演習問題

※番号が赤い問題は比較的簡単です

問1：与えられたグラフにポテンシャル p(v) (v∈V) が存在すると仮定する．このとき，
頂点 s から頂点 t への任意の路 P に対し，その長さを $l(P)$ とおくと，
不等式 $l(P) \geq p(t) - p(s)$ が成り立つ．これを証明せよ．
（ヒント）P に含まれる全ての枝に対し，$\ell(u, v) \geq p(v) - p(u)$ を片々加える．

問2：枝長の与えられたグラフにおける最長路は，枝長を-1倍したグラフにおける
最短路に一致する．
(1) 枝長を-1倍したグラフの最短路は，ベルマン・フォードやダイクストラの
アルゴリズムを使って求めることは一般にはできない．その理由を説明せよ．
（ヒント）元の枝長が正ならば，変換後は負になる．
(2) 一方，プロジェクトスケジューリングの例では，枝長を-1倍したグラフにおける
最短路をベルマン・フォードのアルゴリズムを使って求めることができる．
その理由を説明せよ．
（ヒント）プロジェクトスケジューリングの例で用いたグラフの特殊性を使う．

演習問題

問3:「ポテンシャル p(v) が存在するならば，s から各頂点への最短路が存在する」ことを証明したい．そのために，与えられたグラフの各枝 (u,v) に対し，
新たな枝長 $\ell_p(u,v)$ を $\ell_p(u,v) = \ell(u,v) + p(u) - p(v)$ と定義する．
(1) 各枝の長さ $l(u,v)$ を $\ell_p(u,v)$ に置き換えたグラフにおいて，
s から各頂点への最短路が存在することを証明せよ．
（ヒント）$\ell_p(u,v)$ の符号は？
(2) 頂点 s から t へのある路 P について考える．枝長$l(u,v)$に関する，路 P の長さを $l(P)$ とおき，枝長 $\ell_p(u,v)$ に関する路 P の長さを $l_p(P)$ とおく．$l(P)$ と $l_p(P)$ の関係を等式で書け．
（ヒント）定義に従って計算すればよい．
(3) 小問 (2) の結果を元にして，枝長 $l(u,v)$ に関して s から t への最短路が存在することと，枝長 $l_p(u,v)$ に関して s から t への最短路が存在することが必要十分であることを証明せよ．
（ヒント）(2) の結果を見れば簡単に分かる．

演習問題

問3:「ポテンシャル p(v) が存在するならば，s から各頂点への最短路が存在する」ことを証明したい．そのために，与えられたグラフの各枝 (u,v) に対し，新たな枝長 $\ell_p(u,v)$ を　$\ell_p(u,v) = \ell(u,v) + p(u) - p(v)$　と定義する．

(4) 上記の命題は，問1の結果を使って証明することもできるが，

そのような証明を与えよ．

（ヒント:sからvへの最短路が存在しない

⇔任意に短い，sからvへの路が存在する）

問4: スライド5ページ目で枝(s,v)を新たに追加するとき，その長さMを

n L（n は頂点の総数，$L = \max\{|\ell(x,y)||(x,y)$は枝$\}$）とおくと，

所望の条件 (*) が満たされる．これを証明せよ．

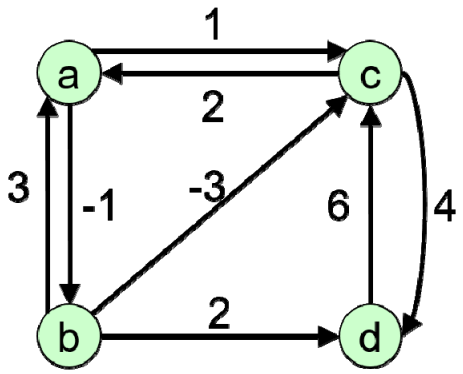
（ヒント）元のグラフにおいて s から v への最短路が存在するならば，

その長さは n L 未満．

演習問題

問5：次の不等式系の実行可能解を求めるか，または実行可能解をもたないことを示せ．最短路問題に帰着し，ベルマン･フォードのアルゴリズムを利用して解くこと．

$$x_b - x_a \leq -1, x_a - x_b \leq 3, x_c - x_a \leq 1, x_a - x_c \leq 2,$$
$$x_c - x_b \leq -3, x_d - x_b \leq 2, x_d - x_c \leq 4, x_c - x_d \leq 6$$



	k=0	1	2	3	4
a	0	0	0	-2	-2
b	+∞	-1	-1	-1	-3
c	+∞	1	-4	-4	-4
d	+∞	+∞	1	0	0

問6：差分不等式の解を求める際，
「長さの十分大きい」枝を追加する必要が生じることがある．
この長さはどの程度大きくすれば良いか，説明せよ．

注意：手間をかけずに容易に計算できる長さでなければならない

（ヒント）実質的に問4と同じ問題