

2020年度
経営・経済のための最適化理論
第2回

最短路問題
負の枝長を許した場合

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

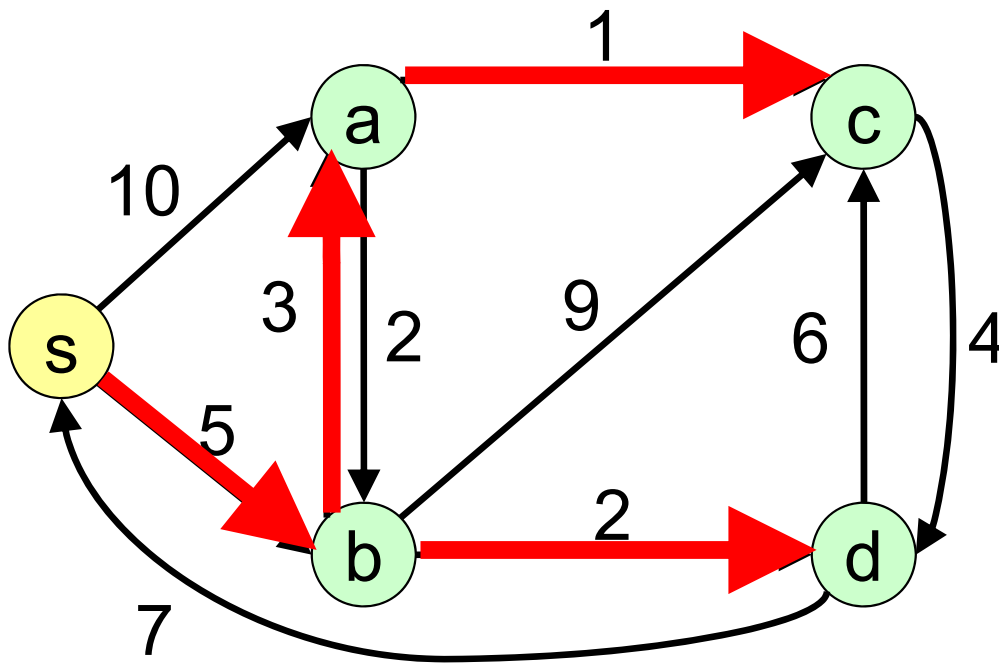
単一始点全終点 最短路問題

- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$

各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$

- 出力: s から **すべての頂点 v への最短路 $P(v)$ とその長さ $d(v)$**

枝の長さが
負の場合も扱う



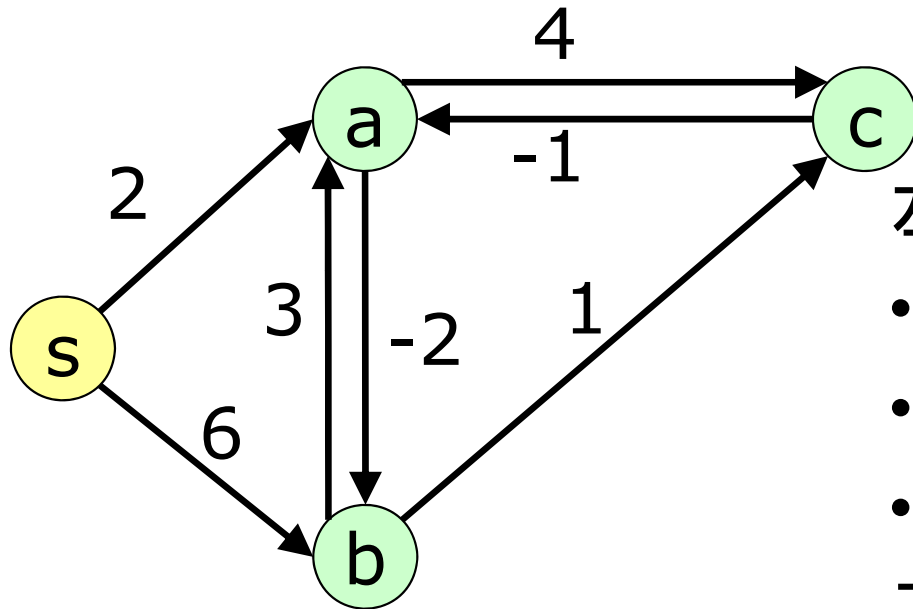
注意: 路は, 同じ頂点,
同じ枝を何回通っても可

最短路は存在しないこともある

頂点sからtへの最短路は必ずしも存在しない

ケース1: s から t への路がそもそも存在しない

ケース2: s から t への最も短い路が定まらない



左のグラフの s から a への路

- $s \rightarrow a$ 長さ2
- $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ 長さ0
- $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ 長さ-2

これを繰り返すと、任意に短い路が得られる $\therefore$ 最短路が定まらない

最短路問題における仮定

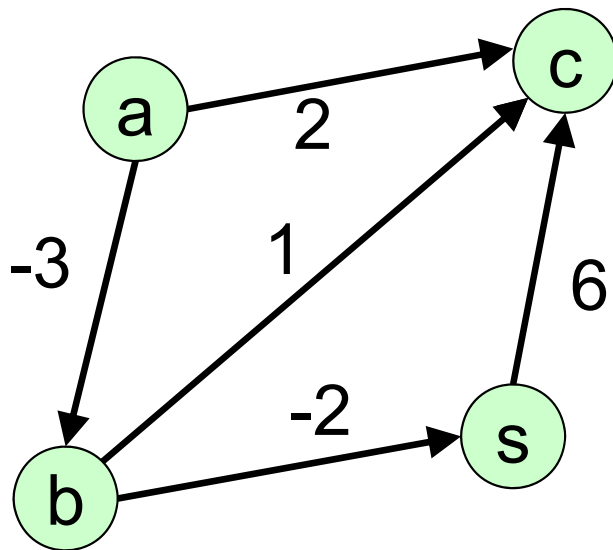
- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$, 各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$
- 出力: s から **すべての頂点 v への最短路 $P(v)$ とその長さ $d(v)$**

以降で使う仮定:

s から各頂点 v への路が存在

(存在しない場合は, 枝 (s, v) を追加, 長さを **十分大きい正数 M** とする)

どの程度大きくすれば良い?



左のグラフでは s から a への路が存在しない

→ 枝 (s, a) を追加する.

しかし, 長さ 3 とすると

s から c へのより短い路が生じる

負閉路 $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow s$ が新たに生じる

最短路問題における仮定

- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$, 各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$
- 出力: s から **すべての頂点 v への最短路 $P(v)$ とその長さ $d(v)$**

以降で使う仮定:

s から各頂点 v への路が存在

(存在しない場合は, 枝 (s, v) を追加, 長さを **十分大きい正数 M** とする)

十分大きい正数 M の満たすべき条件

(i) s, v 以外の頂点 u に対し,

s から u への, より短い路が新たに生じない

(ii) 負閉路が新たに生じない

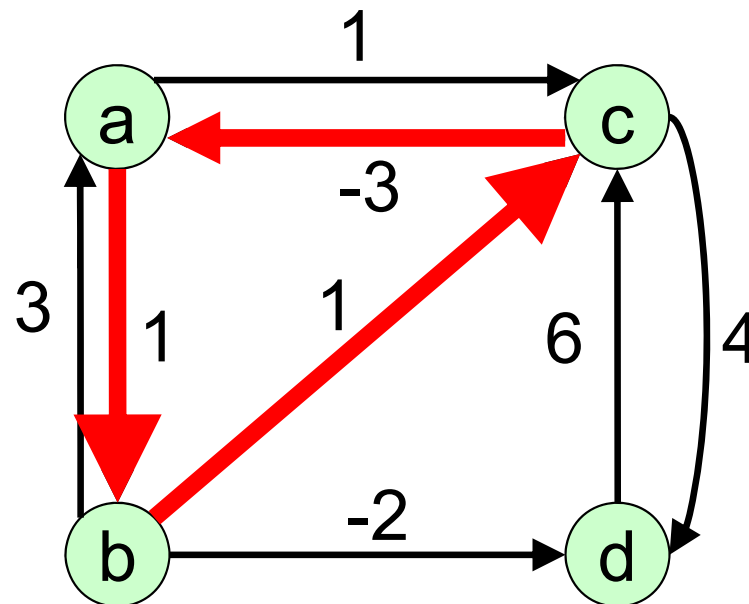
では, 具体的に M をどのように設定する? → 演習問題

※ より短い路や負閉路が生じるとしたら,

それは必ず枝 (s, v) を含む

関連する問題：グラフの負閉路の検出

- 入力：有向グラフ $G=(V, E)$
各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$)
- 出力：グラフに負閉路が「存在する」または「存在しない」の答え
存在するときは，負閉路を求める
(**負閉路** = 閉路のうち，枝の長さの和が負のもの)



関連する問題：差分不等式系

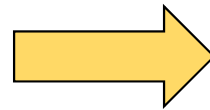
- 入力： n 個の変数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ からなる, 次の形の不等式系

$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

- 出力：不等式系に解が「ある」または「ない」の答え
存在するときは, 解を求める

具体例

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, & p_3 - p_1 &\leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, & p_4 - p_2 &\leq 5, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, & p_3 - p_4 &\leq 6, \\ p_1 &= 0, & p_4 &\leq 5 \end{aligned}$$



解あり

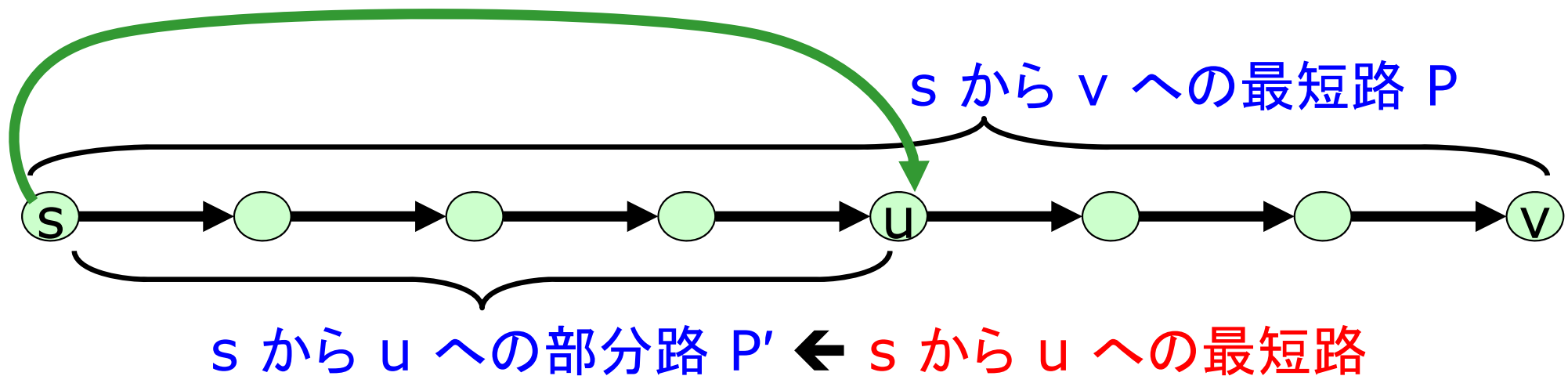
$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0, 1, 1, 5)$$

最短路の部分路は最短路

命題 P : 頂点 s から頂点 v への最短路

P は途中に頂点 u を含むと仮定

→ s から u への P の部分路 P' は, s から u への最短路



(証明) もし P' より短い路 P'' が存在したら

→ s から v への路として, まず P'' に沿って s から u に行き,
その後 P と同じ枝をたどって v に行く路 Q を考える.

Q の長さ - P の長さ = P'' の長さ - P' の長さ < 0

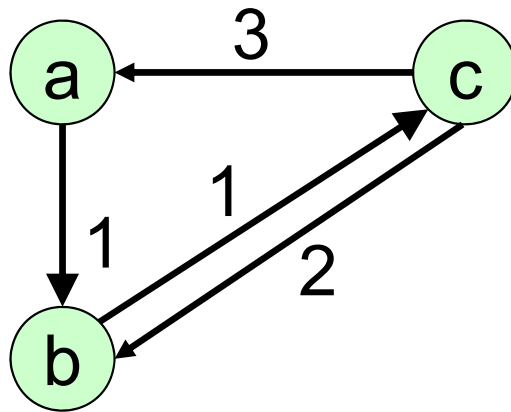
よって, P の選び方に矛盾.

ポテンシャル

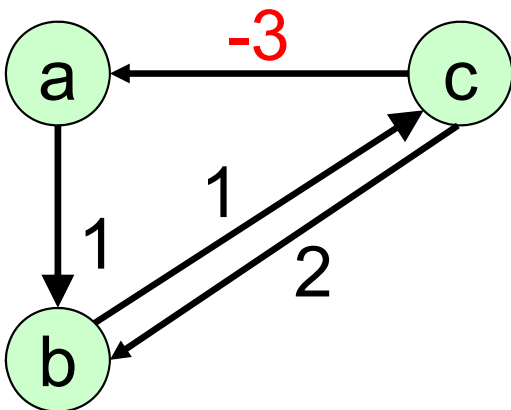
最短路問題に
おける
便利な道具

定義: 実数 $p(v) (v \in V)$ はポテンシャル

↔ 各枝 (u, v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル



※ポテンシャルは存在しないこともある
左のグラフにおいて,

$$p(a) - p(c) \leq -3, p(c) - p(b) \leq 2,$$

$$p(b) - p(a) \leq 1$$

は解をもたない

最短路と負閉路とポテンシャル

与えられたグラフにおける最短路, 負閉路, ポテンシャルの存在に関して, 以下の関係が成り立つ,

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

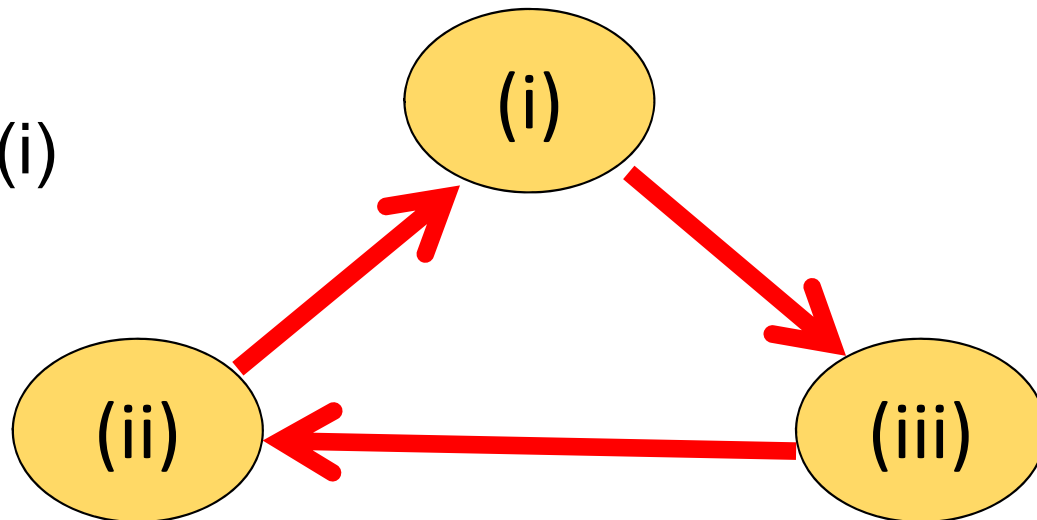
(i) 始点 s から各頂点への最短路が存在

(ii) 負閉路が存在しない

(iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ:

(iii) $\rightarrow$ (ii), (i) $\rightarrow$ (iii), (ii) $\rightarrow$ (i)
を順番に証明



ポテンシャル存在 $\Rightarrow$ 負閉路が非存在

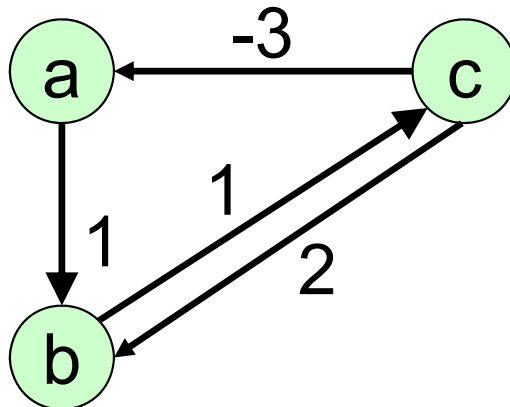
定義: 実数 $p(v) (v \in V)$ は **ポテンシャル**

$\iff$ 各枝 (u, v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす

命題 ポテンシャルが存在 $\Rightarrow$ 負閉路は存在しない
(対偶: 負閉路が存在 $\Rightarrow$ ポテンシャルは存在しない)

(証明) 任意の閉路 C の長さが非負であることを示せば良い.
不等式 $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v) ((u, v) \in C)$ を辺々足す

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \sum_{(u,v) \in C} [p(v) - p(u)] \\ &\leq \sum_{(u,v) \in C} \ell(u, v) = \text{閉路の長さ} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



左のグラフにおいて,

$$p(a) - p(c) \leq -3, p(c) - p(b) \leq 2,$$

$$p(b) - p(a) \leq 1$$

は解をもたない

最短路と負閉路とポテンシャル

与えられたグラフにおける最短路, 負閉路, ポテンシャルの存在に関して, 以下の関係が成り立つ,

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

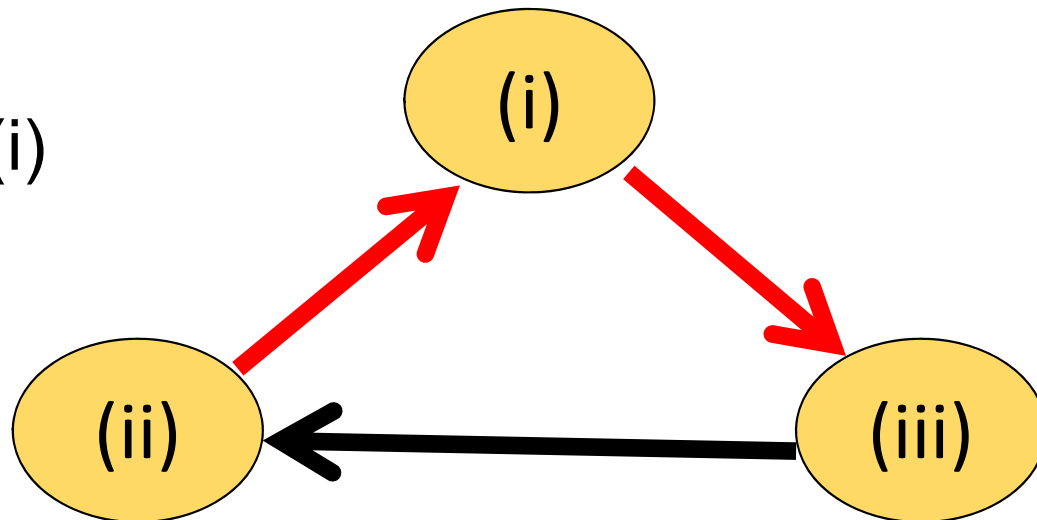
(i) 始点 s から各頂点への最短路が存在

(ii) 負閉路が存在しない

(iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ:

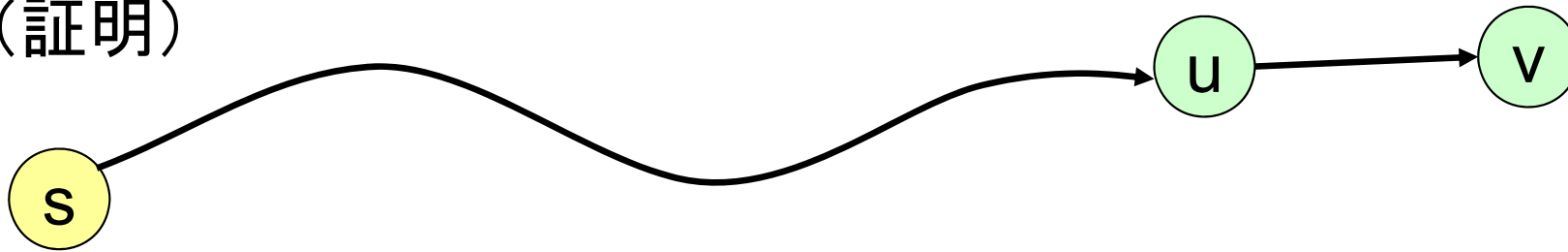
(iii) $\rightarrow$ (ii), (i) $\rightarrow$ (iii), (ii) $\rightarrow$ (i)
を順番に証明



最短路存在 $\Rightarrow$ ポテンシャル存在

命題 頂点 s から各頂点への最短路が存在すると仮定.
このとき, ポテンシャルが存在する.
とくに, 頂点 v への最短路長を $d(v)$ とすると,
 $p(v)=d(v)$ はポテンシャル

(証明)



P : 頂点 s から u への最短路 $\rightarrow d(u) = P$ の長さ
 $\rightarrow \tilde{P} = P \cup \{(u, v)\}$ は s から v への路,
その長さ $= d(u) + \ell(u, v)$
 $\geq v$ への最短路長 $= d(v)$ ■

最短路と負閉路とポテンシャル

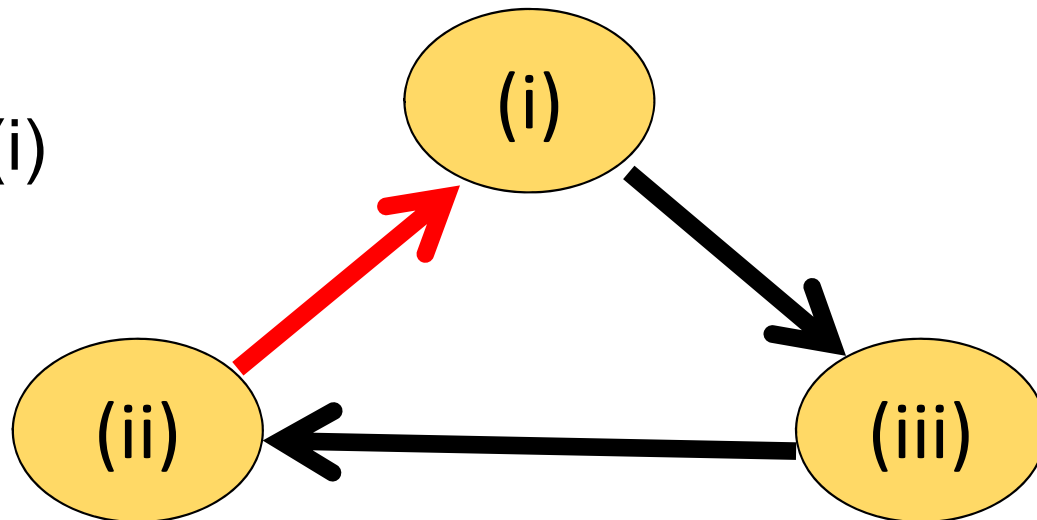
与えられたグラフにおける最短路, 負閉路, ポテンシャルの存在に関して, 以下の関係が成り立つ,

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

- (i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
- (ii) 負閉路が存在しない
- (iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ:

(iii) $\rightarrow$ (ii), (i) $\rightarrow$ (iii), (ii) $\rightarrow$ (i)
を順番に証明



負閉路が不存在→最短路が存在

命題: 有向グラフに負閉路が存在しない

→ 任意の頂点 v に対し, 始点 s から v への,
枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

(証明) 以下では $n = |V|$ とおく.

P^* : s から v への, 「枝数が $n-1$ 以下」

という条件下で最短な路 (←必ず存在)

次の命題を示せば良い.

(A) s から v への, 枝数が n 以上の任意の路 P に対し $\ell(P^*) \leq \ell(P)$

命題(A)を示すには, 次の(B)を示せば良い (なぜか?)

(B) s から v への, 枝数が n 以上の任意の路 P に対し,

枝数が P より少ない, v への路 P' が存在して, $\ell(P') \leq \ell(P)$

負閉路が不存在 $\rightarrow$ 最短路が存在(つづき)

定理: 有向グラフに負閉路が存在しない

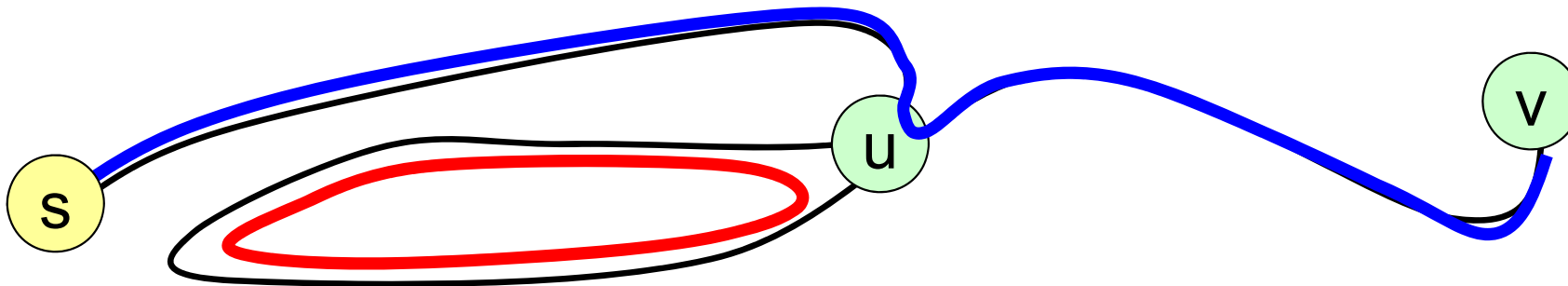
$\rightarrow$ 始点から各頂点 v へ, 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

(証明のつづき) 次の命題(B)を示す:

(B) s から v への, 枝数が n 以上の任意の路 P に対し,
枝数が P より少ない v への路 P' が存在して, $\ell(P') \leq \ell(P)$

s から v への路 P に対し,

枝数 $\geq n \rightarrow$ ある頂点が必ず2回現れる(u とする)



u から u への部分路は閉路 $\rightarrow$ 長さは非負

$\rightarrow$ 削除すると, 枝数が少なく, 長さが $\ell(P)$ 以下の路 P' を得る ■

ポテンシャルと負閉路と最短路

- これまで示した定理, 命題より, 次の定理が得られる

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

- (i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
- (ii) 負閉路が存在しない
- (iii) ポテンシャルが存在

(i) $\leftrightarrow$ (ii), (iii) $\rightarrow$ (ii) は直接的な証明を与えた.

(ii) $\rightarrow$ (iii) の証明は, (i) を経由して証明した(直前のスライド)

※演習問題では (iii) $\rightarrow$ (i) の直接的な証明について考える

最短路の計算: 正当性

ベルマン・フォードのアルゴリズム

$n = |V|$ とおく

手順0: $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty (\forall v \neq s)$ とおく. $k=1$ とする.

- s から枝数0でたどり着けるのは s のみなので

手順1: 各頂点 v に対し, 以下の式で $d_k(v)$ を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$$

手順2: $k < n$ ならば $k := k+1$ とおいて手順1へ戻る.

$k=n$ ならば手順3へ.

手順3: ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立 $\rightarrow$ 「負閉路存在」

全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立

$\rightarrow$ 最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

出力結果が
正しいことを証明

出力結果が
正しいことを証明

アルゴリズムの正当性(その1)

再帰式 $d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$

命題: 負閉路が存在する $\rightarrow$ 負閉路に含まれるある頂点 v に
 対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立

(証明) 閉路 C に含まれる枝を $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_k, v_1)$ とおく.

C は負閉路なので, $\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \dots + \ell(v_k, v_1) < 0$.

再帰式より $d_n(v_{j+1}) \leq d_{n-1}(v_j) + \ell(v_j, v_{j+1})$ ($\forall j = 1, 2, \dots, k$)

(ただし, $v_{k+1} = v_1$ とする)

不等式を辺々足すと,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k d_n(v_j) &= \sum_{j=1}^k d_n(v_{j+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^k d_{n-1}(v_j) + \sum_{j=1}^k \ell(v_j, v_{j+1}) < \sum_{j=1}^k d_{n-1}(v_j) \end{aligned}$$

$\therefore$ ある v_j に対して $d_n(v_j) < d_{n-1}(v_j)$ が成立 ■

アルゴリズムの正当性(その2)

命題: 負閉路が存在しない

→ 任意の頂点 v に対して

$d_{n-1}(v)$ は頂点 v への最短路長に等しく, $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ 成立

(証明) 各頂点 v への, 枝数 $\leq n-1$ の最短路が存在(下記の命題より)

→ $d_{n-1}(v)$ は頂点 v への最短路長に等しい

さらに, 全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立 ■

命題: 有向グラフに負閉路が存在しない

→ 始点から各頂点へ, 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

差分不等式系の解の計算

変数の差の不等式系の解を求める

2つの場合に分けて考える

ケース1: 各制約に2つの変数が現れる

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq -1, \\ p_3 - p_2 &\leq -3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6 \end{aligned}$$

ケース2: 変数1つの制約を含む場合

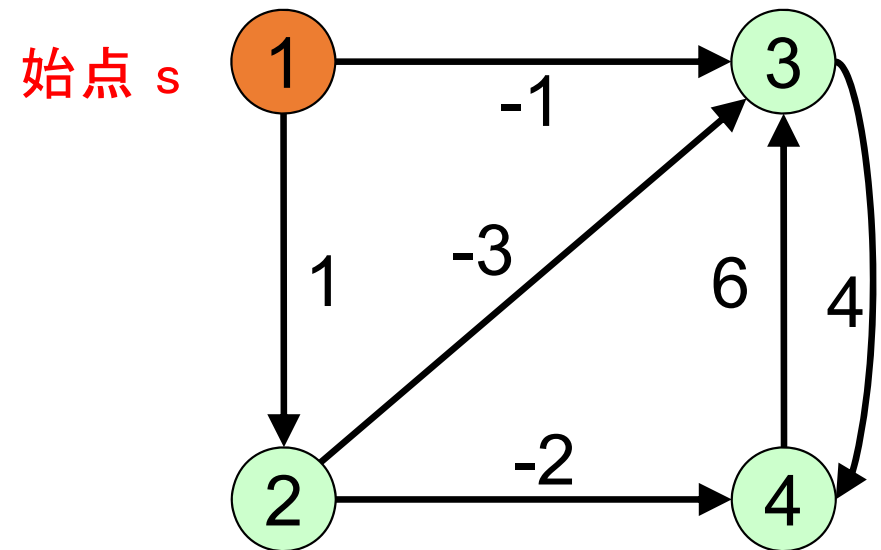
$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, p_1 \leq 0, p_4 \geq 3 \end{aligned}$$

- ケース2の方がより一般的
- しかし, ケース2はケース1の形に帰着可能(後で説明)

各制約に2つの変数が現れる場合

ケース1の例

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq -1, \\ p_3 - p_2 &\leq -3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6 \end{aligned}$$



差分不等式系の解

=以下のグラフのポテンシャル

- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約 $p_v - p_u \leq \alpha$ に対し, 長さ = α の枝 (u, v) を追加

したがって, このグラフのポテンシャルを求めれば良い

- 適当な頂点を始点 s とおき, s から各頂点への最短路長を計算
 - 負閉路が存在しない $\rightarrow$ 最短路長 $d(v)$ は解
 - 負閉路が存在する $\rightarrow$ 解は存在しない

(負閉路の枝集合 $\leftrightarrow$ 矛盾する不等式)

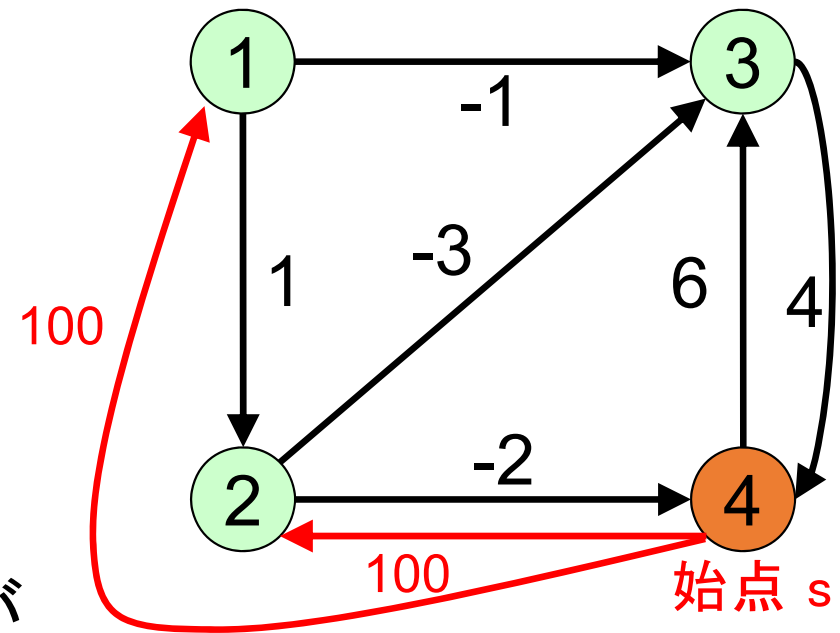
各制約に2つの変数が現れる場合

ケース1の例

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq -1, \\ p_3 - p_2 &\leq -3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6 \end{aligned}$$

※注意：頂点 s からある頂点 u への路が存在しない場合、

→ 長さの十分大きい枝 (s, u) を追加し、最短路の存在を保証する



長さの十分大きい枝 (s, u) を追加

↔ 元の不等式系に, $p_u - p_s \leq M$ を追加

(M は十分大きな正の数)

M が十分大きい場合, $p_u - p_s \leq M$ を追加しても,
解の有無に影響を与えない

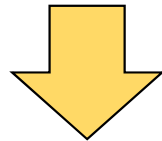
変数1つの制約を含む場合: 帰着方法

ケース2の例:

$$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$$

(1) 変数2つの制約に変換する

- 新しい変数 p_s を追加 ($\leftrightarrow$ 頂点 s 追加)
- 各変数 $p_1, \dots, p_n$ に対し,
 - $p_v \leq \beta$ の形の制約が存在 $\rightarrow p_v - p_s \leq \beta$ に置き換え
 - $p_v \geq \gamma$ の形の制約が存在 $\rightarrow p_s - p_v \leq -\gamma$ に置き換え



$$q_2 - q_1 \leq 1, q_3 - q_1 \leq 1, q - q_2 \leq 3, q_4 - q_2 \leq -2, \\ q_4 - q_3 \leq 4, q_3 - q_4 \leq 6, q_1 - q_s \leq 0, q_s - q_4 \geq 3$$

※元の不等式系との区別のため, 変数の記号を q に変更

二つの不等式系の関係

元の不等式系:

$$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$$

新しい不等式系:

$$q_2 - q_1 \leq 1, q_3 - q_1 \leq 1, q - q_2 \leq 3, q_4 - q_2 \leq -2, \\ q_4 - q_3 \leq 4, q_3 - q_4 \leq 6, q_1 - q_s \leq 0, q_s - q_4 \geq 3$$

性質

(i) $(p_1, \dots, p_6)$ は元の不等式系の解

→ $(q_1, \dots, q_6, q_s) = (p_1, \dots, p_6, 0)$ は新しい不等式系の解

(ii) $(q_1, \dots, q_6, q_s)$ は新しい不等式系の解

→ $(p_1, \dots, p_6) = (q_1 - q_s, \dots, q_6 - q_s)$ は元の不等式系の解

よって, 新しい不等式系(ケース1の形)を解けばよい

帰着後の不等式系の上手な解き方

新しい不等式系:

$$q_2 - q_1 \leq 1, q_3 - q_1 \leq 1, q - q_2 \leq 3, q_4 - q_2 \leq -2, \\ q_4 - q_3 \leq 4, q_3 - q_4 \leq 6, \textcolor{red}{q_1 - q_s \leq 0, q_s - q_4 \geq 3}$$

元の不等式系の解き方

(その1) 新しい不等式系を解いて, 前のスライドの性質を利用

(その2) 上手な解き方

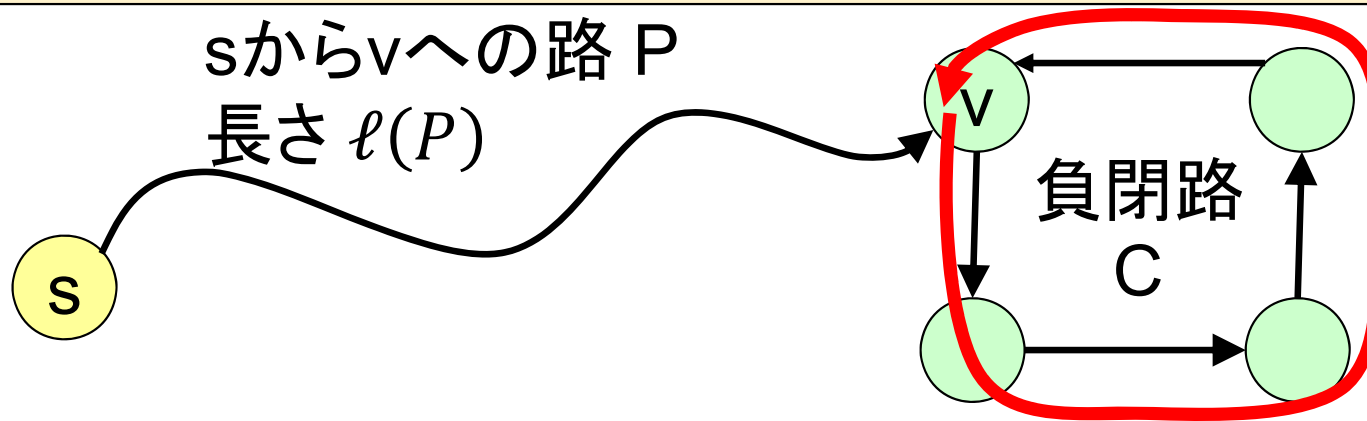
s を始点として, 各頂点への最短路長を計算

- 負閉路が存在しない $\rightarrow q_s = 0$ となるのでうまくいく
- 負閉路が存在する $\leftrightarrow$ 矛盾する不等式が存在
 $\therefore$ もともとの不等式系でも解が存在せず

[参考] 負閉路が存在 $\rightarrow$ 最短路が存在しない

- 負閉路が存在 $\rightarrow$ ある頂点への最短路は存在しない
- [対偶] 全ての頂点への最短路が存在 $\rightarrow$ 負閉路は存在しない

命題 グラフに負閉路 C が存在 (長さ $\ell(C) < 0$)
 $\rightarrow$ C に含まれる各頂点 v に対し,
 $\inf\{s \text{ から } v \text{ への路の長さ}\} = -\infty$ (最短路が存在しない)



(証明) s から v への路として, 次のようなものを考える:

路 P を使って s から v に行く $\rightarrow$ 負閉路を k 回通って v に戻る
 これも s から v への路, 長さ $\ell(P) + \ell(C) \times k$
 k を任意に大きくする $\rightarrow$ 路の長さが任意に小さくなる