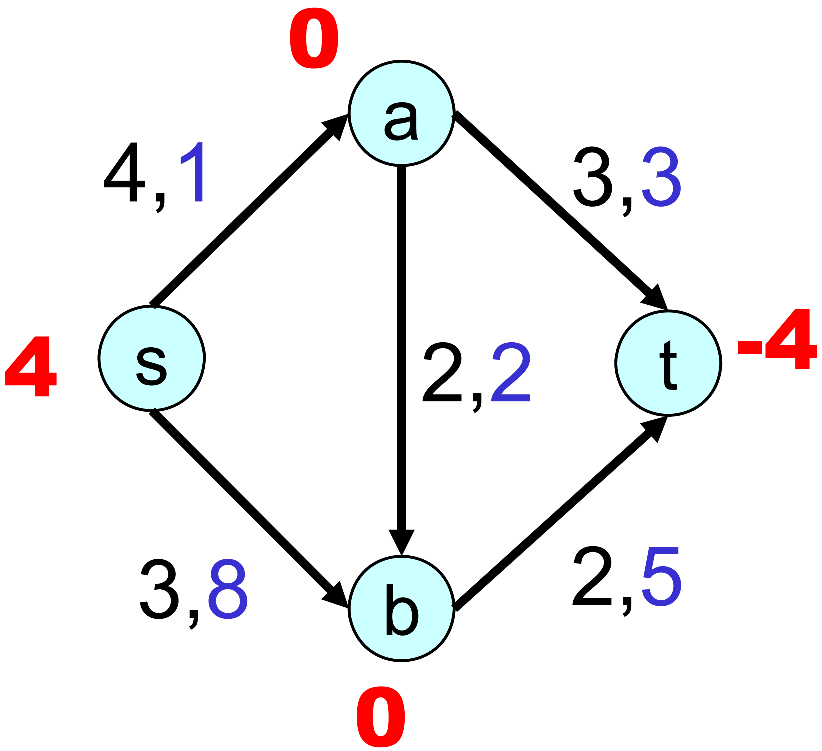
数理経済学
第11回
最小費用流問題

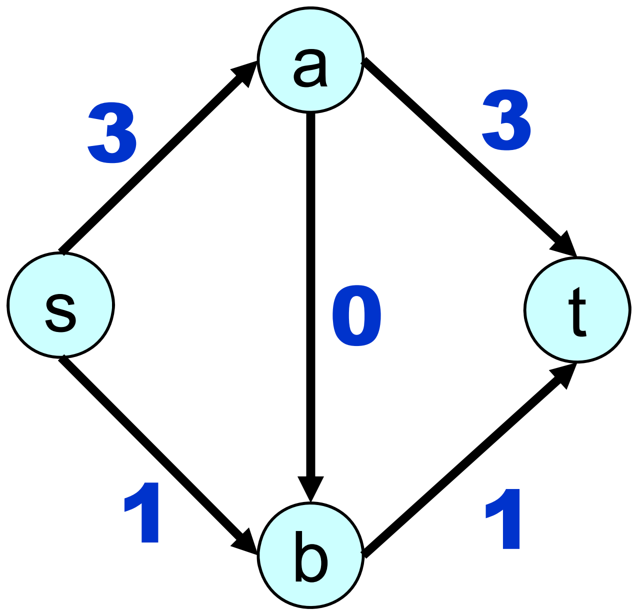
塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

ーーー　残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)

最大流のときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

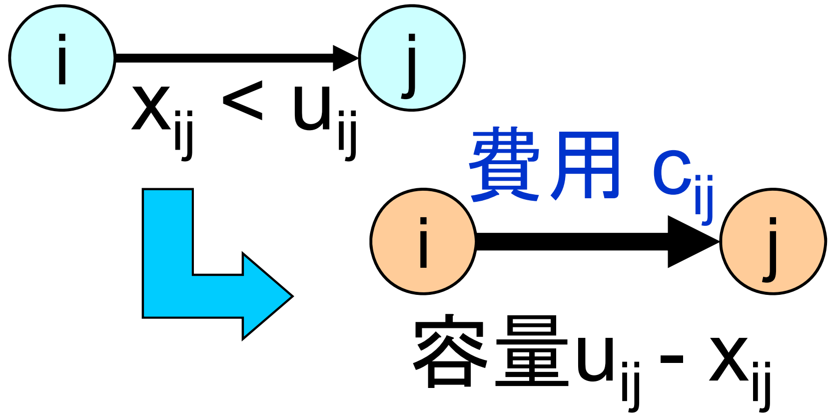
⇒ フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

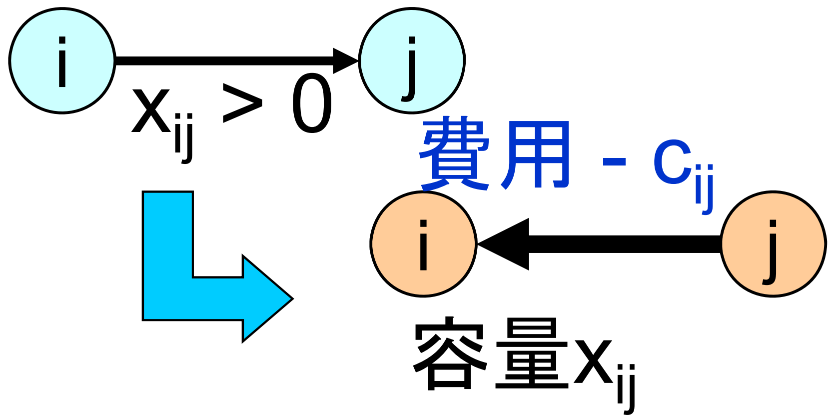
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



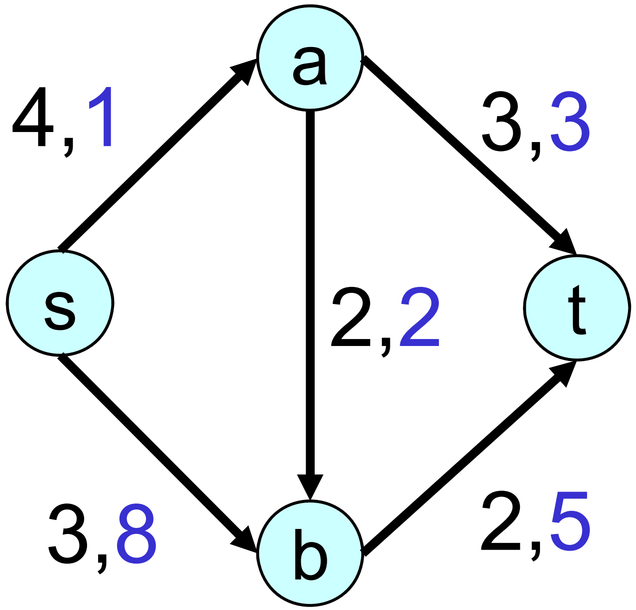
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

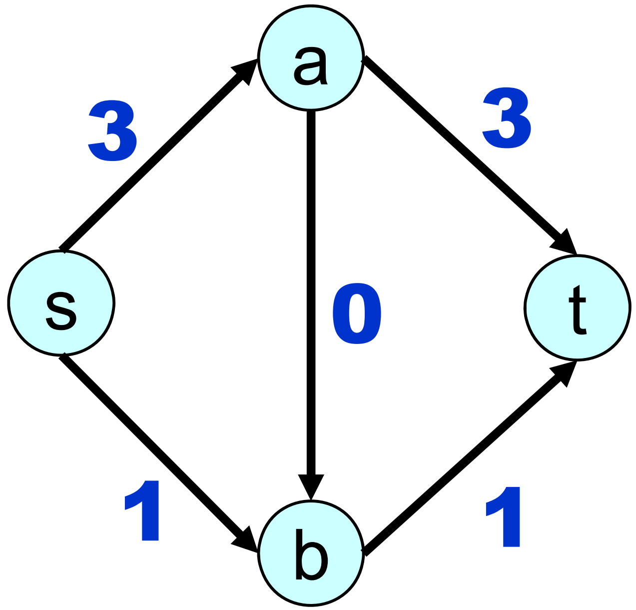
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $-c_{ij}$



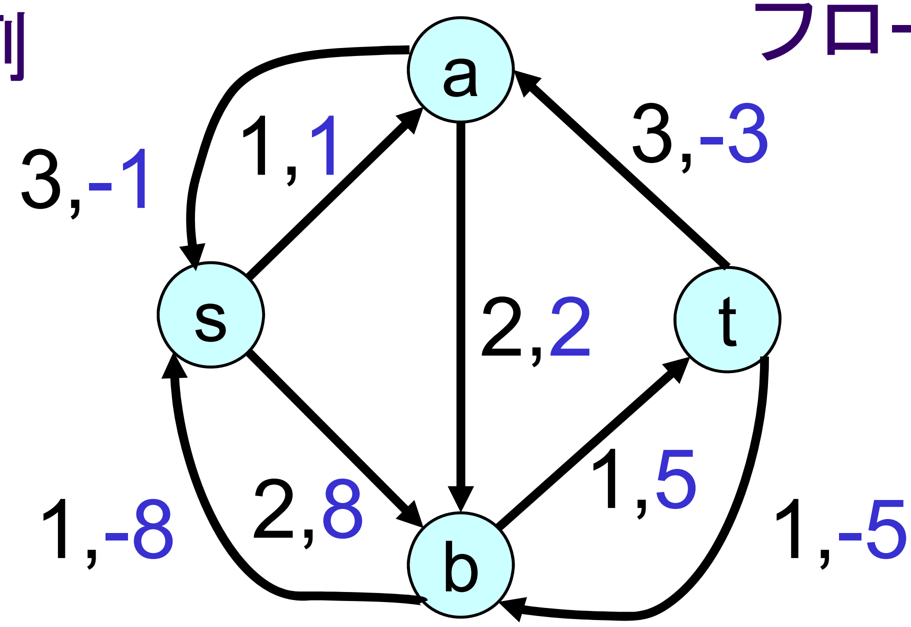
残余ネットワークの作り方(その2)



問題例



フローの例



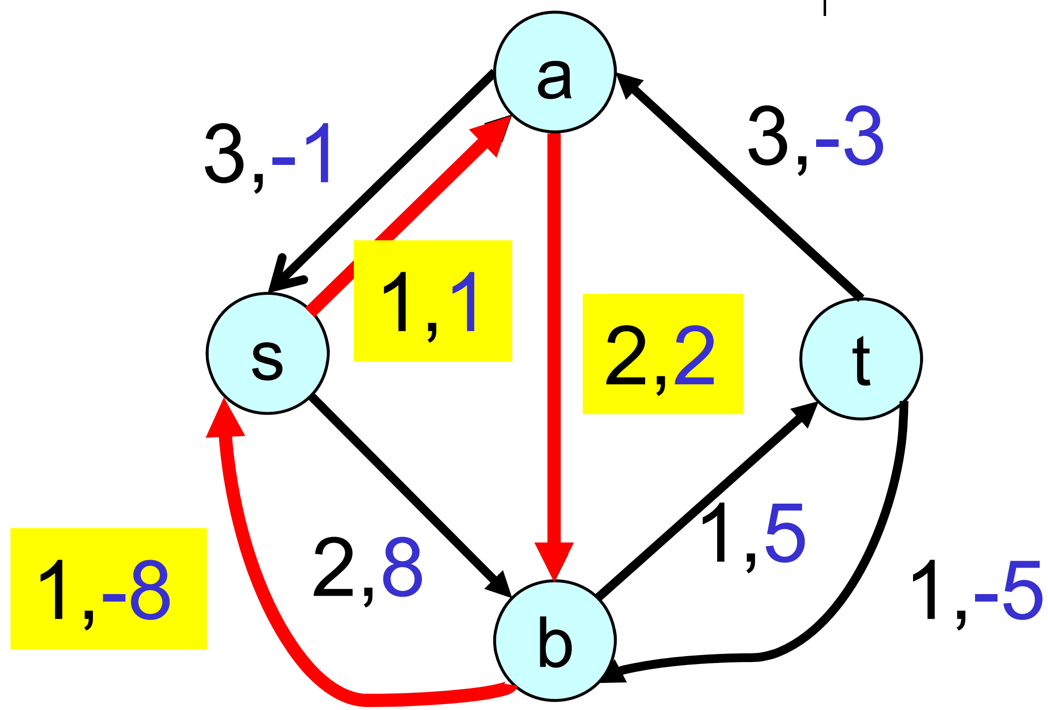
残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(1)

残余ネットワークの閉路に注目

閉路の容量 α
＝閉路に含まれる枝の
容量の最小値 = 1

閉路の費用 γ
＝閉路に含まれる枝の
費用の和 = -5

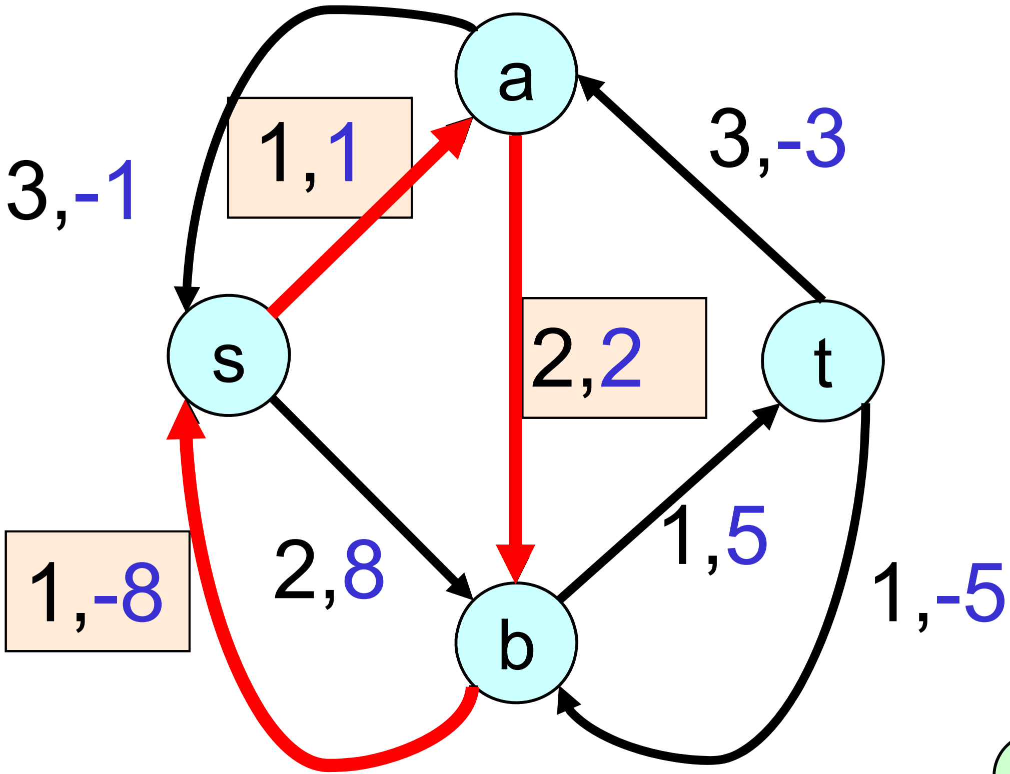


定理１：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

定理1の証明の概略

費用が負の閉路を用いて，フローの費用を減少できる

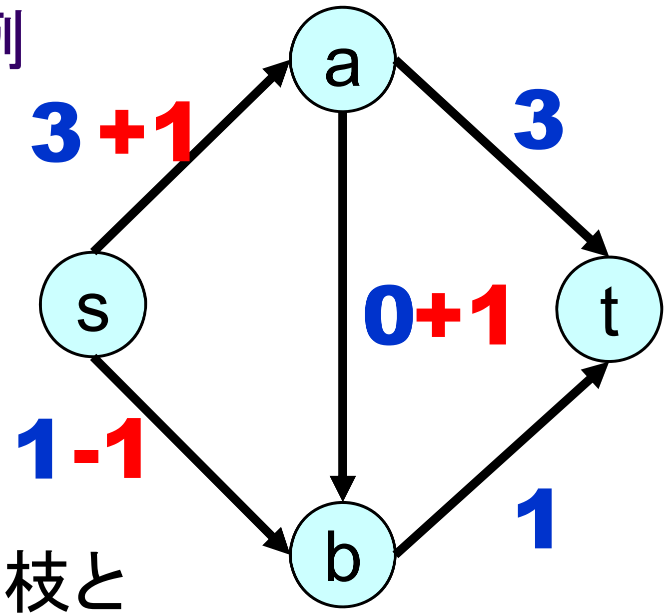
残余ネットワーク



閉路の容量 α=1

閉路の費用 γ=−5

フローの例



閉路の枝と

同じ向き⇒フロー値に＋ α

逆の向き⇒フロー値に− α

無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用は

$\alpha\gamma$（＝−5）変化

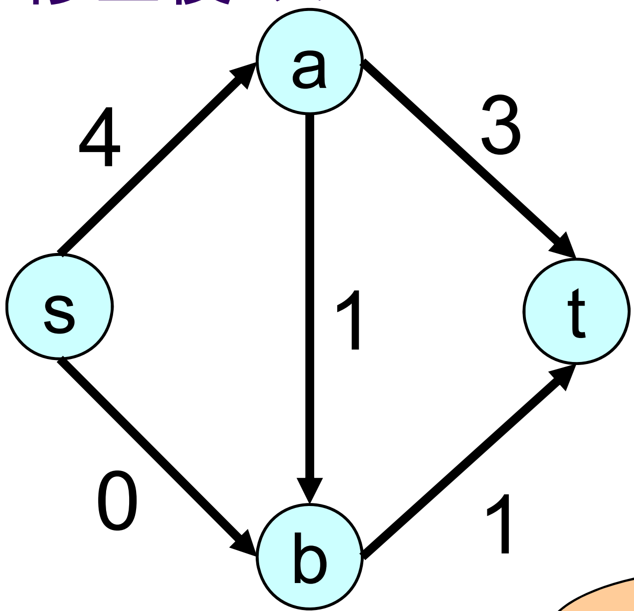
（より費用の小さいフローを得る）

残余ネットワークの性質(2)

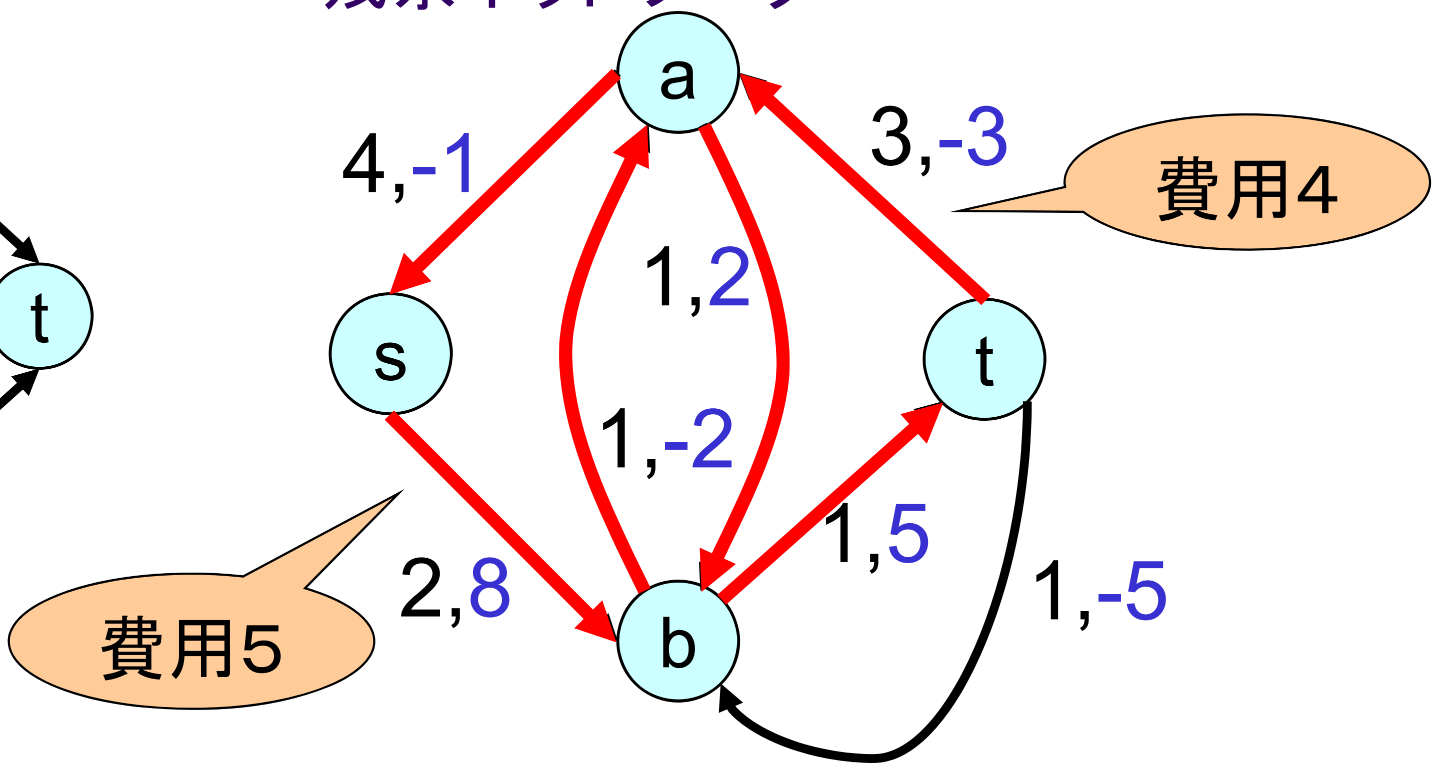
実は，定理1の逆も成り立つ（証明は省略）

定理２：現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

修正後のフロー



残余ネットワーク



費用が負の閉路がない ⇒ 現在のフローは費用最小

負閉路消去アルゴリズム

最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：人工問題を解いて，需要供給量を満たすフローを求める

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

⇒ 現在のフローは費用最小（終了）

ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、

それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

負閉路消去アルゴリズムの計算時間

※各枝の容量，費用は整数と仮定
　U = 枝容量の最大値,
　C = 枝費用の絶対値の最大値
　m = 枝の数，n = 頂点の数

- 各反復においてフローの費用が1以上減る
- −mCU ≦ フローの費用 ≦ mCU

　　➔ 反復回数 ≦ 2mCU

- 各反復での計算時間

　＝ 残余ネットワークの負閉路を求める時間

➔最短路問題のアルゴリズムを使うと O(m n) 時間

∴ 計算時間は $O(m^2\, n\, C\, U)$

（入力サイズは m + n + log U + log C なので，指数時間）

負閉路消去アルゴリズムの改良

負閉路消去アルゴリズムの反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での負閉路の選び方を工夫する

（改良法１） 費用減少量最大の負閉路を選ぶ
反復回数 O(m log (n U))
ただし，費用減少量最大の負閉路を求めるのはNP困難
➔ 費用減少量が最大に近い負閉路で代用可能

（改良法２）
“（閉路の費用）／（閉路の枝数）”が最小の負閉路を選ぶ
反復回数 $O(n\ m^2 \log n)$，一回の反復 $O(n\ m)$

※この他にも，負閉路消去アルゴリズムの計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在する

逐次最短路アルゴリズムの考え方

- 供給点･需要点がそれぞれ1つずつの場合に適用可能
  - 供給点･需要点が複数存在する場合でも，1つの場合に帰着可能

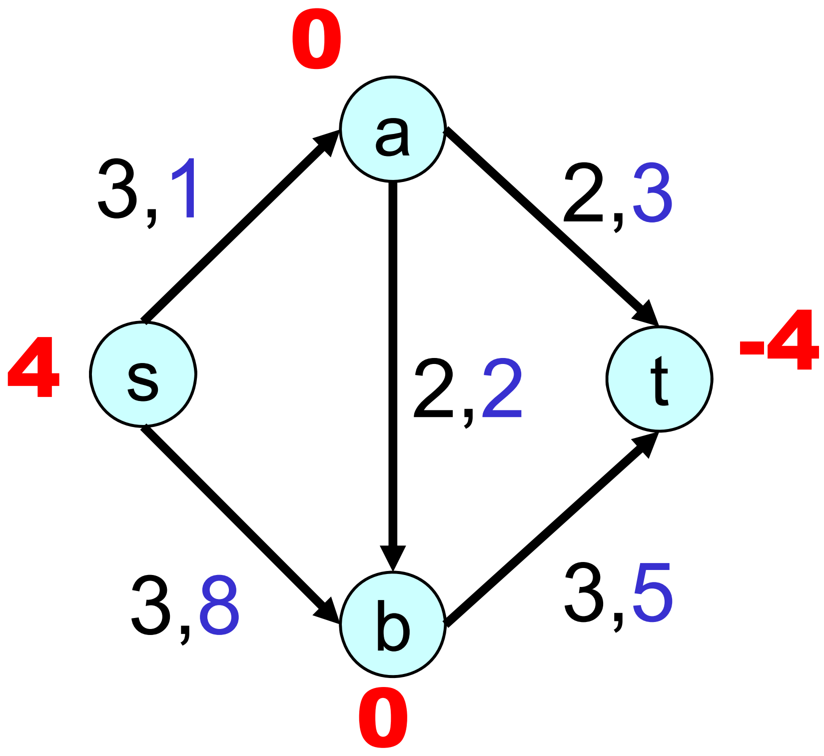
- 供給点･需要点に関する条件以外を満たすフローは

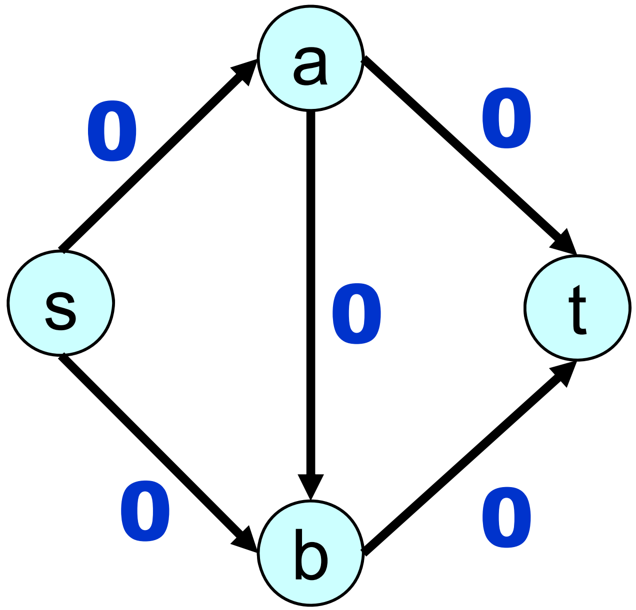
  最小費用フロー ⇔ 以下の2条件を満たす

  (i) 供給点･需要点に関する条件

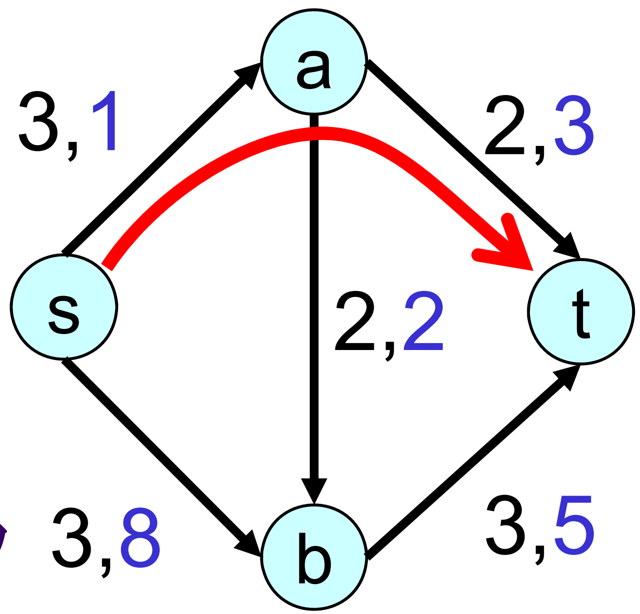
  (ii) 残余ネットワークに負閉路が存在しない
- 負閉路消去アルゴリズム：(i) を満たしつつ，(ii) を満たすようにする
- 逐次最短路アルゴリズム：(ii)を満たしつつ，(i)を満たすようにする

逐次最短路アルゴリズムの動き：その1





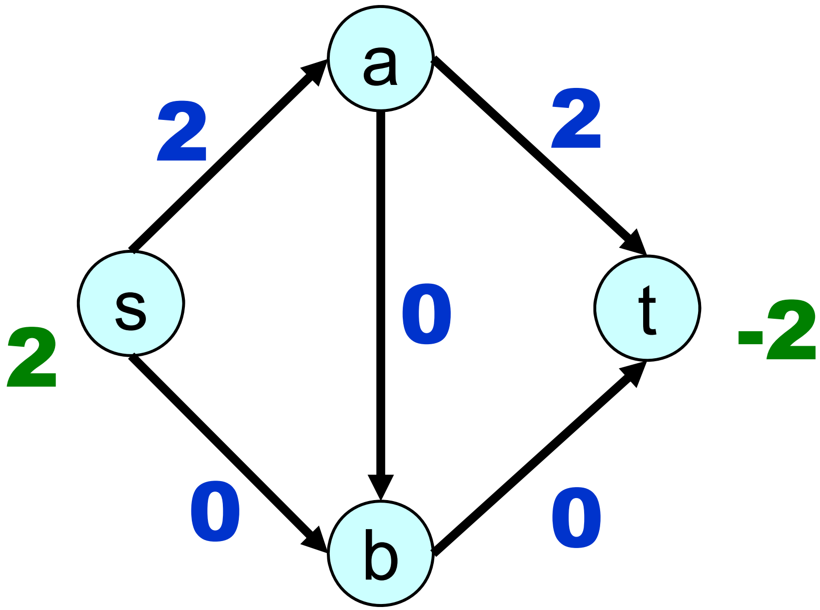
初期フロー



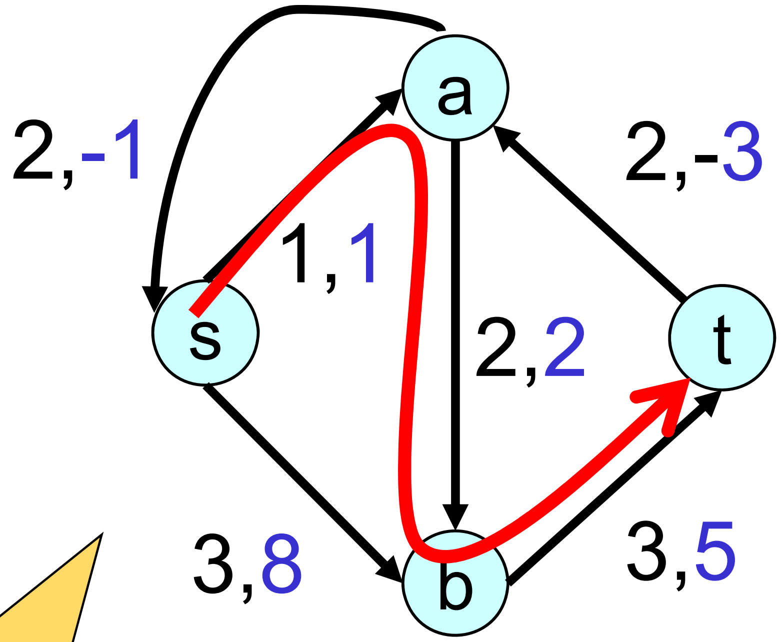
残余
ネットワーク

残余ネットワークでの
供給点から需要点への
最短路に沿って
フローを流す

逐次最短路アルゴリズムの動き：その2



修正後のフロー

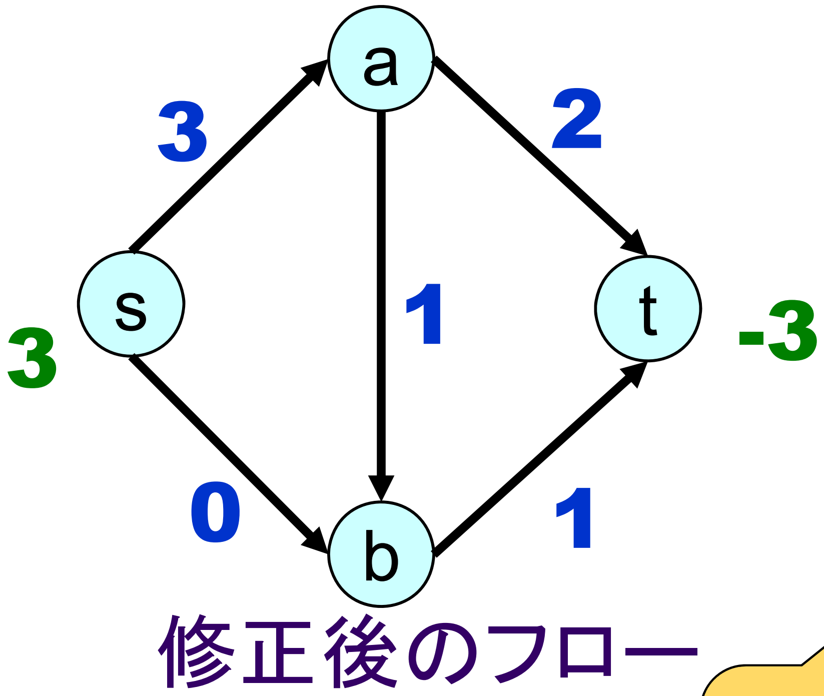


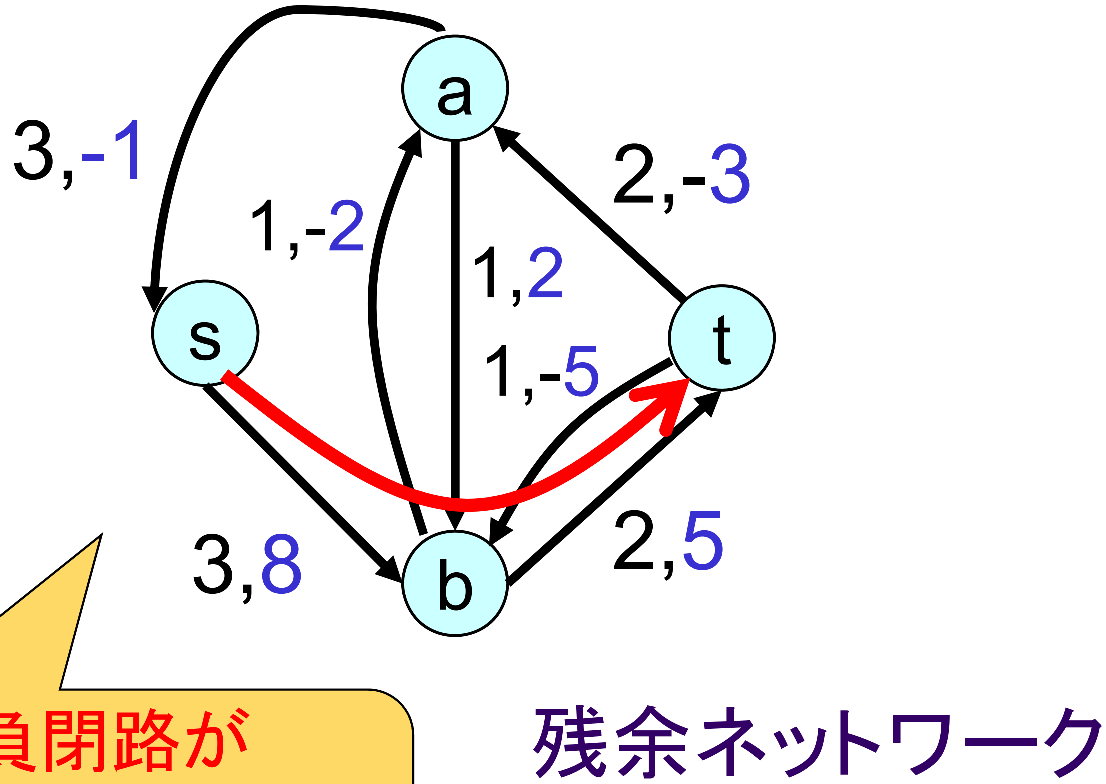
残余ネットワーク

負閉路が
存在しないことに
注意！

残余ネットワークでの
供給点から需要点への
最短路に沿って
フローを流す

逐次最短路アルゴリズムの動き:その3

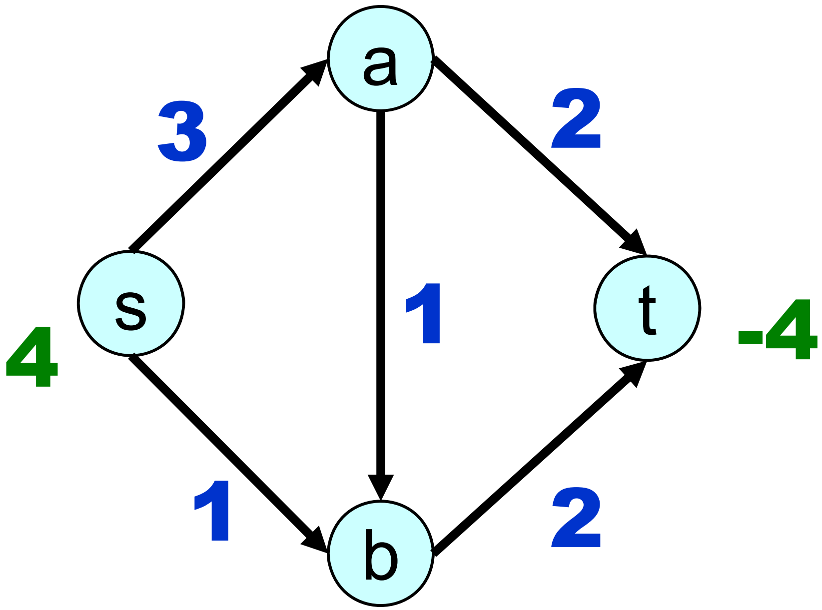




負閉路が
存在しないことに
注意！

残余ネットワークでの
供給点から需要点への
最短路に沿って
フローを流す

逐次最短路アルゴリズムの動き：その4



修正後のフロー

需要供給条件が
満たされたので終了

逐次最短路アルゴリズム:まとめ

ステップ0:各枝のフロー量が0のフローを初期フローとする.

ステップ1:現在のフローが需要供給条件を満たす

⇒ 現在のフローは費用最小(終了)

ステップ2:残余ネットワークの供給点から需要点への最短路を求め,

それを用いて現在のフローを更新する.

ステップ4:ステップ1へ戻る

アルゴリズムの正当性

※各枝の容量は整数値，費用は非負と仮定

- 各反復において，フローの需要供給量は1以上増加

  ∴有限回の反復で需要供給条件は満たされる

- 示すべきこと: 各反復の残余ネットワークにおいて，

  負閉路が存在しない

  （➔ 供給点から需要点への最短路が存在する）

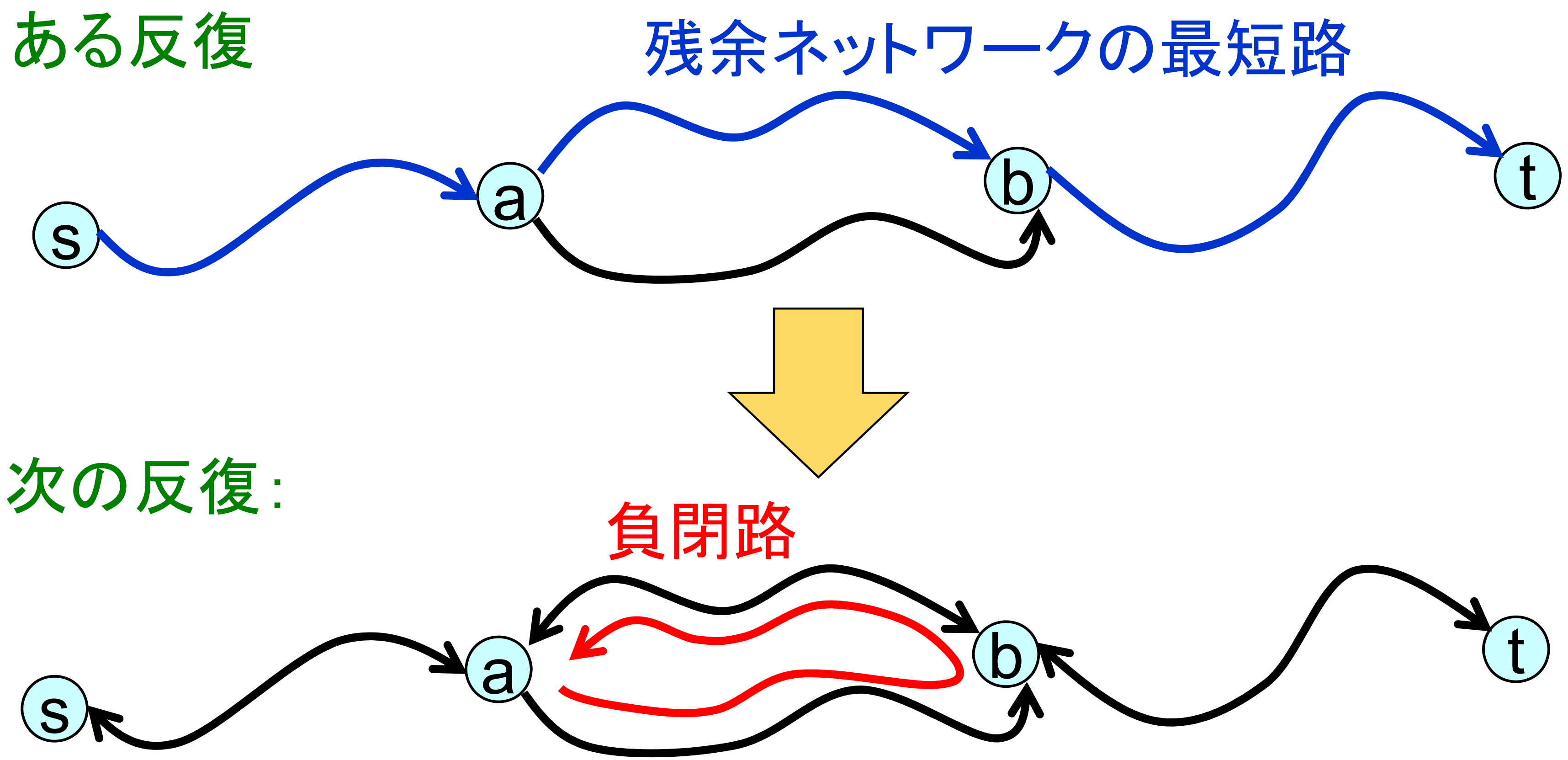
- 反復回数に関する帰納法で証明

- 初期フローの残余ネットワークは元のネットワークと同じ.

  とくに，各枝の費用は非負　∴負閉路は存在しない

残余ネットワークにおける負閉路の非存在性（その１）

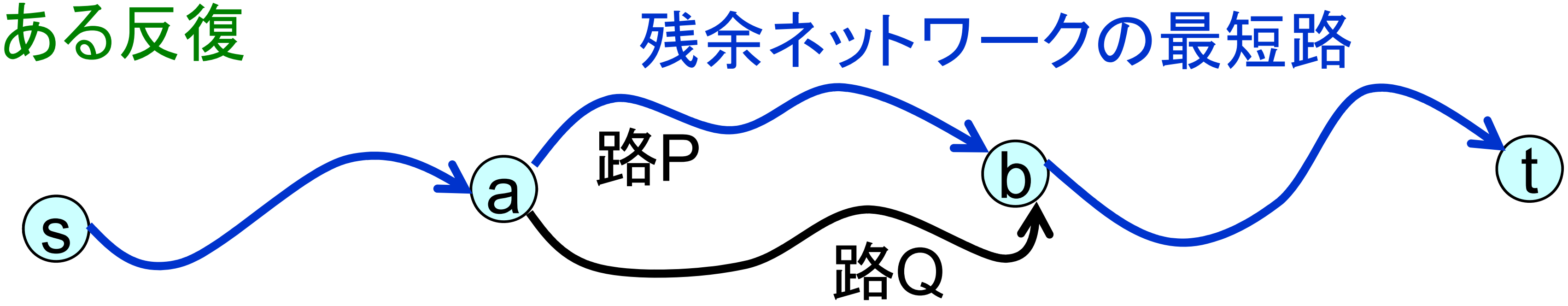
- ある反復で負閉路なし，次の反復で負閉路が現れた，と仮定



フロ一を流した最短路に沿って，逆向きの枝が現れる
その結果，負閉路が出現

残余ネットワークにおける負閉路の非存在性(その2)

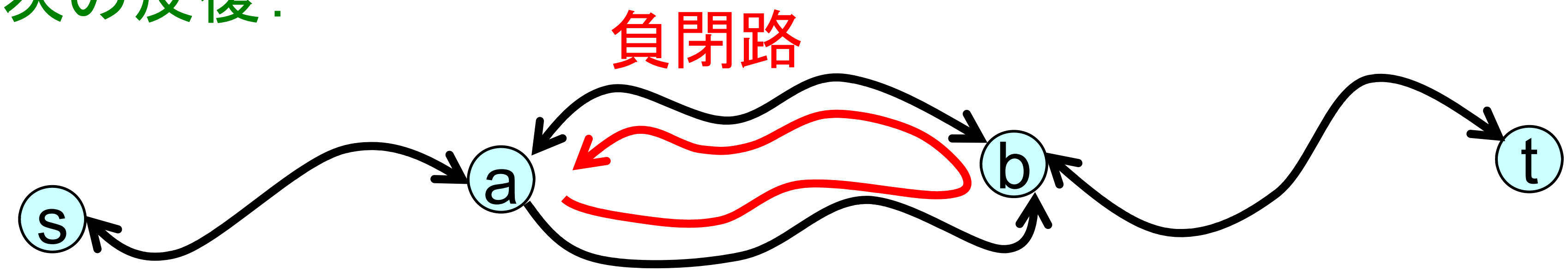
ある反復



路Pは最短路の一部　∴路Pはa から b への最短路

∴路Pの長さ ≦ 路Qの長さ

次の反復:



負閉路の枝集合 ＝ 路Pの枝の逆向き枝 & 路Qの枝

∴ 負閉路の長さ ＝ －(路Pの長さ)＋路Qの長さ ≧ 0 (矛盾)

ネットワークのポテンシャル

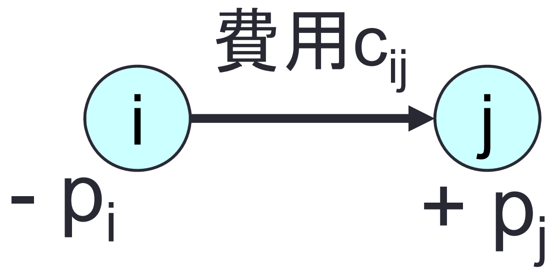
定義：ポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$

--- 各頂点に付随する実数変数（からなるベクトル）

- イメージ：輸送に伴う補助金・手数料
  - 枝(i, j) にフローを1単位 流すとき，
    始点 i では p_i 円もらえる，終点 j では p_j 円支払う

➔ 枝 (i, j) でのフローの実質的なコストは $c_{ij} - p_i + p_j$

  - 実質的なコスト > 0 → 枝 (i, j) のフローを減らしたい
  - 実質的なコスト < 0 → 枝 (i, j) のフローを増やしたい

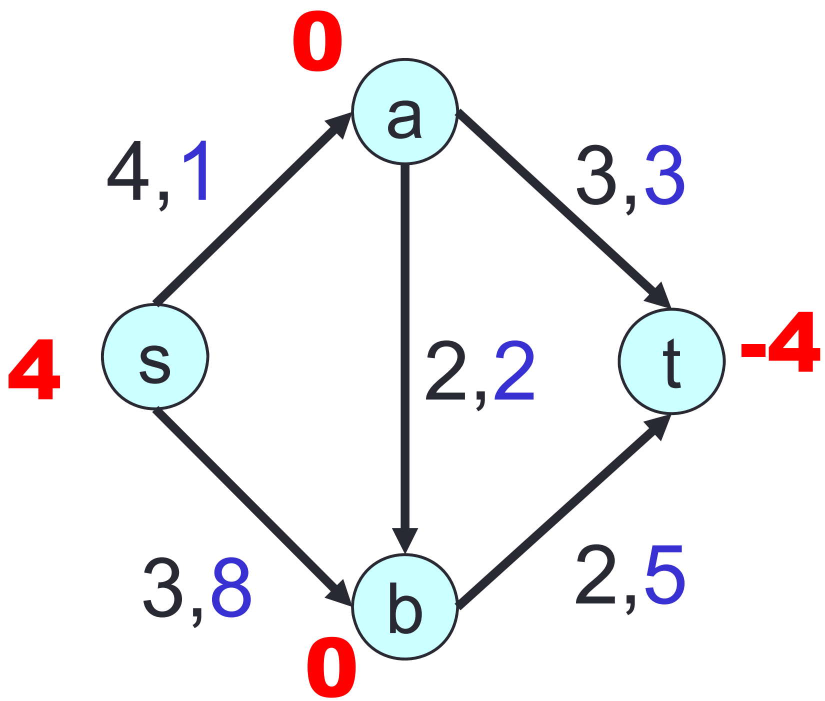


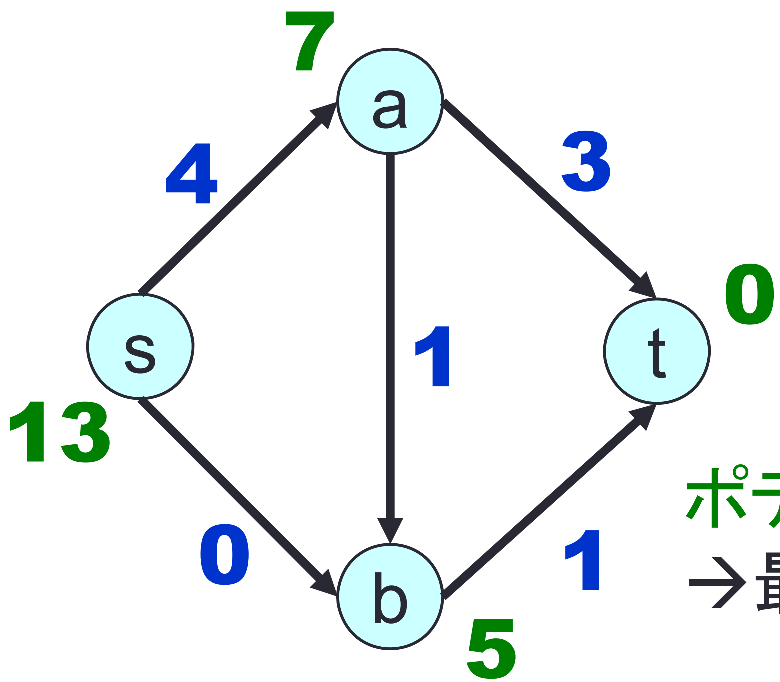
ポテンシャルを用いた最適性条件

定理３：現在のフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は費用最小
←→ 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在：
(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = 0$
(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = u_{ij}$
(iii) $0 < x_{ij} < u_{ij}$ なる枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j = 0$

証明は後で

※注意：条件(iii) は (i), (ii) から導かれるので，なくても良い



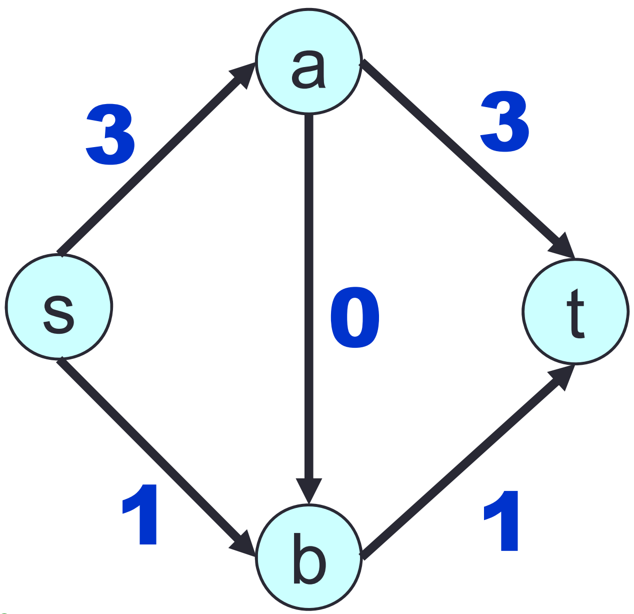


ポテンシャル存在
→最小費用フロー

ポテンシャルを用いた最適性条件

定理３：フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は費用最小
←→ 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在：
(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = 0$
(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = u_{ij}$
(iii) $0 < x_{ij} < u_{ij}$ なる枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j = 0$

証明は後で



枝(s,b)に対し，条件(i)（の対偶）より

$$8 - p_s + p_b \le 0 \Rightarrow \boxed{-8 + p_s - p_b \ge 0}$$

枝(s,a),(a,b)に対し，条件(ii)（の対偶）より

$$\boxed{1 - p_s + p_a \ge 0, 2 - p_a + p_b \ge 0}$$

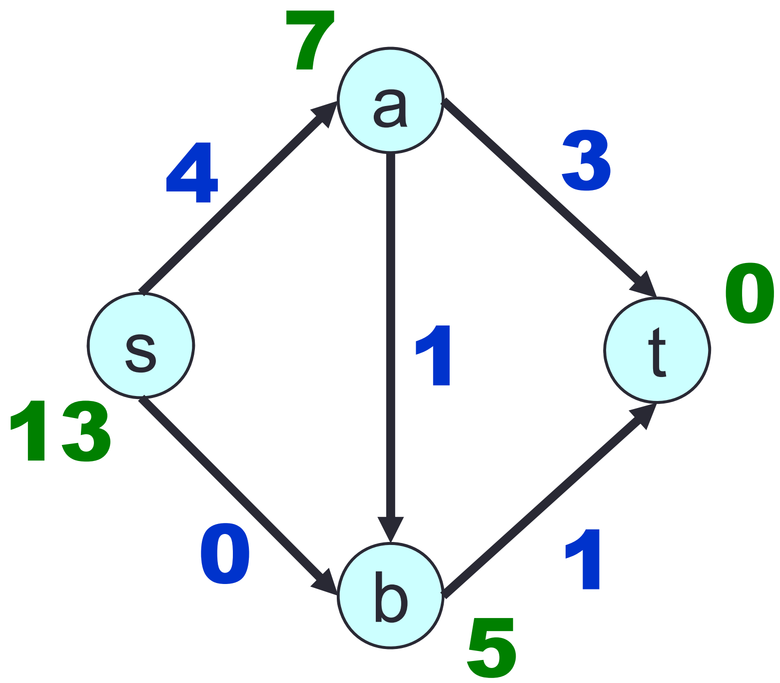
ポテンシャル存在しない
→最小費用フローではない

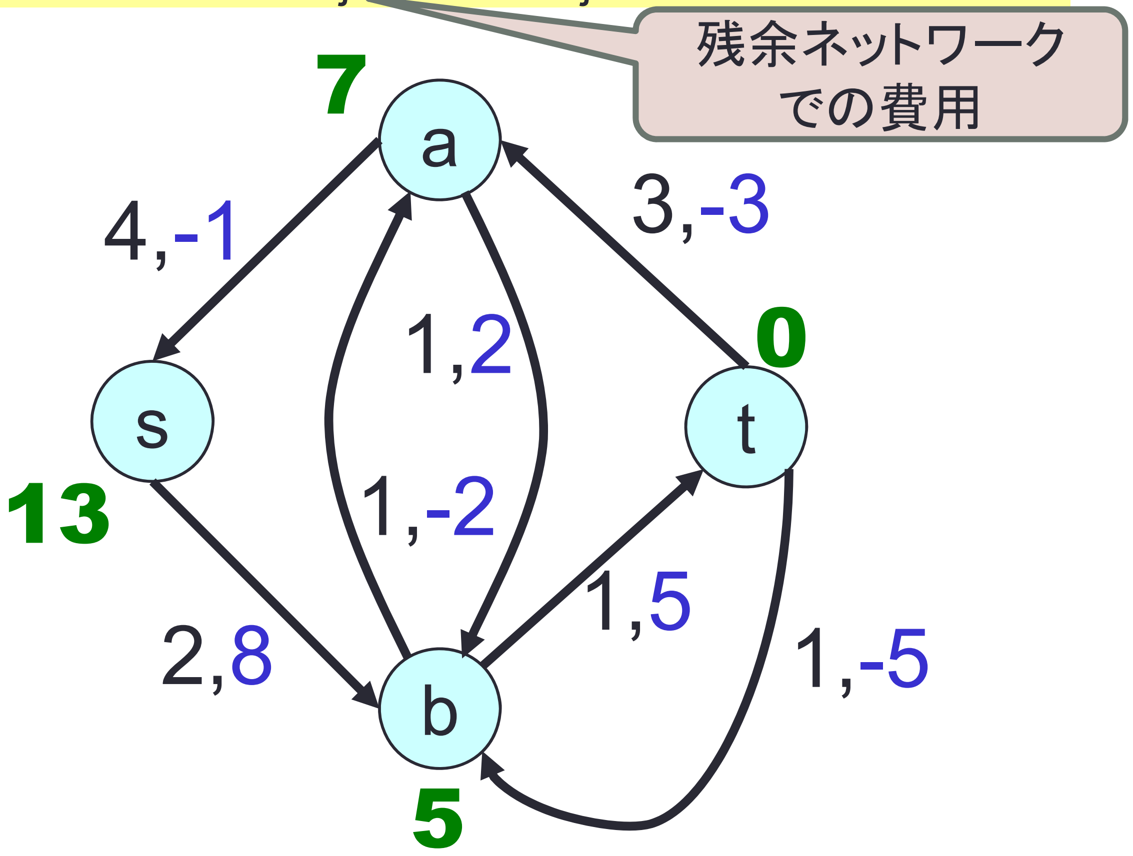
□ を辺々加えると - 5≧0（矛盾）

ポテンシャルを用いた最適性条件の書き換え

定理3の条件(i), (ii) は，残余ネットワークを使うと簡潔になる

定理４：現在のフロー (x_{ij} | (i,j)∈E) は費用最小
⇔ 以下の条件を満たすポテンシャル p = (p_i | i∈V) が存在：
残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$





定理4の証明

定理3を用いて，定理4を証明する.

定理3の条件(i), (ii) と条件(∗)が等価であることを示せばよい.

(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = 0$
(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = u_{ij}$

(∗) 残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$

(∗)において，

残余ネットワークの順向きの枝(i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$
⇔ $x_{ij} < u_{ij}$ ならば$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$ ⇔ (ii) の対偶

残余ネットワークの逆向きの枝(i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$
⇔ $x_{ji} > 0$ ならば $-c_{ji} - p_i + p_j \geqq 0$
⇔ $x_{ji} > 0$ ならば $c_{ji} - p_j + p_i \leqq 0$ ⇔ (i) の対偶

定理3の「←」の証明(その1)

$d_{ij} = c_{ij} - p_i + p_j$ と定義，これを枝(i, j)の新しい費用と見なす．

示すこと

（1）条件(i), (ii), (iii) を満たすフロー x は d_{ij} に関する総費用が最小

（2）（フロー x の d_{ij} に関する総費用）

＝（x のc_{ij} に関する総費用）＋（x に依存しない）定数

（1）の証明：

条件(i), (ii), (iii) を満たすフロー x は，枝ごとに見ても

d_{ij} に関する費用が最小

$d_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$,　$d_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$,　$d_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij}$ は何でも良い

よって，総費用も最小

定理3の「←」の証明(その2)

（2）（フロー x の d_{ij} に関する総費用）

＝(x のc_{ij} に関する総費用）＋（x に依存しない）定数

（2）の証明:

$$\sum_{(i,j)\in E} d_{ij}\, x_{ij} = \sum_{(i,j)\in E}\left(c_{ij} - p_i + p_j\right) x_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{(i,j)\in E}\left(-p_i + p_j\right) x_{ij}$$

各頂点ごとに
和をとる

$$= \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$-\sum_{k\in V} p_k \left(\sum\{x_{kj} \,|\, (k,j)\text{は}k\text{から出る枝}\} - \sum\{x_{ik} \,|\, (i,k)\text{は}k\text{に入る枝}\}\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij} - \sum_{k\in V} p_k\, b_k$$

流量保存条件より

最適性条件のまとめ

フロー x は費用最小

定理1
（証明済み）

定理2
（証明まだ）

定理3
の「🡐」
（証明済み）

定理3
の「➔」
（証明まだ）

フロー x に関する
残余ネットワークに
負閉路が存在しない

フロー x に対し，ある条件を満たす
ポテンシャル p = (p_i | i∈V) が存在

この部分を証明すれば，
定理2および
定理3の「➔」
の証明が完了

「負閉路なし➔ポテンシャル存在」の証明

命題: フロー x に関する残余ネットワークに負閉路が存在しない
➔ その残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$
を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在

（証明）
ネットワーク上の最短路問題に関する既知の結果を利用

- 残余ネットワークにおいて,
  費用を枝の長さとみなした最短路問題を考える.
- 任意に選んだ頂点 u から, 各頂点 v への最短路を求める.
  - u から v へのパスが存在しない場合:
    長さが十分に大きい枝 (u, v) を追加
    （これにより, 負閉路は発生しない）
- 負閉路が存在しない➔最短路問題の既知の結果より,
  u から各頂点 v への最短路は必ず存在. その長さを q_v とおく

「負閉路なし➔ポテンシャル存在」の証明

（証明のつづき）

- 負閉路が存在しない➔最短路問題の既知の結果より，
  u から各頂点 v への最短路は必ず存在．その長さを q_v とおく

（注：負閉路が存在する
➔任意に短いパスが存在し，最短路が定まらない）

- 最短路の長さの性質：
  残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し，$q_i + c_{ij} \geqq q_j$

（∵ i への最短路経由で j に行くパスの長さ ≧ j への最短路の長さ）

- $p_i = - q_i$ $(i \in V)$ とおくと，上記の不等式より $c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$