

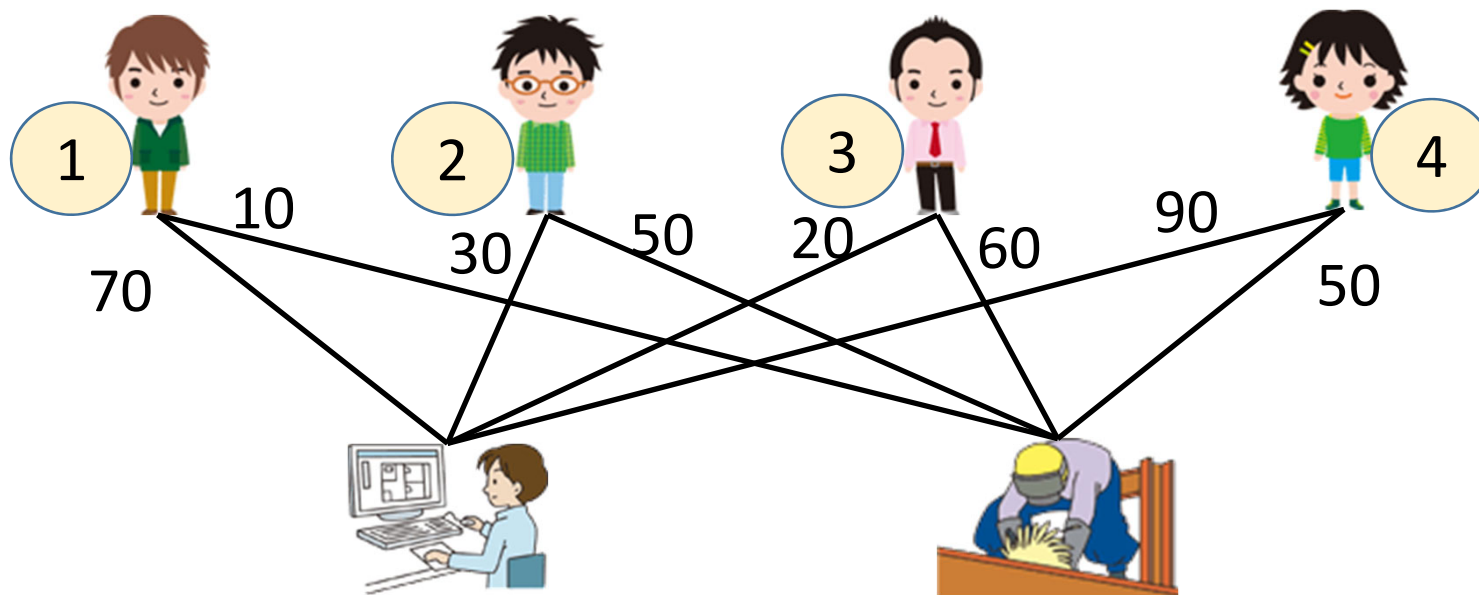
数理経済学
第4回
最大重みマッチング問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最大重みマッチング問題の 定義と例

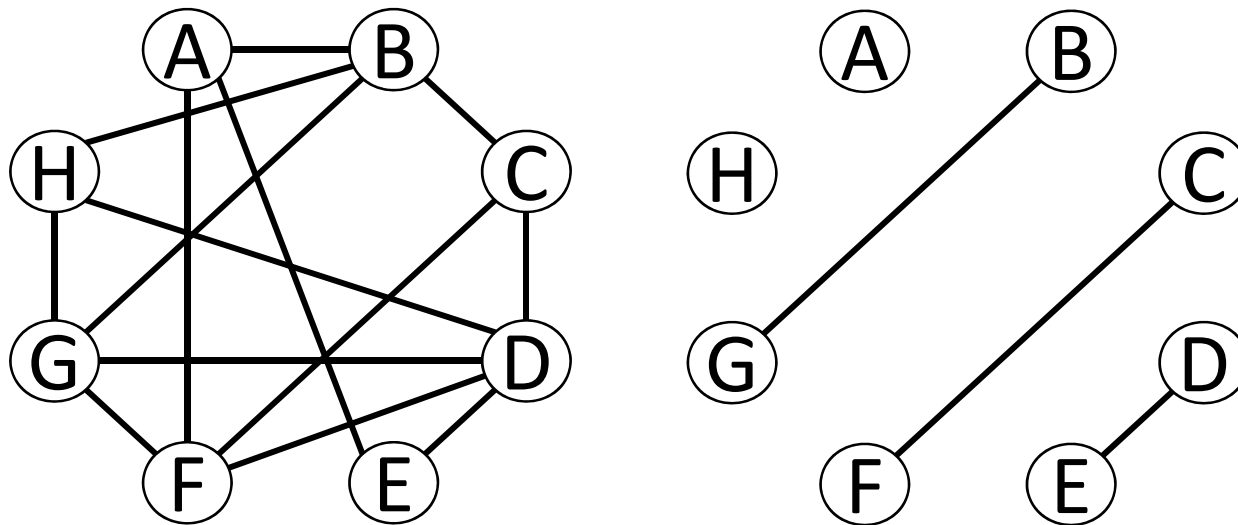
最大重みマッチング問題

- 労働者に仕事を割り当てたい
 - 各労働者には, 高々1つの仕事が割り当て可能
 - 各仕事は, 高々一人の労働者に割り当て可能
 - 労働者を仕事に割り当てると, 利益が得られる
- 総利益を最大にする割り当てを見つけたい→最大重みマッチング



一般グラフの最大重みマッチング問題

- 一般のグラフでも、最大重みマッチング問題を考えることができる
 - 例: 2人チーム(ペア)で作業を行う
 - 相性の良いチームを多く作りたい
 - 相性を数値化, 相性の合計値を最大にするチームを求めたい



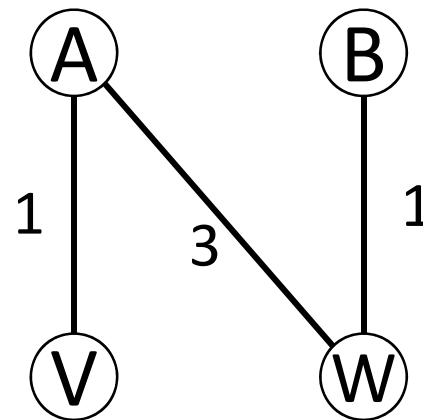
最大重みマッチング問題の定義

最大重みマッチング問題

- **入力:** グラフ $G=(V,E)$ (頂点集合 V , 枝集合 E),
各枝 (u,v) の重み $w(u,v)$
- **出力:** 枝重みの和が最大のマッチング (最大重みマッチング)

※「最大重みマッチング→最大サイズマッチング」は
一般に成り立たない

例: 最大重みマッチングは
 $\{(A,W)\}$, 重み3
最大サイズマッチングは
 $\{(A,V), (B,W)\}$, 重み2

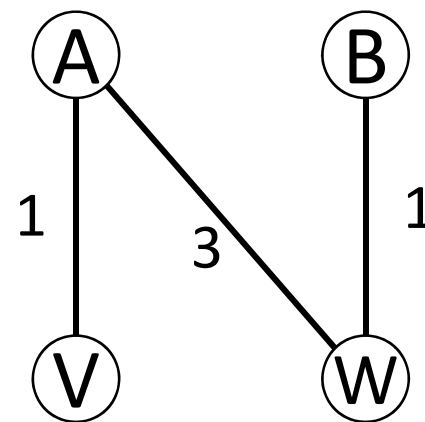


最大重みkマッチング問題の定義

最大重みkマッチング問題

- **入力:** グラフ $G=(V,E)$ (頂点集合 V , 枝集合 E),
各枝 (u,v) の重み $w(u,v)$
正整数 k
- **出力:** 枝数= k のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの
(最大重みkマッチング)

例: 最大重み1マッチングは
 $\{(A,W)\}$, 重み3
最大重み2マッチングは
 $\{(A,V), (B,W)\}$, 重み2



最大重みマッチング問題の例1： 研究室配属問題

各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの4人を研究室X,Yへ

各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	2	2

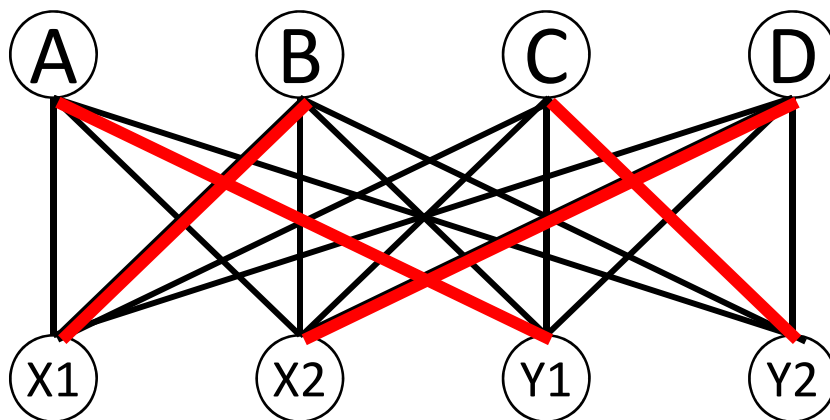
学生の満足度の合計を最大にしたい

満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

研究室配属問題から 最大重みkマッチング問題へ

各学生に対応する頂点, 各研究室の「枠」に対応する頂点
各学生と「研究室枠」の間に枝, 重み＝満足度

k ＝学生数



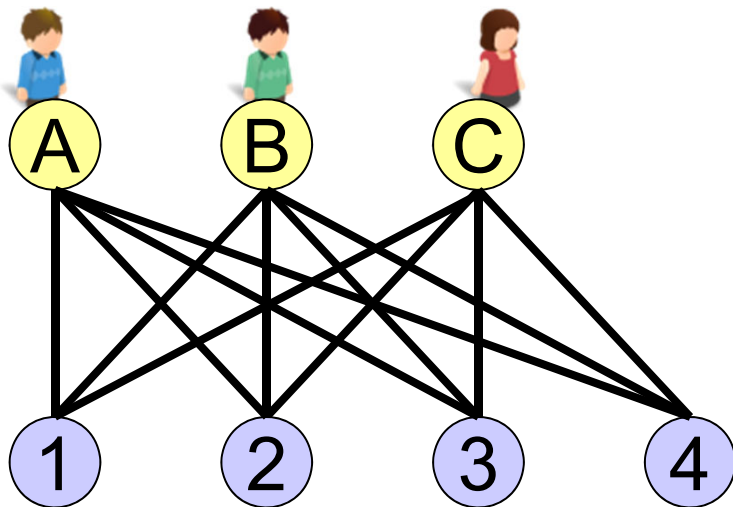
$w(u,v)$	A	B	C	D
X1	6	8	5	9
X2	6	8	5	9
Y1	9	1	5	3
Y2	9	1	5	3

最大 k マッチング→研究室配属案

※注意：この配属決定法では、
学生が嘘をつくことで得する可能性がある。

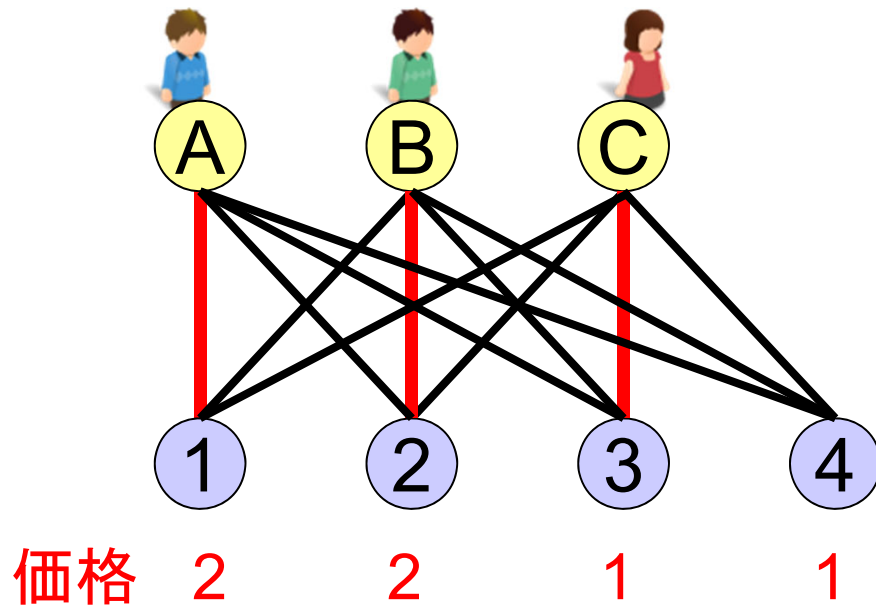
最大重みマッチング問題の例2: 複数財オークション

- 複数の財(商品), 複数の入札者が存在するオークション
 - 入札者に財が割り当てられたら,
入札者は指定された金額のお金(価格)を払う
 - 各入札者は各財に対する満足度(価値)の情報を提示
- オークション主催者は, 入札者全員が「満足する」ように
入札者と財のマッチング, および財の価格を決める
「満足」=実質的な満足度(満足度-価格)が最大の財を得る



満足度	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

入札者が不満を持つ例1



満足度	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

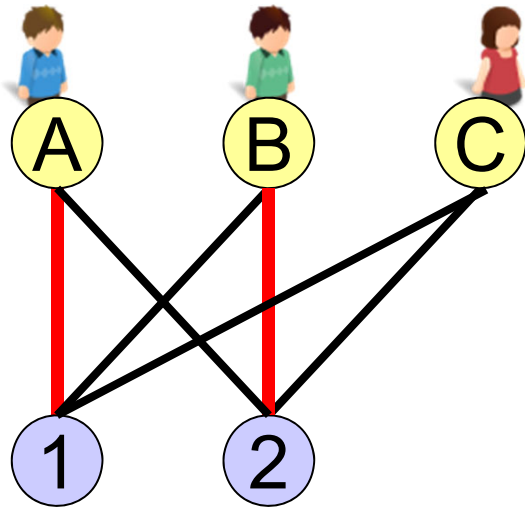
上記のマッチングと価格を提示→入札者は満足？

入札者Aは**不満**: 入手した財①の実質的な満足度 $=3-2=1$
< ②の実質的な満足度 $=7-2=5$

入札者Bは**不満**: 入手した財②の実質的な満足度 $=6-2=4$
< ③の実質的な満足度 $=7-1=6$

入札者Cは満足

入札者が不満を持つ例2



満足度	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7

価格 4 2

上記のマッチングと価格を提示→入札者は満足？

入札者Aは不満: 入手した財①の実質的な満足度 $=3-4=-1 < 0$

入札者Bは満足: 入手した財②の実質的な満足度 $=6-2=4$

$\geq$ ①の実質的な満足度 $=1-4=-3$

入札者Cは不満: 入手できなかった財②の実質的な満足度 $=7-2>0$

複数財オークションのワルラス均衡

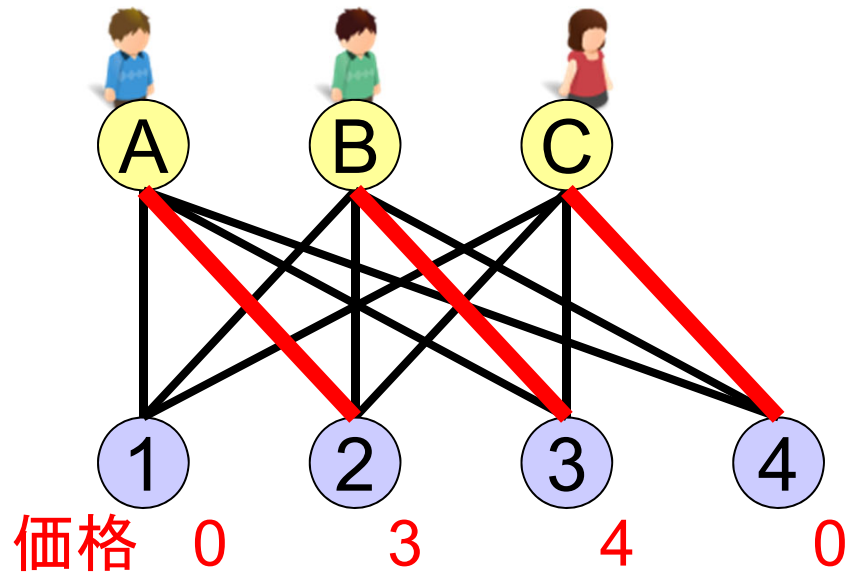
- ワルラス均衡: 入札者全員が「満足する」財の割当 & 財の価格

ワルラス均衡: 以下の条件を満たす価格と財の割当

- 入札者 i に財 j が割り当てられる
→ 他の財より利得 $w(i,j)-p(j)$ が大きい(または等しい),
かつ $w(i,j)-p(j) \geq 0$
- 入札者 i に財の割り当てがない → $\max_{1 \leq j \leq n} \{w(i,j) - p(j)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割り当てられない → $p(j)=0$

均衡割当, 均衡価格 = 均衡におけるマッチングと価格

均衡の例1

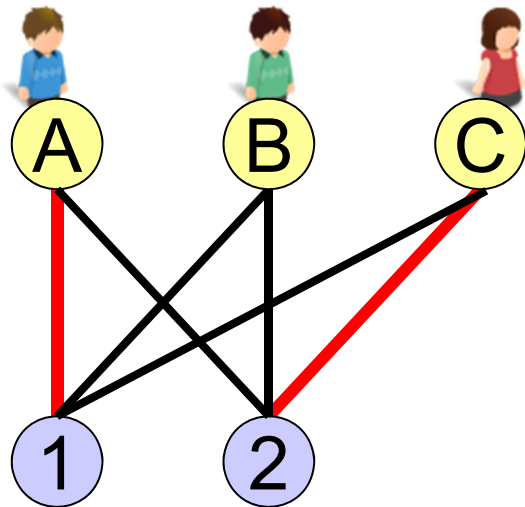


- 各入札者が得た財の利得は最大
- 財1は売れ残り → 価格0

$w(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

利得	A	B	C
①	3	1	0
②	4	3	4
③	-3	3	4
④	0	0	4

均衡の例2



価格 1 6

- 入札者A, Cの得た財の利得は最大
- 入札者Bは利得 ≤ 0 の財のみ
→ 財の割当がなくてもよい

満足度	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7

利得	A	B	C
①	2	0	-1
②	1	0	1

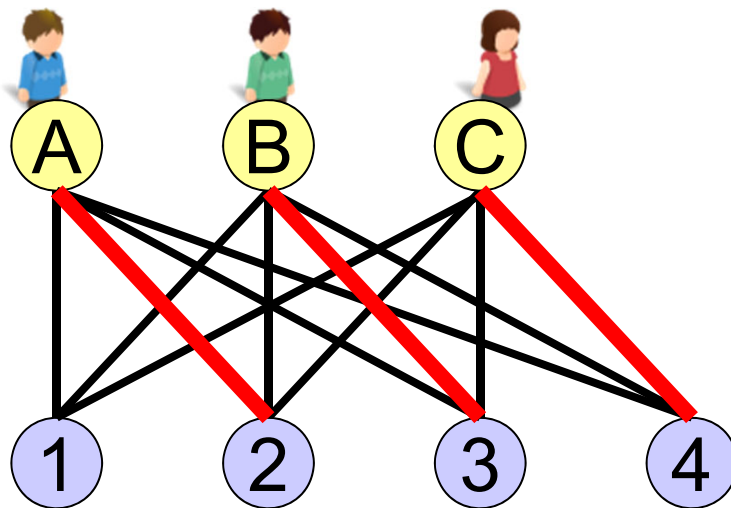
複数財オークションと 最大重みマッチングの関係

最大重みマッチング問題を解くと、均衡割当が得られる

定理

参加者と財の間のマッチングMは均衡割当

↔ Mは重み= $w(i,j)$ としたときの最大重みマッチング



$w(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡価格と差分不等式系

均衡割当が分かっているとき,

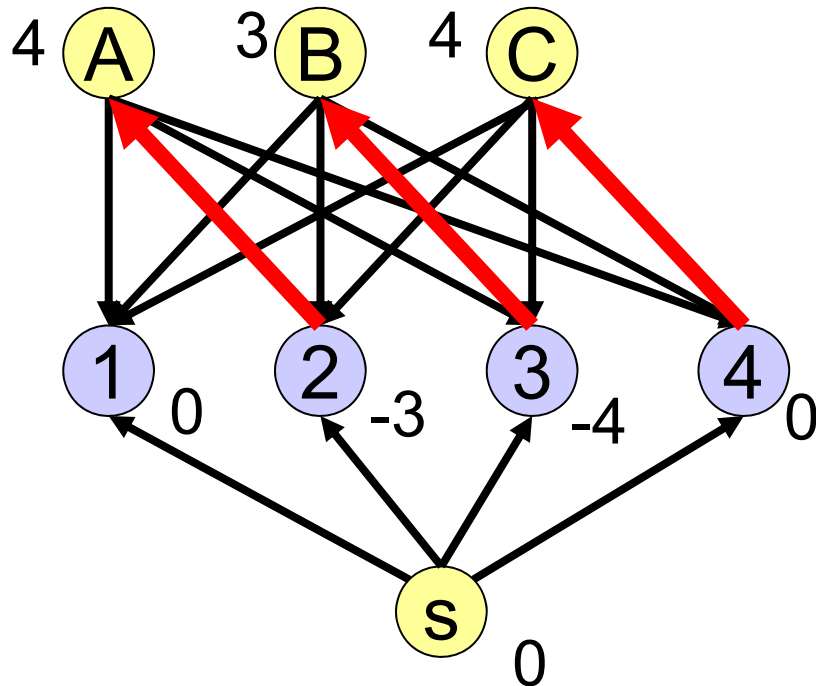
均衡価格は差分不等式系で表現可能

- 入札者 i に財 j_i が割り当てられる
 - 他の財より利得 $w(i, j_i) - p(j_i)$ が大きい(または等しい),
かつ $w(i, j_i) - p(j_i) \geq 0$
 - $w(i, j_i) - p(j_i) \geq w(i, j) - p(j) \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n)$
 $w(i, j_i) - p(j_i) \geq 0$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 - $\max_{1 \leq j \leq n} \{w(i, j) - p(j)\} \leq 0$
 - $w(i, j) - p(j) \leq 0 \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n)$
- 財 j が誰にも割り当てられない
 - $p(j)=0$

均衡価格の計算

均衡価格は最短路問題を解いて求めることができる

- 最大重みマッチングの枝: 財 $\rightarrow$ 参加者に向き付け. 長さ=重み
- その他の枝: 参加者 $\rightarrow$ 財に向き付け. 長さ=-重み
- 新しい頂点 s , および s から各財への長さ0の枝をつける.
- 財 j の価格 = $-(\text{頂点 } j \text{ への最短距離}) \rightarrow$ 均衡価格



$w(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

最大重みマッチングと交互路

(復習) 交互路・交互閉路

定義: 路Pはマッチング Mに関する**交互路** $\leftrightarrow$ 次の条件を満たす

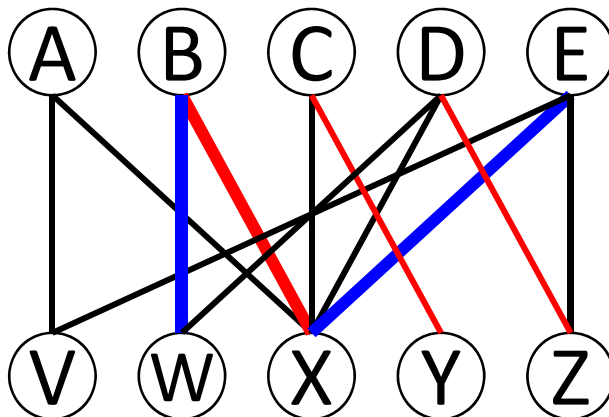
(a) 路Pに Mの枝とM以外の枝が交互に現れる

(b) 枝集合 $M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ はマッチング

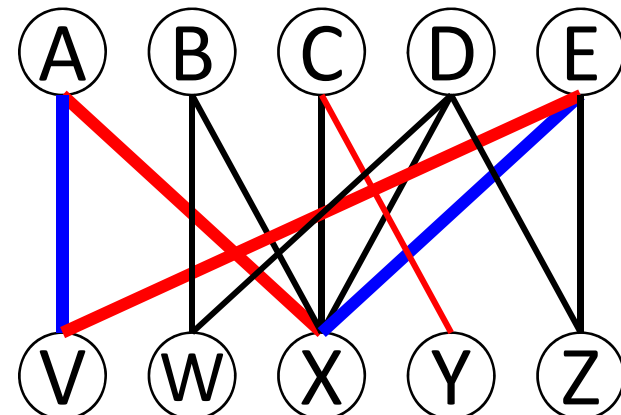
定義: マッチング Mに関する**交互閉路**

= Mの枝とM以外の枝が交互に現れる閉路

交互路の例



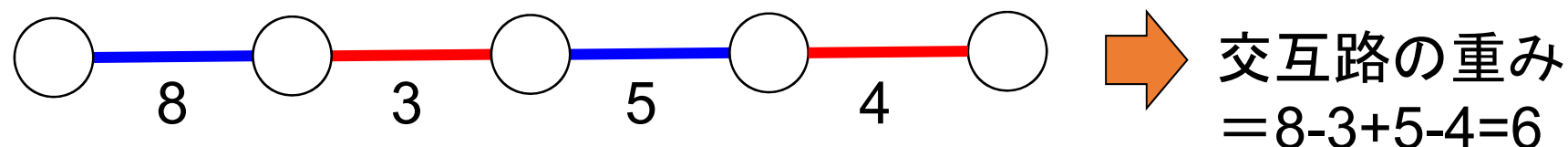
交互閉路の例



交互路・交互閉路による マッチングの更新

20

定義: マッチング M に関する交互路 (交互閉路) P の **重み**
 $= P \setminus M$ の枝重みの和 $- P \cap M$ の枝重みの和



命題 マッチング M に対し, P は (M に関する) 交互路または交互閉路
→ P を使って M の枝を入れ替えると, 新しいマッチング M' ができる

$$M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

$$M' \text{ の重み} - M \text{ の重み} = P \text{ の重み}$$

命題 正の重みの交互路 (交互閉路) が存在
→ 現在のマッチング M は最大重みではない
(対偶: マッチング M は最大重みマッチング
→ 正の重みの交互路 (交互閉路) は存在しない)

交互路によるマッチングの最適性条件

最大重みマッチングではない→正の重みの交互路(閉路)が必ず存在

命題 正の重みの交互路(交互閉路)が存在

←現在のマッチングMは最大重みではない

(対偶: マッチングMは最大重みマッチング

←正の重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

(証明) 最大重みマッチングを M^* とおく

枝集合 $(M^* \setminus M) \cup (M \setminus M^*)$ に注目

→ 幾つかの(Mに関する)

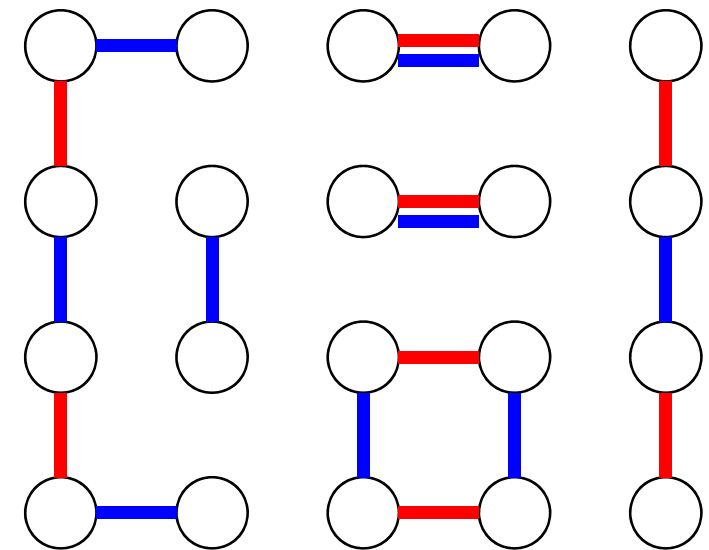
交互路・交互閉路からなる.

それらの重みの合計

$= M^* \setminus M$ の重み $- M \setminus M^*$ の重み

$= M^*$ の重み $- M$ の重み > 0

∴ 正の重みの交互路または交互閉路が必ずひとは存在



最大重みマッチングの計算

最大重みマッチング問題のアルゴリズム

「Mは最大重みマッチング $\leftrightarrow$ 正の重みの交互路(閉路)がない」

これに基づき, 次のアルゴリズムが得られる

アルゴリズムA

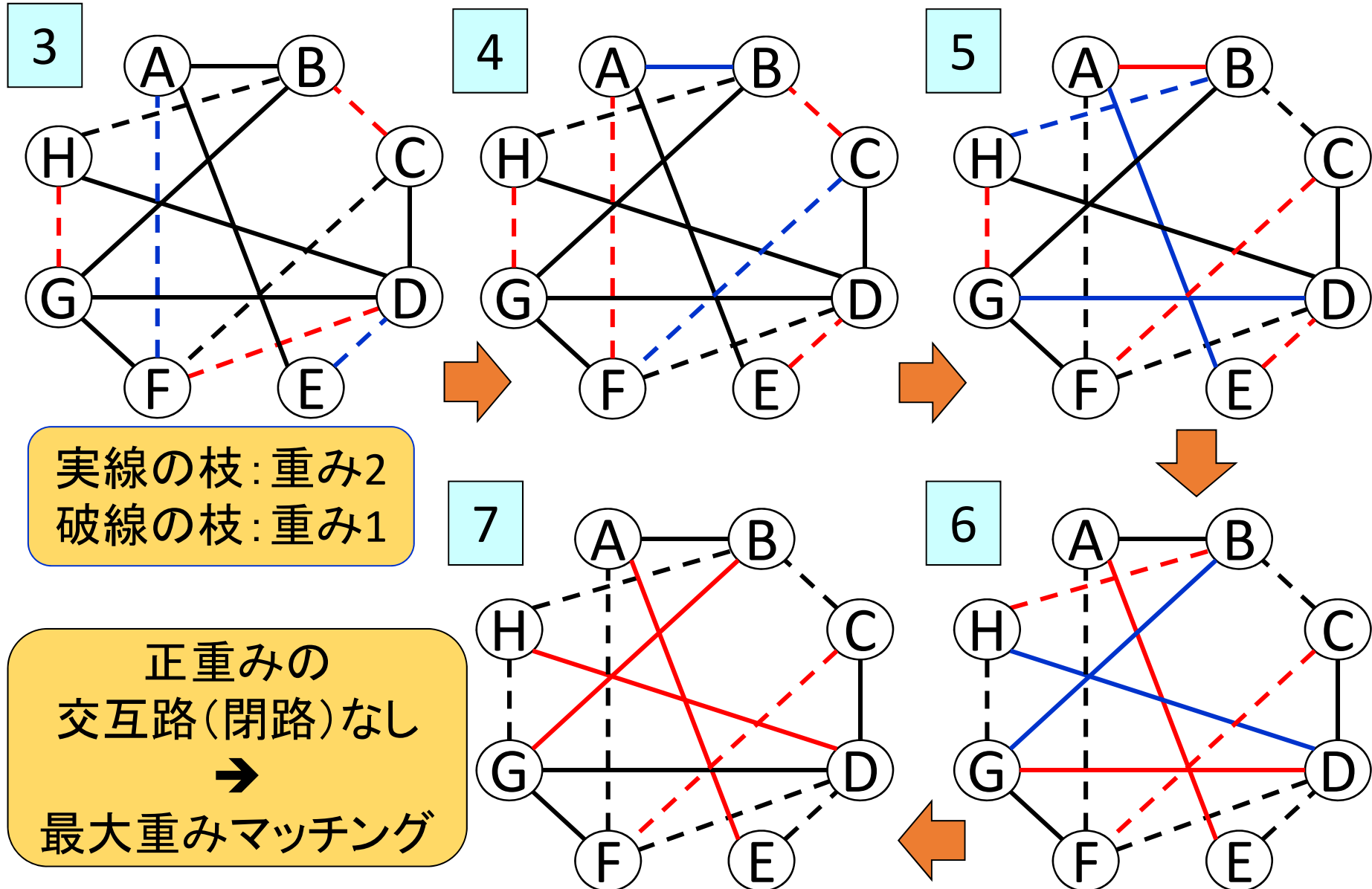
ステップ0: 初期マッチングMを任意に選ぶ(例えば $M := \emptyset$)

ステップ1: Mに関する正の重みの交互路(閉路)の存在をチェック.
存在しない $\rightarrow$ 現在のMは最大重みマッチング(終了)
存在する $\rightarrow$ ステップ2へ.

ステップ2: Mに関する正の重みの交互路(閉路) P をひとつ見つけ,
P を用いて M を更新 ($M := (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$)
ステップ1へ.

反復回数が多くなる可能性あり

アルゴリズムの実行例



最大重み増加路を用いたアルゴリズム

- 各 $k=0,1,2,\dots$ に対する最大重み k マッチングを求める
- 各反復で, 重み最大の増加路を利用
- 高々 $|V|/2$ 回の反復で終了

アルゴリズムB

ステップ0: $M_0 := \emptyset$, $k=0$ とする.

ステップ1: M_k に関する増加路が存在しない $\rightarrow$ 終了

ステップ2: M_k に関する最大重みの増加路 P をひとつ見つけ,
 P を用いて M_k を更新 ($M_{k+1} := (M_k \setminus P) \cup (P \setminus M_k)$)
 $k:=k+1$ においてステップ1へ.

命題 各 $k=0,1,\dots$ に対し, M_k は最大重み k マッチング

アルゴリズムの正当性

命題 各 $k=0,1,\dots$ に対し, M_k は最大重み k マッチング

(証明の概略)

ある k に対し, M_k は最大重み k マッチングとする.

このとき, ある最大重み $k+1$ マッチング M^* で,

$(M^* \setminus M_k) \cup (M_k \setminus M^*)$ が(一つの)増加路となるようなものが
存在することを示せば良い.

M^* として, $|M^* \cap M_k|$ 最大の最大重み $k+1$ マッチングを選ぶ

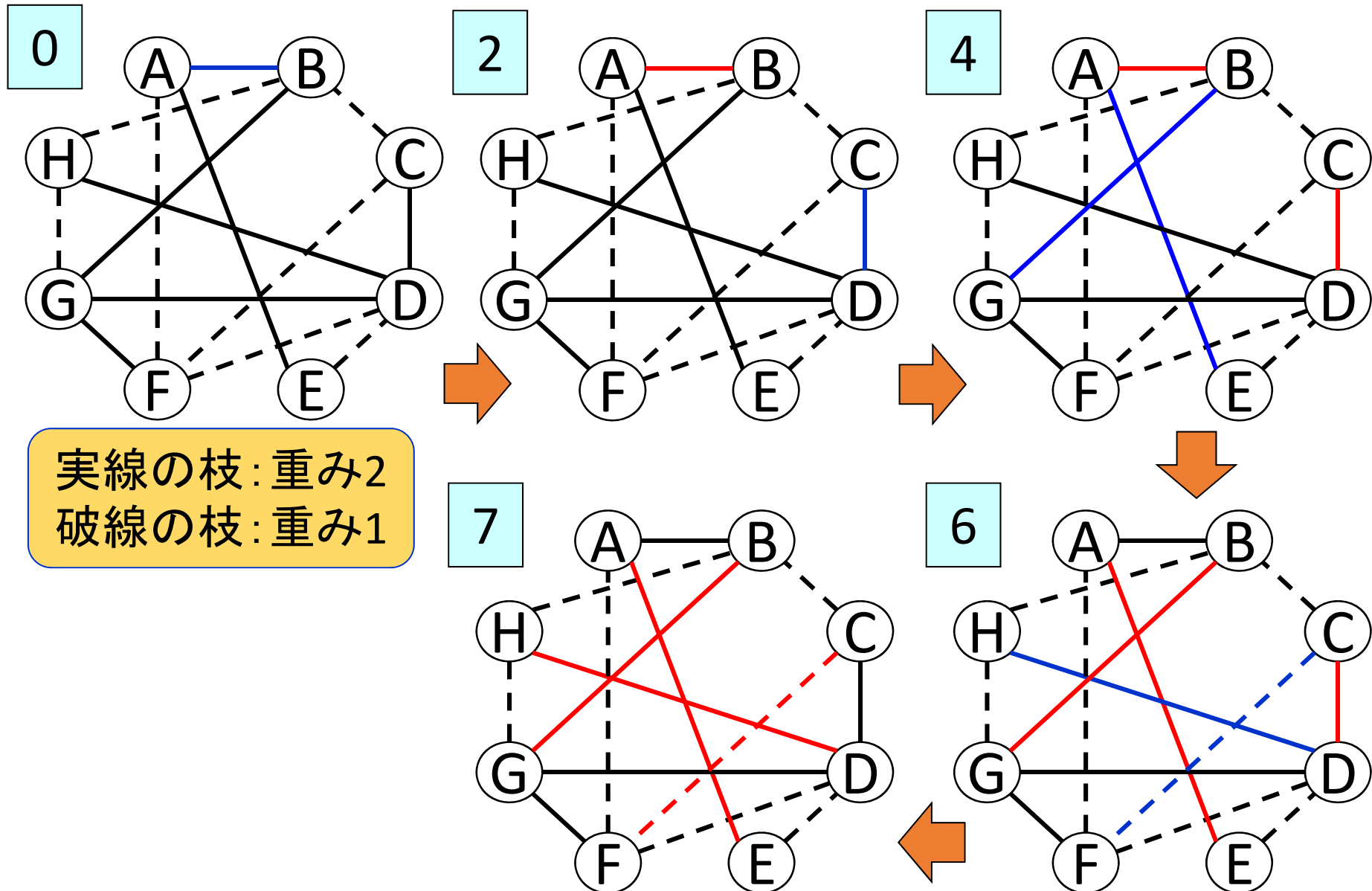
→ $(M^* \setminus M_k) \cup (M_k \setminus M^*)$ は交互路・交互閉路の集まり

(注意: M^* の方が枝数が多いので, 増加路が必ず存在)

交互路・交互閉路が2つ以上存在する

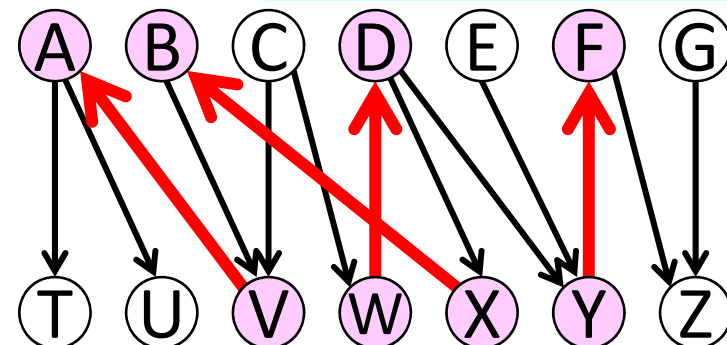
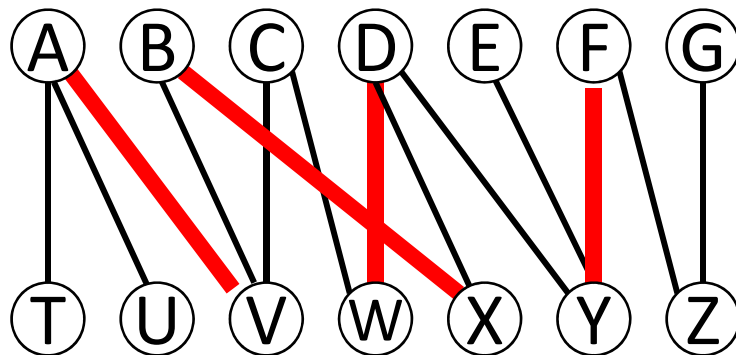
→ $|M^* \cap M_k|$ 最大に矛盾することが示せる(なぜ?)

アルゴリズムの実行例



重み最大の増加路の探し方: 二部グラフの場合

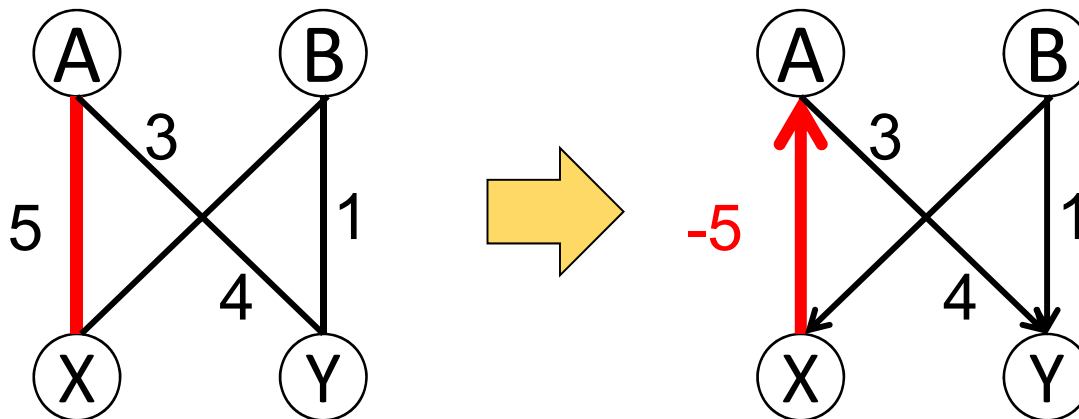
- 増加路を求める場合と同様に計算可能.
- 二部グラフの頂点集合が V_1, V_2 に分かれているとき,
 - マッチング M の枝は, V_2 の頂点から V_1 の頂点に向き付け
 - それ以外の枝は, V_1 の頂点から V_2 の頂点に向き付け
- V_1 の頂点のうち,
 - マッチングの枝が接続している頂点の集合 $\rightarrow U_1$
 - 残りの頂点の集合 $\rightarrow T_1$
- U_2, T_2 も同様に定義



ピンクの頂点: U_1 と U_2
 白い頂点: T_1 と T_2

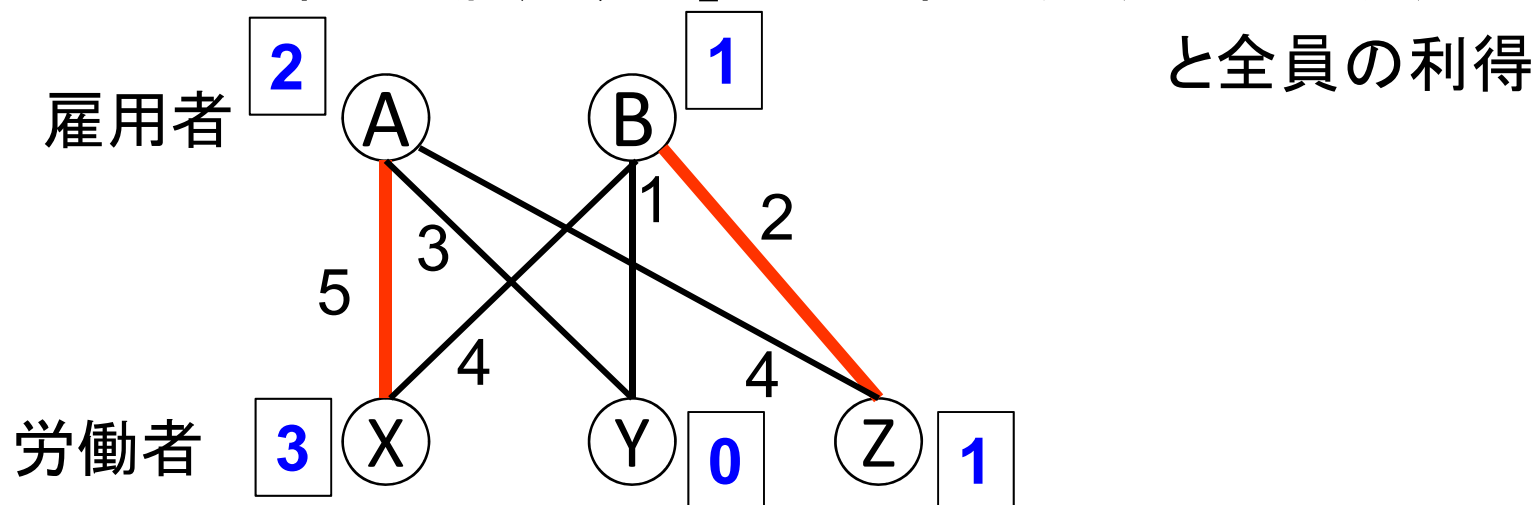
重み最大の増加路のを見つけ方: 二部グラフの場合

- 各有向枝の長さ:
 - マッチングの枝の逆向き枝の長さ = 元の長さ $\times (-1)$
 - それ以外の枝の長さ = 元の長さ
- 新しい有向グラフにおける T_1 の頂点から T_2 の頂点への有向路
 $\leftrightarrow$ 元の二部グラフの (M に関する) 増加路
- ∴ 有向グラフにおいて, T_1 の頂点から T_2 の頂点への有向路のうち,
 最も短いものを求めればよい



最大重みマッチング問題の例3: 割当ゲーム

- m 人の雇用者(仕事)と n 人の労働者
雇用者 i と労働者 j のペアに対する利益 $w(i,j) > 0$
- 雇用者 i が労働者 j を雇う(ペアになる)
→ 得た利益 $w(i,j)$ を2人で分配:
 i の利得 $p(i)$ + j の利得 $q(j)$ = 利益 $w(i,j)$
- 雇用者 i , 労働者 j は誰ともペアを組まない → 利得 $p(i) = q(j) = 0$
- 求めたいこと: 皆が「満足する」ペアの組み方(マッチング)



皆が満足する割当と利得

「満足」「不満」とは？

- ある雇用者 i , 労働者 j は現在ペアになっておらず,

かつ $p(i) + q(j) < w(i,j)$ 成立と仮定

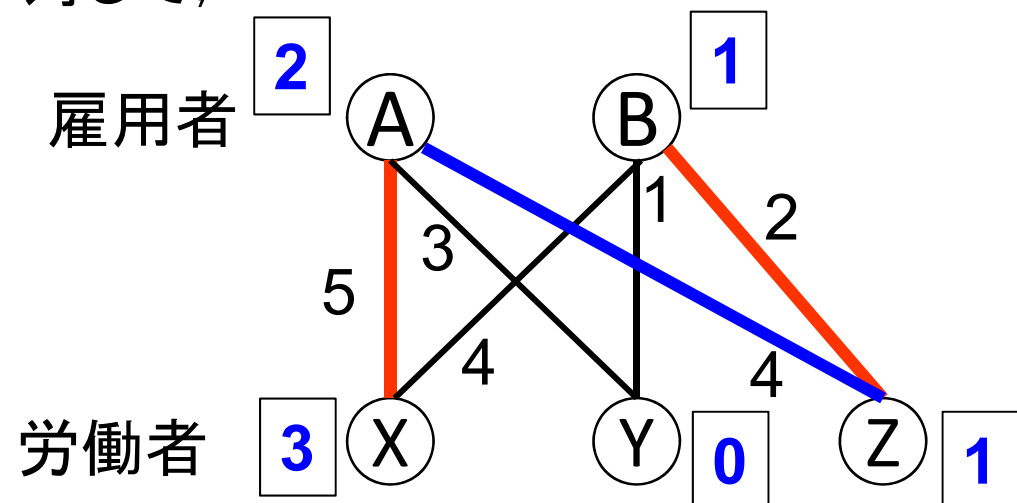
→ 現在のペアを解消し, i と j でペアになると, i と j の利得が増える

→ 現状は不満

∴ 皆が満足するための条件:

すべての雇用者 i , 労働者 j に対して,

$$p(i) + q(j) \geq w(i,j)$$



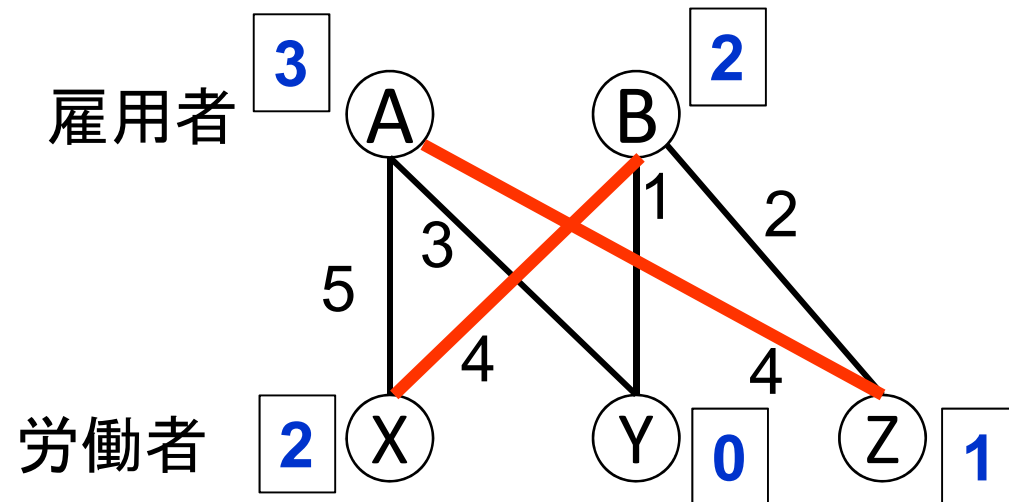
割当ゲームの定義

割当ゲームの目的:

以下の条件を満たす **マッチング** M と全員の **利得** $p(i), q(j)$ を求める

- $(i,j) \in M \rightarrow p(i) + q(j) = w(i,j)$
- i, j に接続する M の枝がない $\rightarrow p(i) = q(j) = 0$
- $p(i) + q(j) \leq w(i,j)$ (各雇用者 i , 各雇用者 j に対して)
- $p(i) \geq 0, q(j) \geq 0$ (各雇用者 i , 各雇用者 j に対して)

ゲーム理論における
「**協力ゲーム**」
の一種



割当ゲームと最大重みマッチングの関係

定理:

割当ゲームの条件を満たすマッチング

= $w(i,j)$ に関する最大重みマッチング

