較的容易
- 日本のプロ野球
 - リーグ優勝判定は難しい(引き分けあり, 勝率1位が優勝)
 - プレーオフ進出判定はもっと難しい(勝率3位まで考慮するため)
 - 分枝限定法のような技法で正確かつ効率的に計算
 - ➔NTTデータ数理システム社と時事通信社
- サッカーのリーグ戦
 - 勝ち2点, 引き分け1点, 負け0点 ➔ 最大流問題に帰着できる
 - 勝ち3点, 引き分け1点, 負け0点 ➔ 難しい
 - (対戦チーム間での勝ち点の合計が一定でないため)



CS 進出ナンバー導出プログラム

1. 身近に潜む数理計画問題
2. CS 進出ナンバーを求める
3. 運用方法

時事通信社ご担当者様へのインタビュー記事は[こちらからご覧ください](#)

1. 身近に潜む数理計画問題

日本プロ野球でクライマックスシリーズにどの球団が、あと何勝で進出できるのかを示すクライマックスシリーズ進出ナンバー(以下、CS 進出ナンバー)が 2012 年 8 月 17 日より配信されました。計算エンジンには Numerical Optimizer を使用し、時事通信社様との共同で開発を行いました。

日本プロ野球では両リーグそれぞれ上位 3 球団が、日本選手権シリーズ進出をかけたクライマックスシリーズに出場できます。どの球団が、あと最低何勝すれば必ずクライマックスシリーズに進出できるか(CS 進出ナンバー)は試合が進むにつれて、重要な指標です。しかし、3 位以内という条件のうえ、日本のプロ野球には引き分けが存在することで試合の結果パターンは膨大な数に上ります。さらには最終勝率が同じだった場合など、特定の条件下ではより複雑な判断基準が存在するため、算出は非常に困難となります。

我々は、考えられる状況を制約式として定式化し、数理計画問題としてモデル化することで、膨大なパターンの中から条件を満たすパターンが存在するかを素早く判定し、CS 進出ナンバーを算出しました。

2. CS 進出ナンバーを求める

では、CS 進出ナンバーはどのようにして求めるのでしょうか。

ある球団(以下、対象球団)の CS 進出ナンバーを求めたいとします。この場合、まず対象球団の CS 進出ナンバーを n と仮定します。

日本プロ野球ではまず、交流戦を含めた最終勝率(以下、勝率)で順位が判断されるので、残る全試合パターンで対象球団の勝率が単独 3 位以内となれば、クライマックスシリーズ進出は確実です。

そこでまず、「対象球団が勝率で単独 4 位以下である」というモデルを数理計画問題として記述し、少なくとも 1 つのパターンでこのモデルに解が存在すれば、 n は CS 進出ナンバーではない、ということが言えます。

▶ 製品概要

▶ 最適化とは

▶ 導入事例

▶ ソリューション

- ▶ ユーザー様の声
- ▶ マーケティングソリューション
- ▶ GIS ソリューション
- ▶ スケジューリングソリューション
- ▶ エネルギーソリューション
- ▶ スポーツソリューション
- ▶ 金融工学ソリューション

▶ セミナー情報

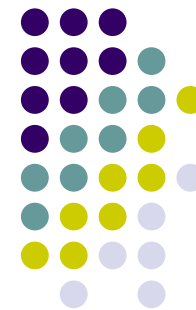
▶ ユーザーサポート

- ▶ 数理計画用語集
- ▶ メールマガジン
- ▶ ダウンロード

資料請求・お問合せは
TEL:03-3358-6681

▶ 資料請求・お問合せ

NTTデータ数理システム社のWebページより



最小費用流問題

最小費用流問題



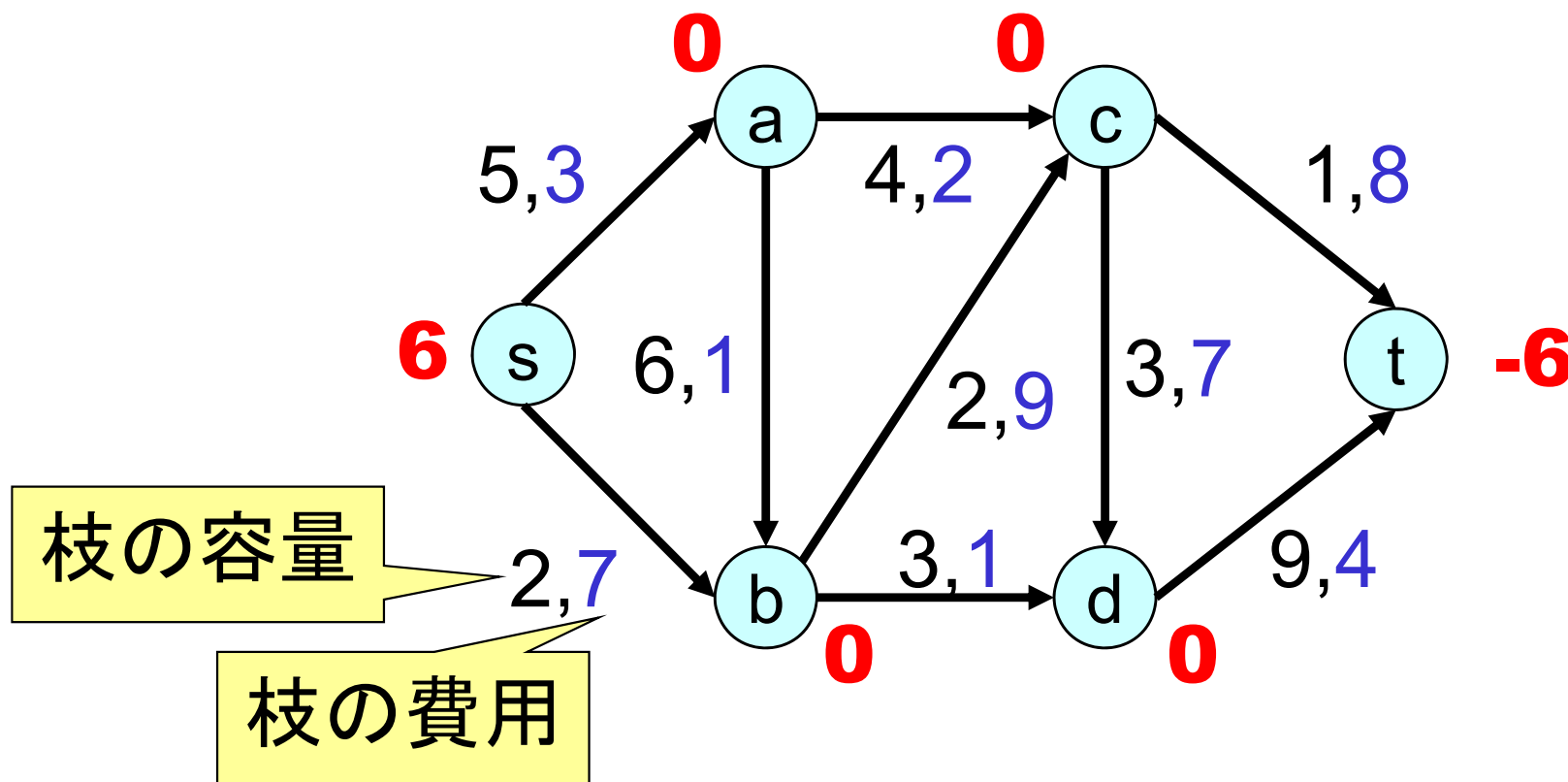
入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

各頂点 $i \in V$ の供給・需要量 b_i (ただし b_i の和は0)

($b_i > 0 \rightarrow i$ は供給点, $< 0 \rightarrow i$ は需要点, $= 0 \rightarrow i$ は通過点)

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geq 0$, 費用 c_{ij}

出力: 需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題：定式化



目的：最小化 $\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

(各枝の費用
× フロー量) の和

条件 $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

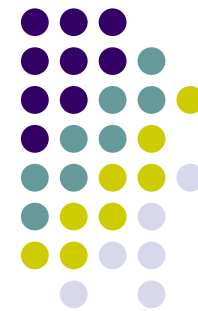
各枝の容量条件

$\sum \{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る枝}\}$
 $- \sum \{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る枝}\} = b_k \quad (k \in V)$

各頂点での
流量保存条件
(需要供給量に
関する条件)

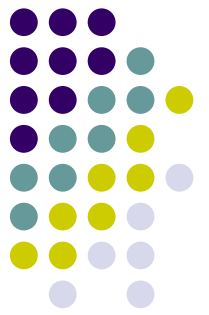
これも線形計画問題

他のネットワーク最適化問題との関係



- 最短路問題
- 最大流問題
- 二部グラフの最大重みマッチング問題

これらの問題は**最小費用流問題に変換可能**
(最小費用流問題の特殊ケース)



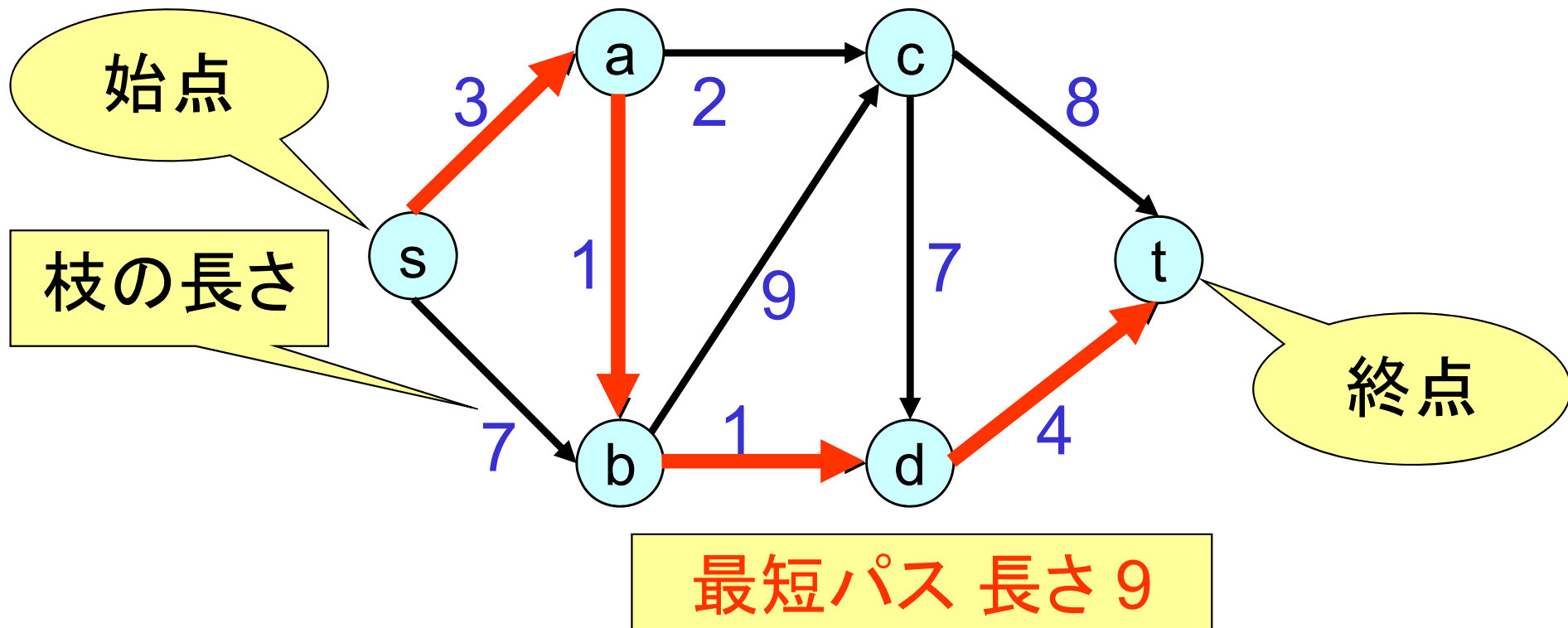
最短路問題との関係

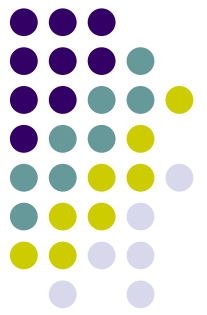
最短路問題の定義

入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

始点 $s \in V$, 終点 $t \in V$, 各枝 $(i, j) \in E$ の長さ c_{ij}

出力: s から t までの長さ最短のパス



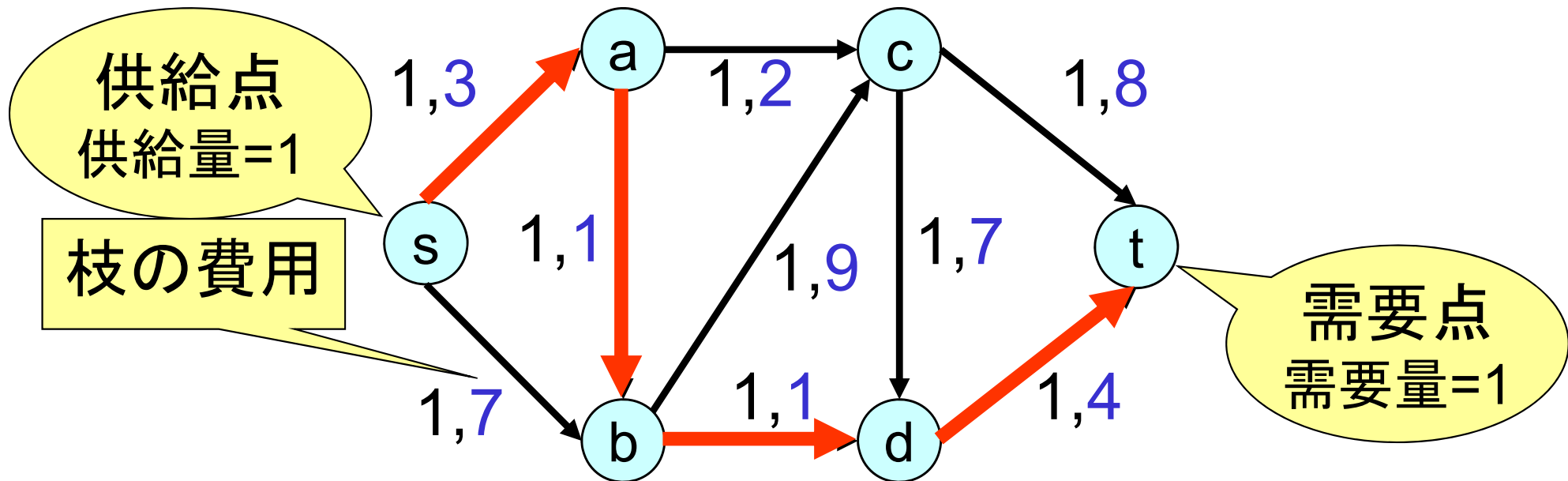


最短路問題との関係

最短路問題から最小費用流問題への変換

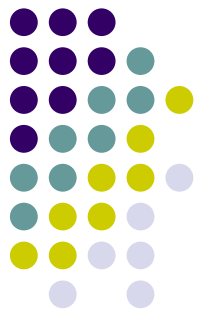
始点→供給点, 終点→需要点, 需要(供給)量=1

枝の長さ→枝の費用, 各枝の容量=1



最小費用(整数)フローを求める

→ 最短 s-t パスを流れるフローになる



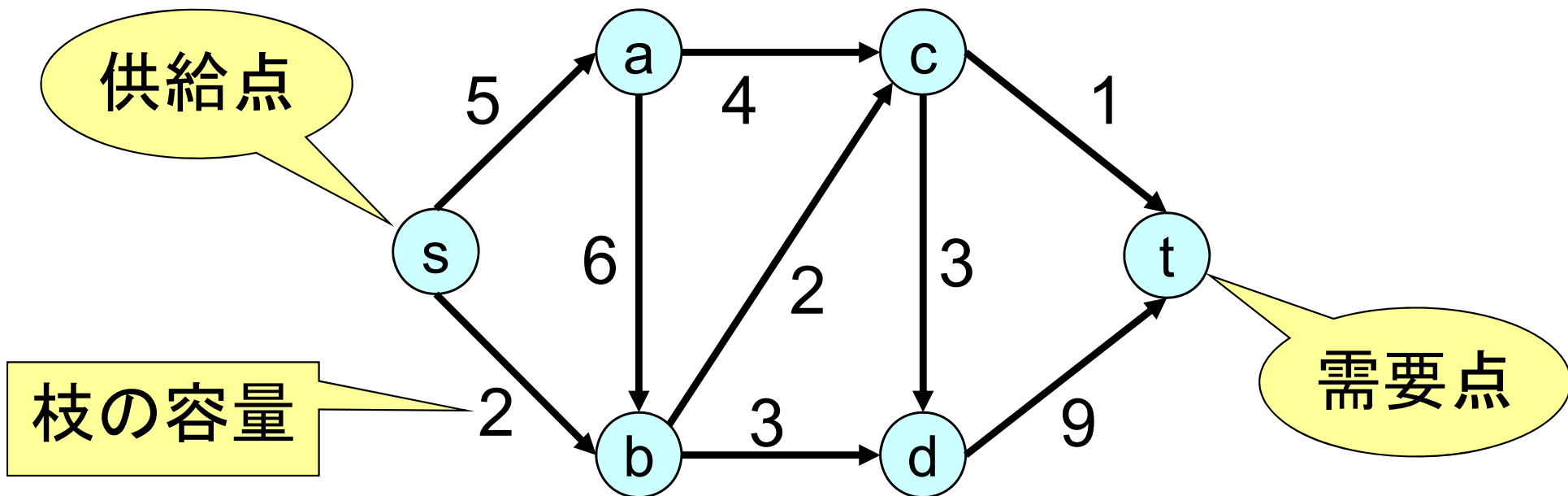
最大流問題との関係

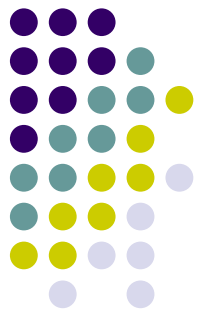
入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geq 0$

出力: フロー値が最大のフロー





最大流問題との関係

最大流問題から最小費用流問題への変換

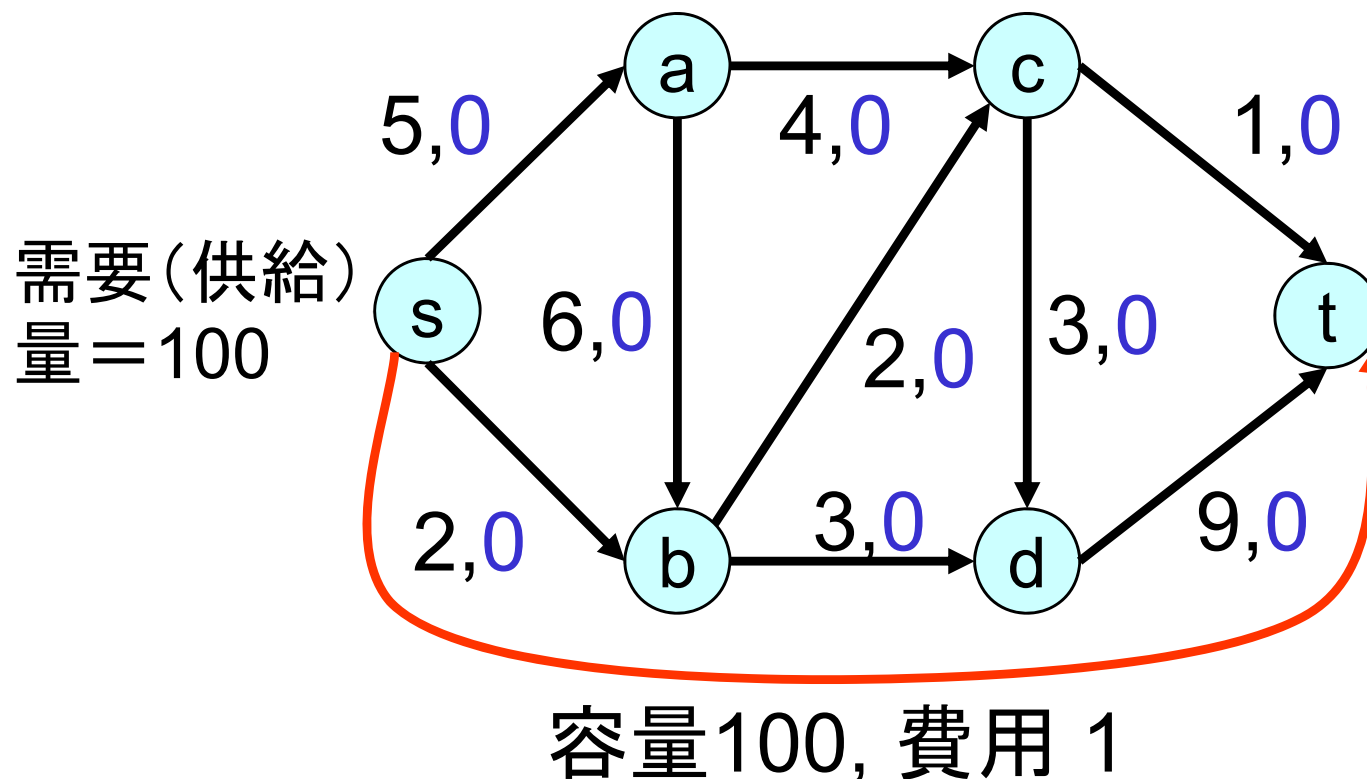
新たな枝(s,t)の追加: 容量=U (十分大きい値), 費用=1

元々の枝の費用=0

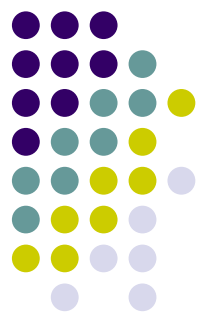
s の需要・供給量=U, t の需要・供給量= -U

最小費用フロー
を求める

→ 元々の枝を
流れるフローは
最大フローに
なっている



二部グラフの最大重みマッチングとの関係



二部グラフの最大重み k マッチングは最小費用流に帰着可能

- (1) 新しい頂点 s, t をおく. 需要供給量 = k
- (2) s から上側の各頂点に向かう枝をおく. 容量=1, 費用=0
- (3) 下側の各頂点から t に向かう枝をおく. 容量=1, 費用=0
- (4) 元々の枝を上から下に向き付け. 容量= $+\infty$,
費用= $(-1) \times$ 各枝の重み

※ 最大重みマッチングを最小費用流に帰着可能することも可能

二部グラフの最大重みマッチングとの関係



二部グラフの最大重み k マッチング問題は最小費用流問題に帰着可

- (1) 新しい頂点 s, t をおく. 需要供給量 $= k$
- (2) s から上側の各頂点に向かう枝をおく. 容量 $=1$, 費用 $=0$
- (3) 下側の各頂点から t に向かう枝をおく. 容量 $=1$, 費用 $=0$
- (4) 元々の枝を上から下に向き付け. 容量 $=+\infty$,
費用 $=(-1) \times$ 各枝の重み

