

経営・経済のための最適化理論

第5回

最小全域木問題

塩浦昭義

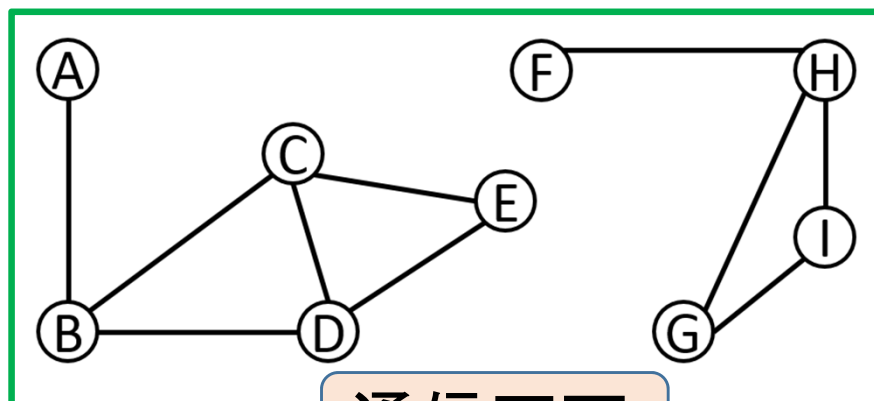
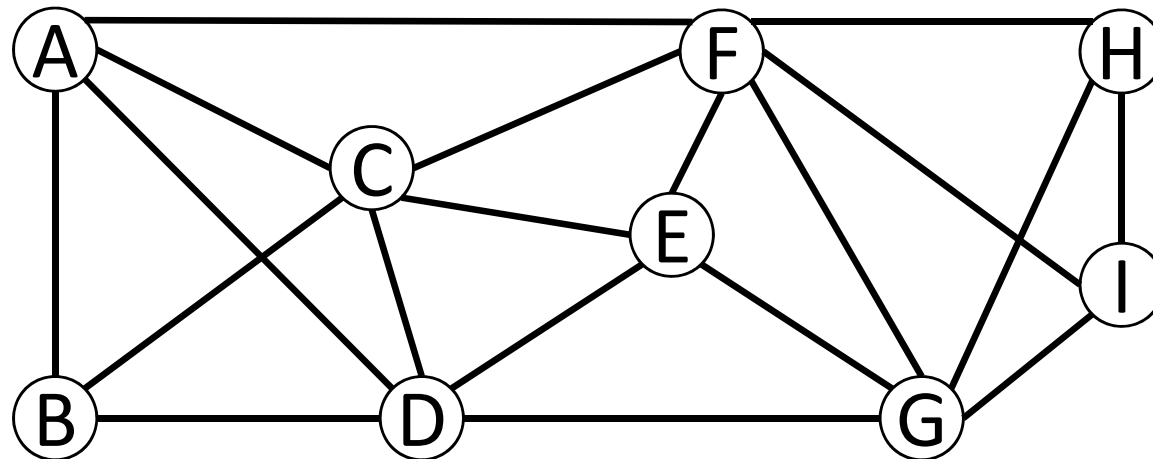
東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

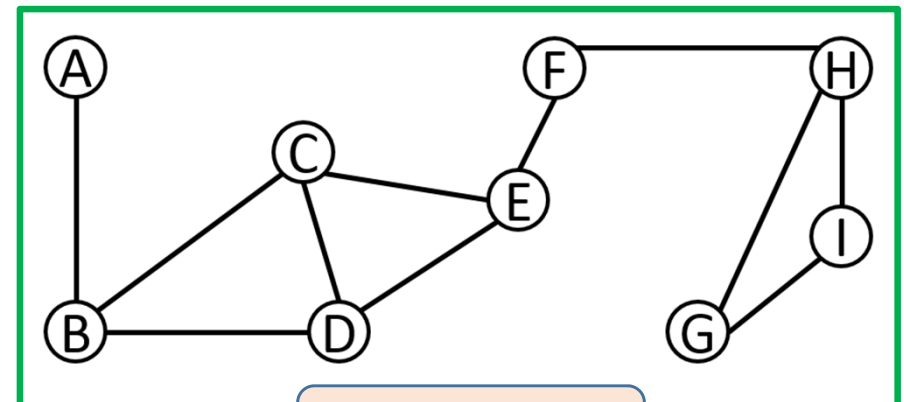
最小全域木の例：通信ネットワークの構築

- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
 - 地点 A, B, ..., I をケーブルで接続, 互いに通信したい
 - 直接ケーブルで接続できるところ, できないところがある
 - 複数のケーブルで繋がっていても可

接続可能な
地点



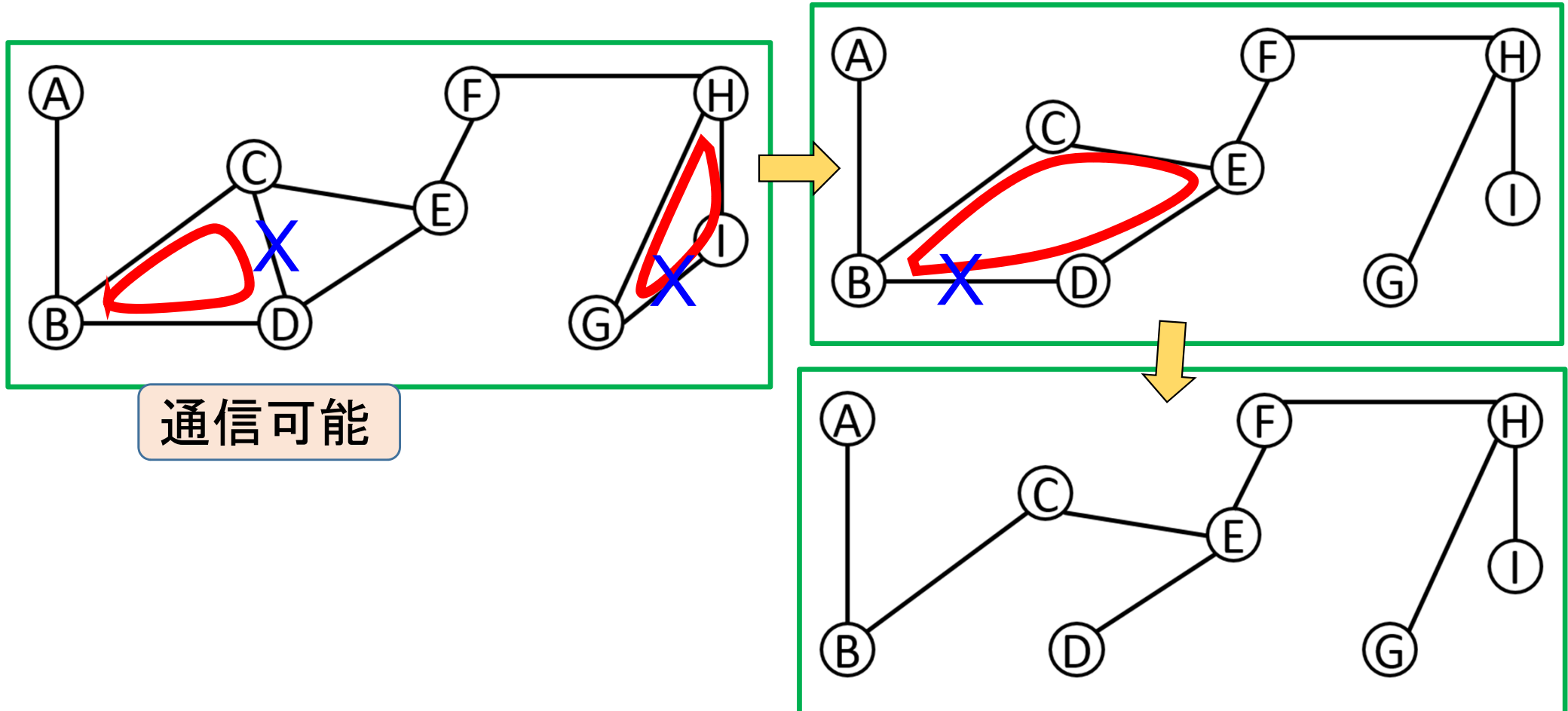
通信不可



通信可能

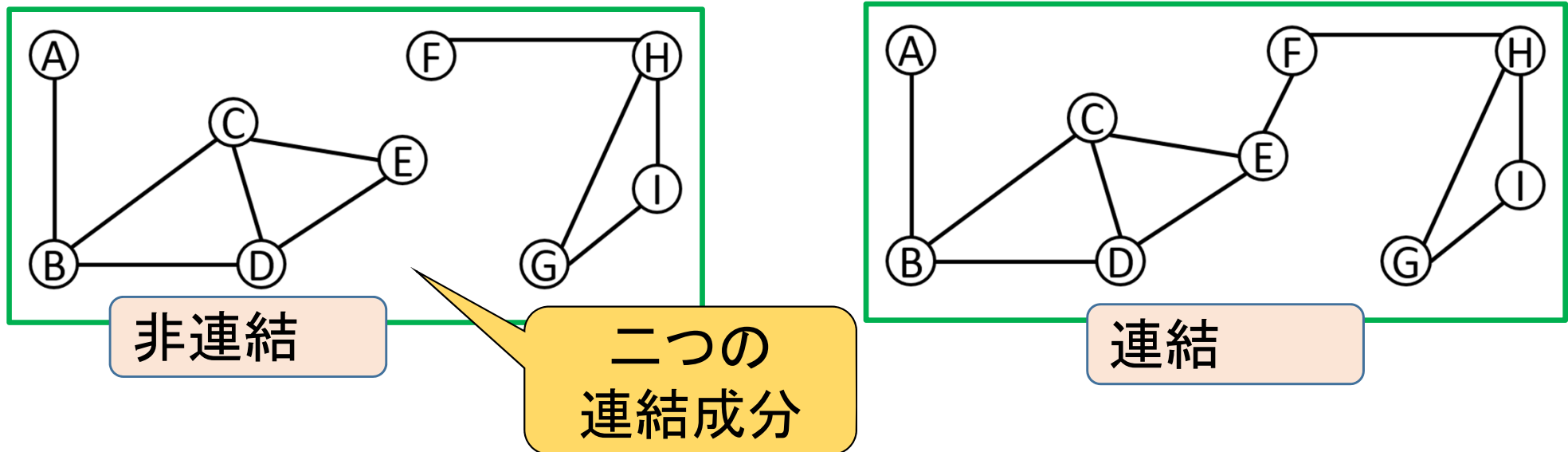
無駄を省いたネットワーク

- 通信できればOK
 - 無駄なケーブルはできる限り省く
 - ケーブルで一周できる→周上の各地点に2系統の通信路
→ケーブルをひとつ削除しても通信可



連結性

定義: グラフが連結 = すべての頂点对の間に路が存在
(グラフ全体が枝でつながっている)



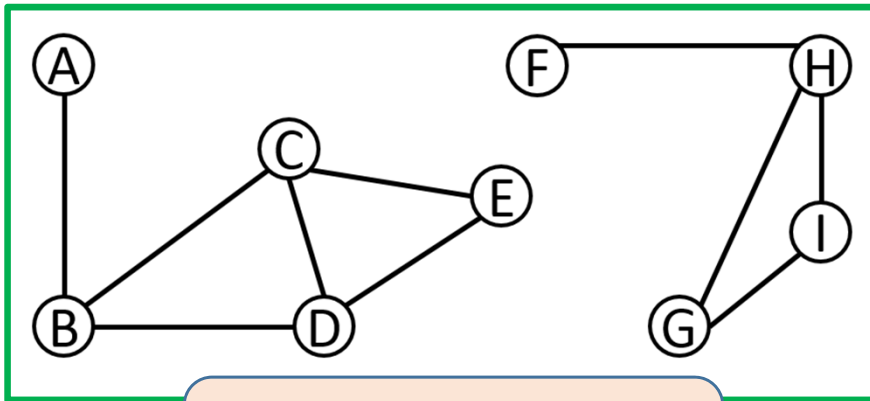
定義: 連結成分 = 極大な連結部分グラフ
(枝でつながっている部分グラフのこと)

- グラフが**非連結** $\leftrightarrow$ グラフの連結成分が2つ以上
- グラフが**連結** $\leftrightarrow$ グラフ全体が一つの連結成分

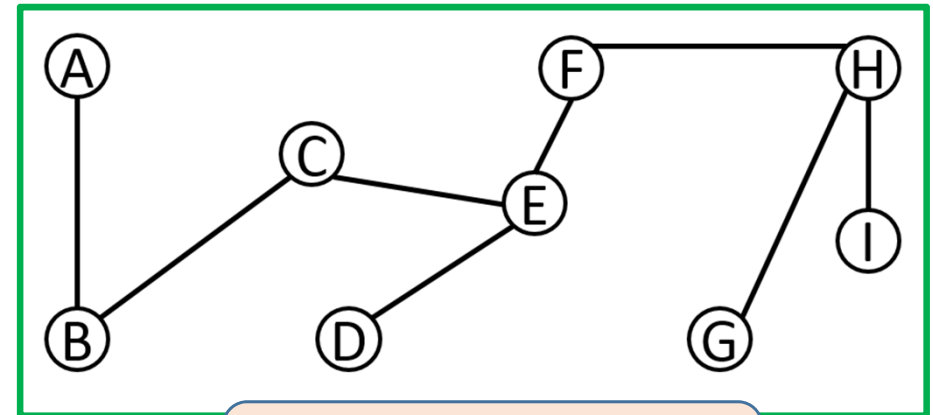
グラフの全域木

定義: 全域木 = 次の条件を満たす枝の部分集合 T

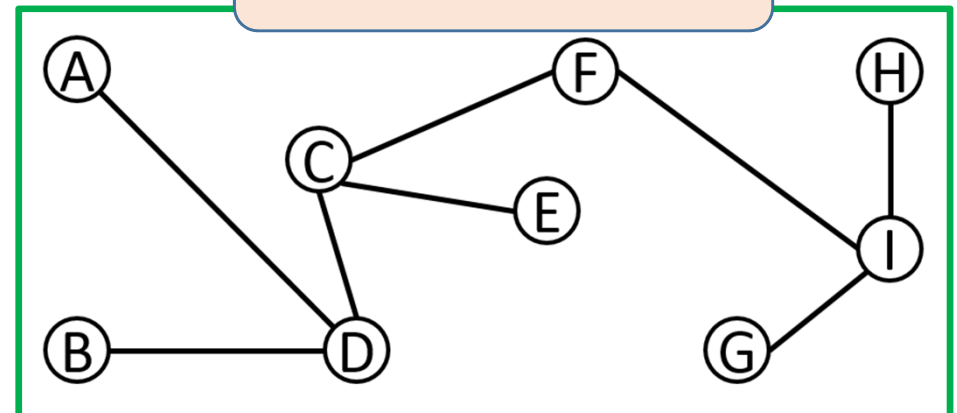
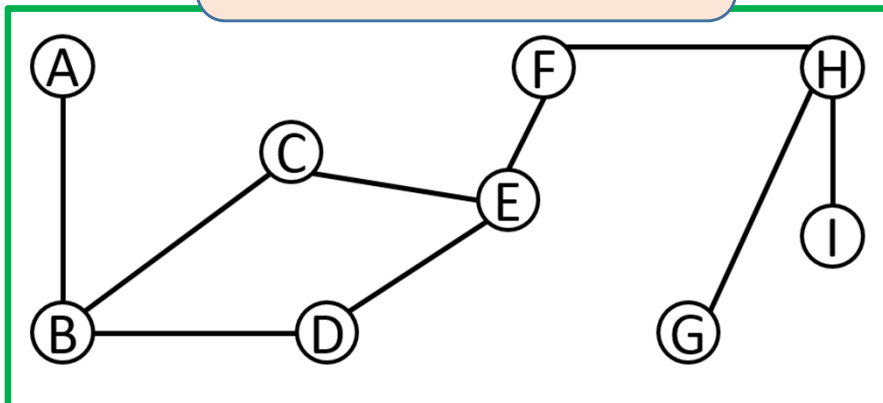
- (i) グラフ (V, T) は **連結**
 - (ii) 枝集合 T は **閉路を含まない**
- (つまり, 「無駄のない」通信可能なネットワーク)



全域木ではない

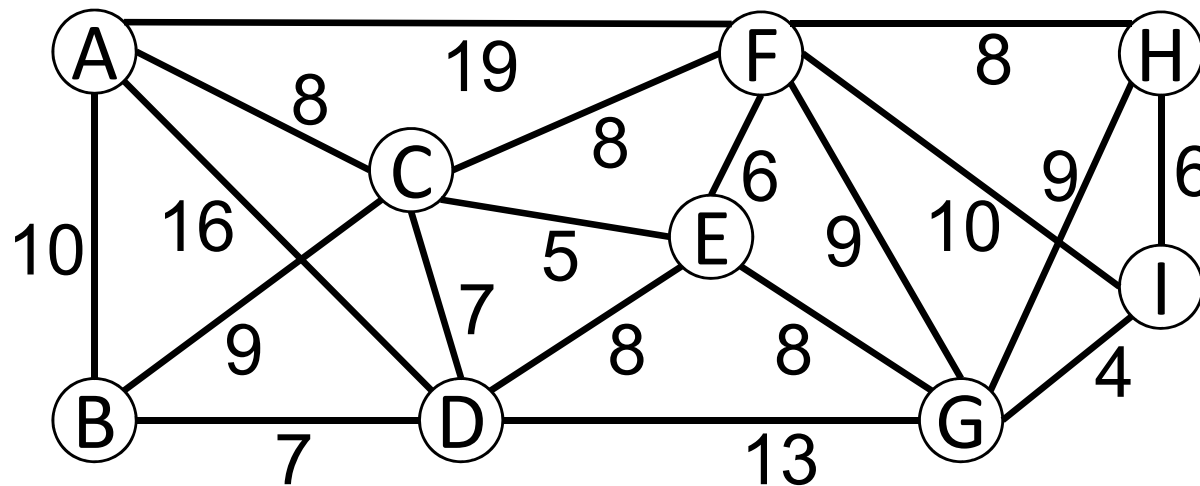


全域木である

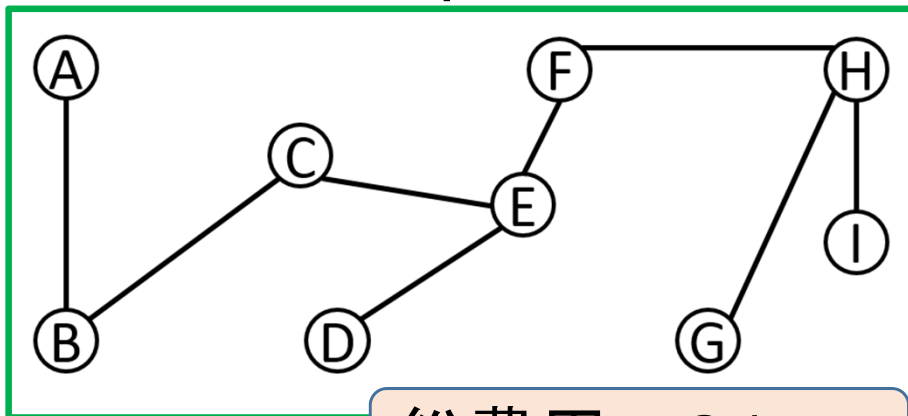


最小全域木問題

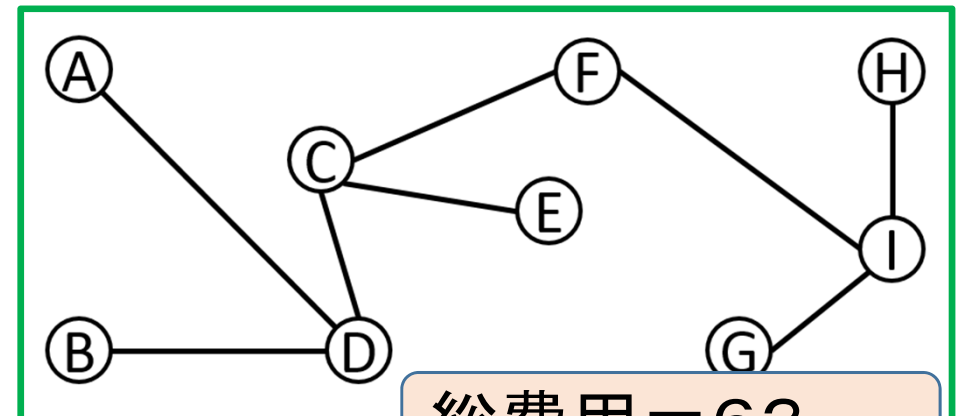
- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
 - ケーブル(u,v)の設置には費用 $c(u,v) > 0$ が必要
 - 通信可能なネットワークを, 出来るだけ最小費用でつくりたい
 → 費用の和が最小の全域木を求める問題



各ケーブル
の設置費用



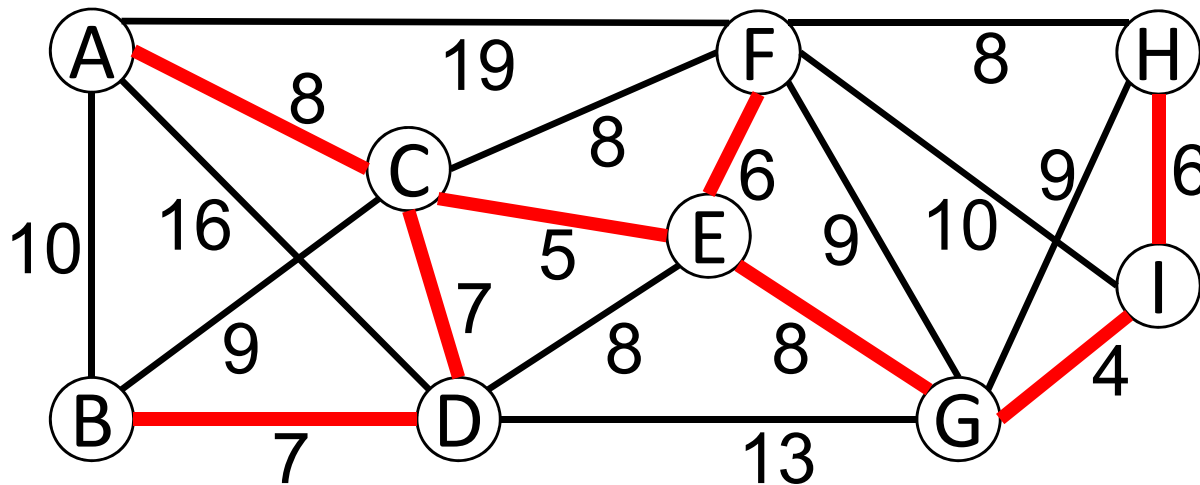
総費用 = 61



総費用 = 63

最小全域木問題の定義

- 入力: 無向グラフ $G=(V, E)$, 各枝の (u,v) の費用 $c(u,v) > 0$
- 出力: 費用の和が最小の全域木 (最小全域木)



総費用 = 51

講義の流れ

- 最小全域木問題の定義
- クラスカルのアルゴリズム
 - アルゴリズムの説明
 - 正当性の証明: 閉路と最小全域木の関係
- プリムのアルゴリズム
 - アルゴリズムの説明
 - 正当性の証明: カットセットと最小全域木の関係

クラスカルのアルゴリズム

クラスカル (1956)

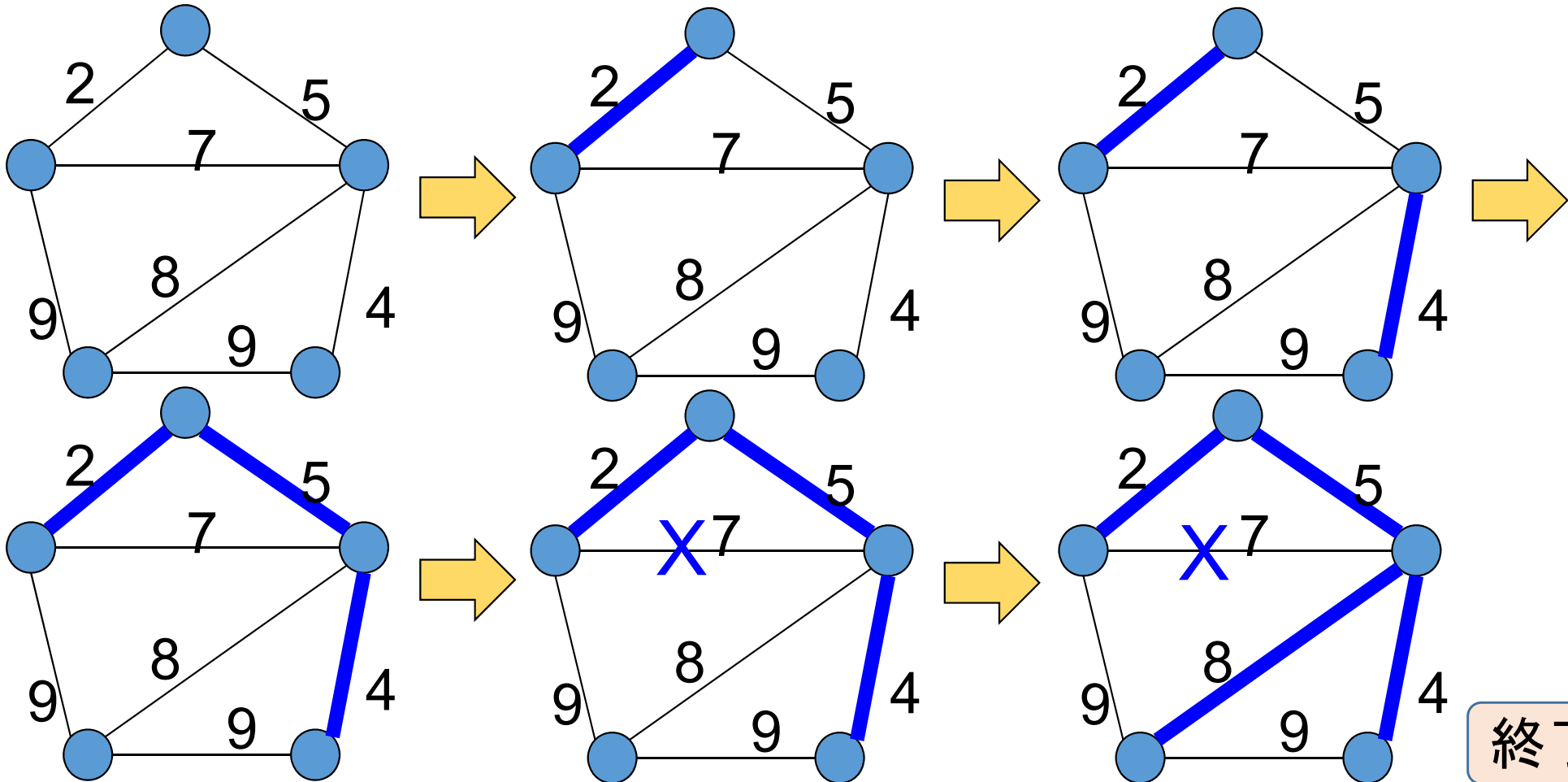
Loberman-Weinberger (1957)

プリム (1957)

クラスカルのアルゴリズム

- 費用の小さい順に枝を追加
- ただし、閉路が出来る場合は追加しない
- 選んだ枝集合が全域木になったら終了

良い枝から順に追加
→ 貪欲アルゴリズム



大事なこと

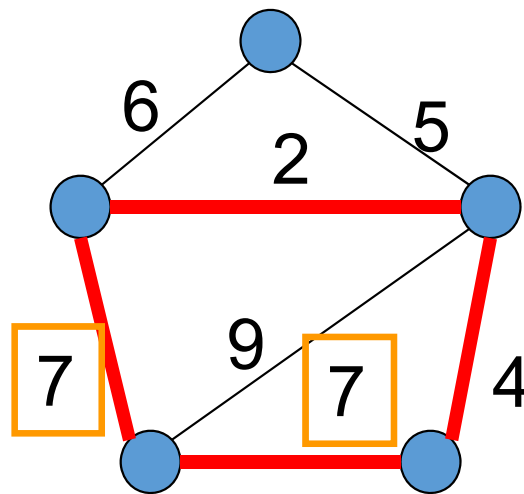
- このような簡単なアルゴリズム自体は誰でも思いつく
- でも、最適性の証明は誰でもできる訳ではない
- 最適性の証明のないアルゴリズム
 - 安心して使えない：悪い解が出力される可能性
 - 数値実験により信頼性を高めることは可能
 - でも100%の保証は出来ない
- 最適性の証明のあるアルゴリズム
 - 安心して使える：100%の保証 ← 数学の力

アルゴリズムの正当性：鍵となる性質

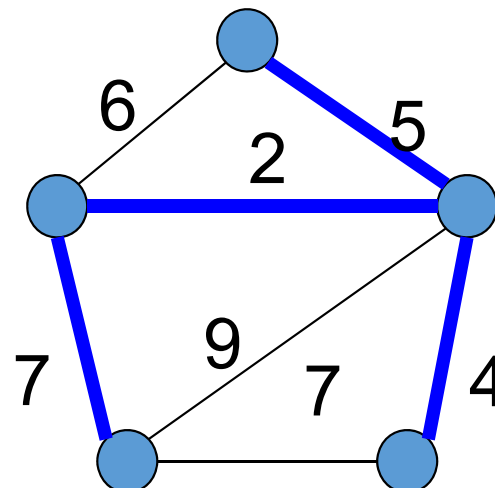
アルゴリズムの出力が最小全域木であることの証明

定理: C : 任意の閉路, (u,v) : 閉路の中で費用最大の枝
 $\rightarrow (u,v)$ を含まない最小全域木 T^* が存在
 (証明はあとで)

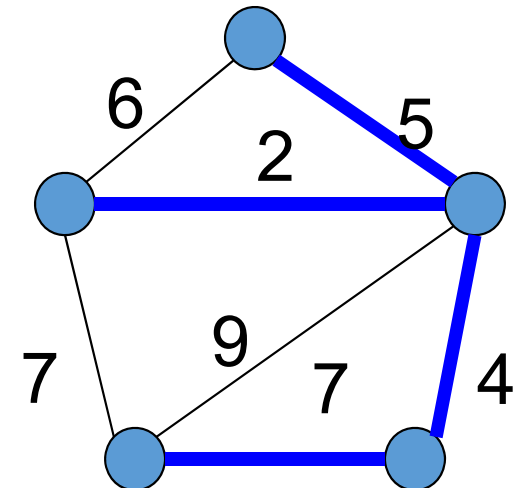
- 任意の閉路の枝のうち, 少なくとも1つは全域木に含まれない
- 閉路の中で費用最大の枝は不要



閉路C



最小全域木
その1



最小全域木
その2

アルゴリズムの正当性: 証明

アルゴリズムの出力が最小全域木であることの証明

定理: C : 任意の閉路, (u,v) : 閉路の中で費用最大の枝
(証明はあとで) $\rightarrow (u,v)$ を含まない最小全域木 T^* が存在

アルゴリズムでは, グラフから枝を削除することを繰り返す
示すべきこと: 枝を削除した後のグラフにおいて,

★最小全域木が存在し, その費用が変わらない(増えない)こと

枝 (u,v) が削除されるのは,

すでに選んだ枝集合と合わせて閉路ができる場合

すでに選んだ枝の費用 $\leq$ 枝 (u,v) の費用 ($\because$ アルゴリズムの手順)

定理より, 枝 (u,v) を含まない最小全域木が存在

$\therefore$ 枝 (u,v) をグラフから削除しても, ★ は成り立つ ■

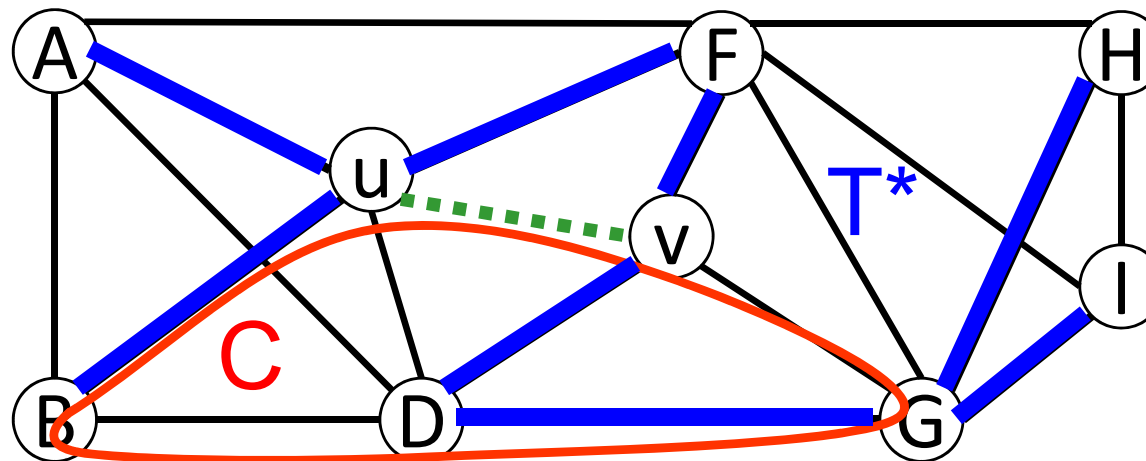
閉路と最小全域木

定理: C : 任意の閉路, (u,v) : 閉路 C の中で費用最大の枝
 $\rightarrow (u,v)$ を含まない最小全域木 T^* が存在

定理の証明では次の命題を使う(命題の証明は演習問題)

命題: V', V'' : グラフの頂点集合を2分割したもの
 P : $u \in V'$ と $v \in V''$ を結ぶ路
 $\rightarrow P$ は $s \in V', t \in V''$ を満たす枝 (s,t) を含む

定理の証明: 最小全域木 T^* を任意に選ぶ.
 (1) T^* が (u,v) を含まない: ただちに証明終了

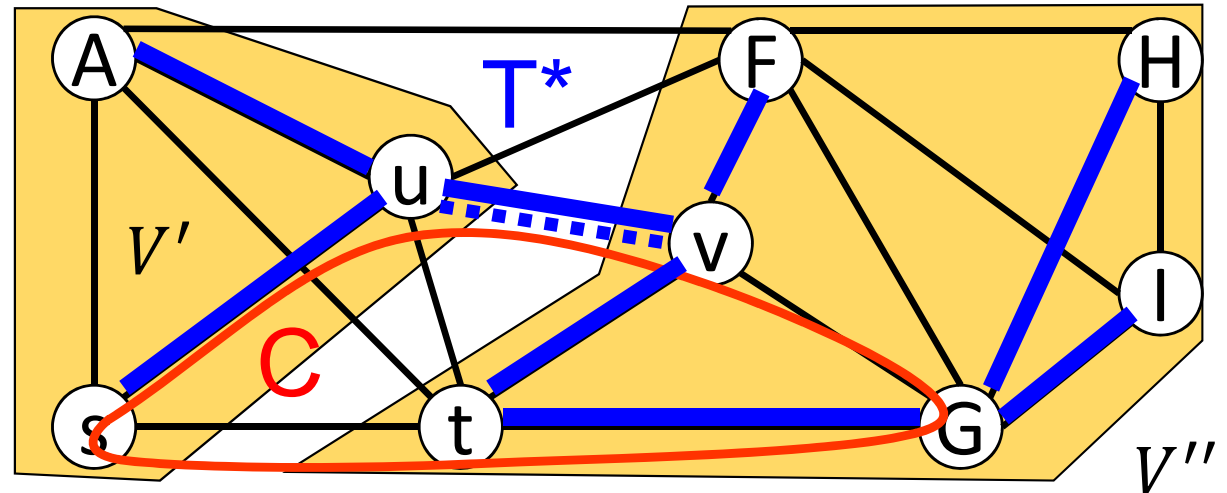


閉路と最小全域木(続き)

証明: (2) T^* が (u,v) を含む場合:

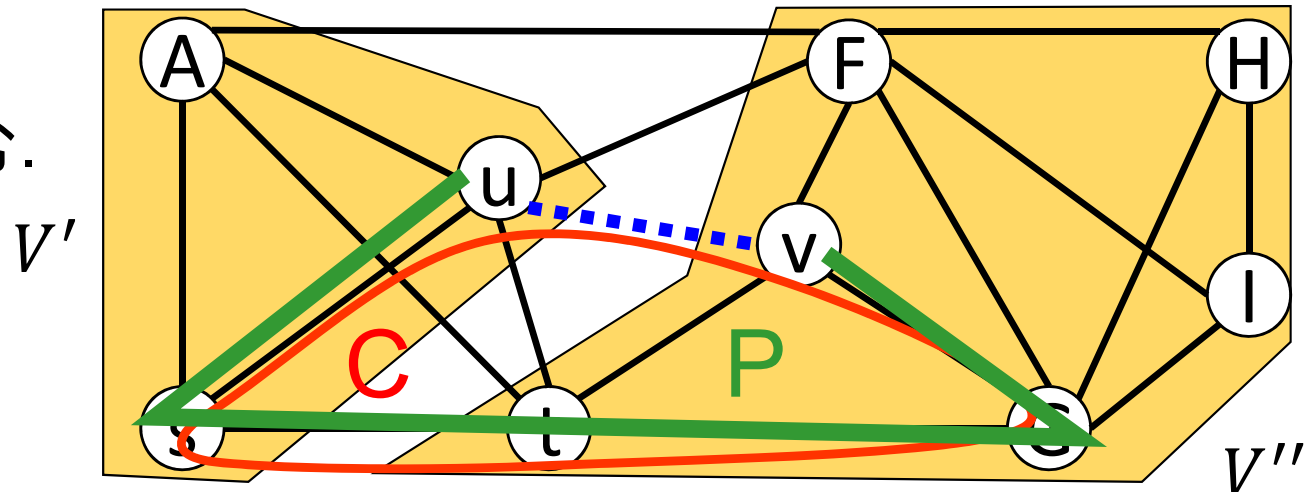
- ① $T^* - (u,v)$ はちょうど
2つの連結成分
 (V', T') , (V'', T'') をもつ.

①の証明は演習問題



$P = C - (u,v)$ とおく ← これは u と v を結ぶ路.
一般性を失うことなく $u \in V'$, $v \in V''$ と仮定する.
命題より,

P は $s \in V'$, $t \in V''$ を
満たす枝 (s,t) を含む.



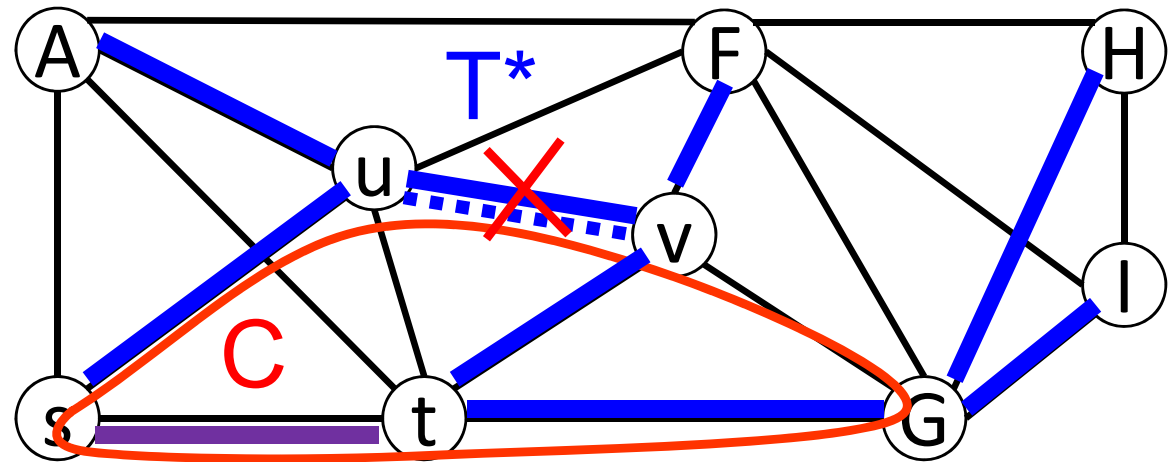
閉路と最小全域木(続き)

証明: (2) T^* が (u,v) を含む場合:

$T^{**} = T^* - (u,v) + (s,t) = T' \cup T'' \cup \{s,t\}$ とする.

後で示すように,

T^{**} は全域木である.



② T^{**} は最小全域木

(証明) T^* は最小全域木なので, T^{**} の費用 - T^* の費用 ≥ 0 .

一方, T^{**} の費用 - T^* の費用 = (s,t) の費用 - (u,v) の費用 ≤ 0

($\because (u,v)$ は閉路 C の中で費用最大の枝, $(s,t) \in C$)

よって, T^{**} の費用 = T^* の費用 $\therefore T^{**}$ は最小全域木

②より, T^{**} は (u,v) を含まない最小全域木

閉路と最小全域木(続き)

証明: $T^{**} = T^* - (u,v) + (s,t) = T' \cup T'' \cup \{s,t\}$ とする

③ T^{**} は閉路を含まない. (証明は演習問題)

④ (V, T^{**}) は連結

(証明) $V = V' \cup V''$ の任意の2頂点 x, y の間に路があることを示す.
 (V', T') , (V'', T'') は連結成分なので, $x, y \in V'$ または $x, y \in V''$ のときは x と y の間の路は存在する.

したがって, 次の場合を考えればよい:

$x \in V'$ かつ $y \in V''$, または $y \in V'$ かつ $x \in V''$

前者を仮定して良い.

$s, x \in V'$ であり, (V', T') は連結なので,

s と x の間の路 $P' \subseteq T'$ が存在.

同様に, t と y の間の路 $P'' \subseteq T''$ が存在.

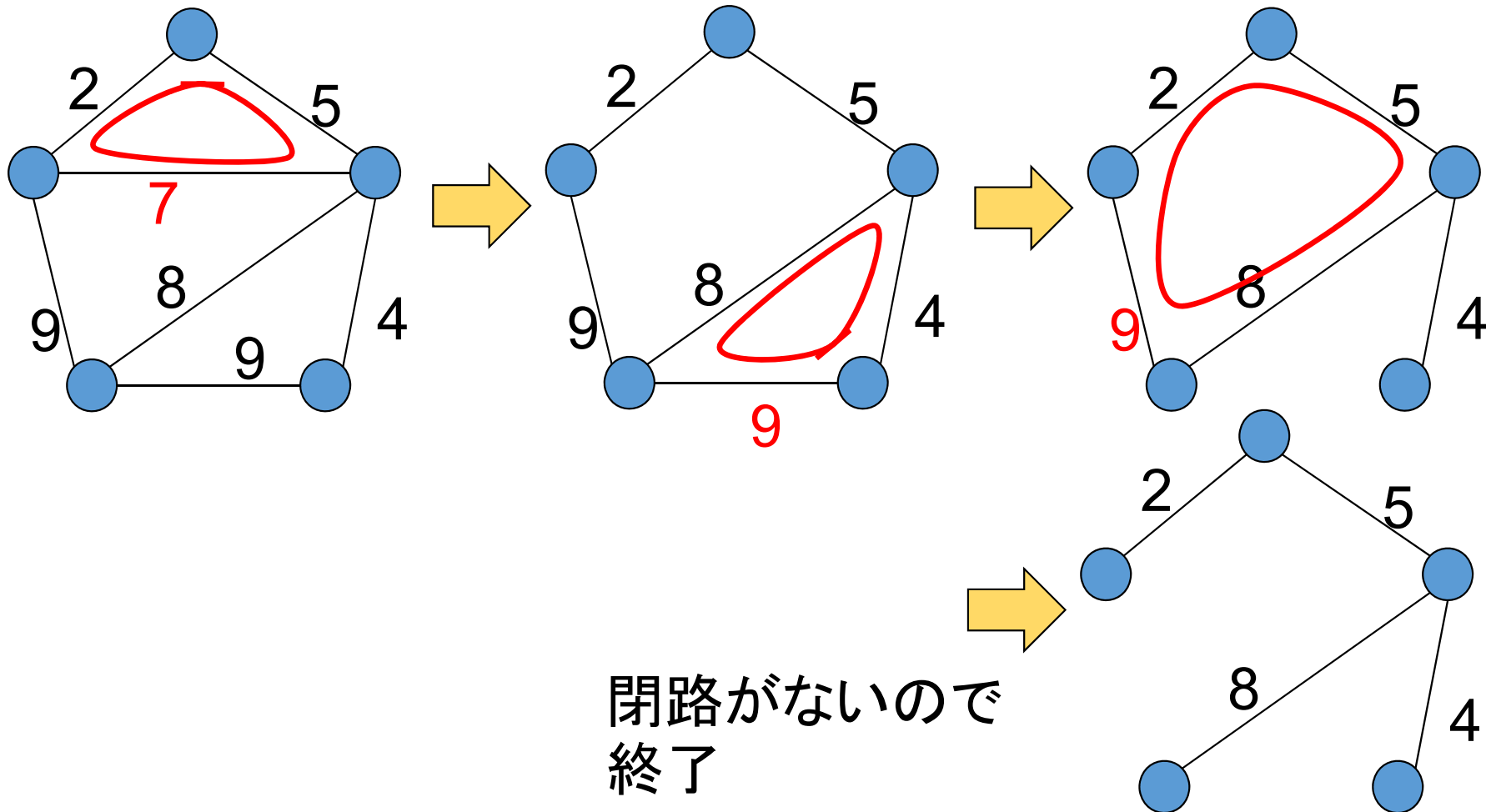
$\therefore P = P' \cup \{(s,t)\} \cup P'' \subseteq T^{**}$ は, x と y の間の路

③④より T^{**} は全域木 ■

枝を繰り返し削除するアルゴリズム

定理: C : 任意の閉路, (u,v) : 閉路の中で費用最大の枝
→ (u,v) を含まない最小全域木 T^* が存在

枝を順に削除していき、最終的に最小全域木を求めることも可能



プリムのアルゴリズム

ヤルニーク (1930)

クラスカル (1956)

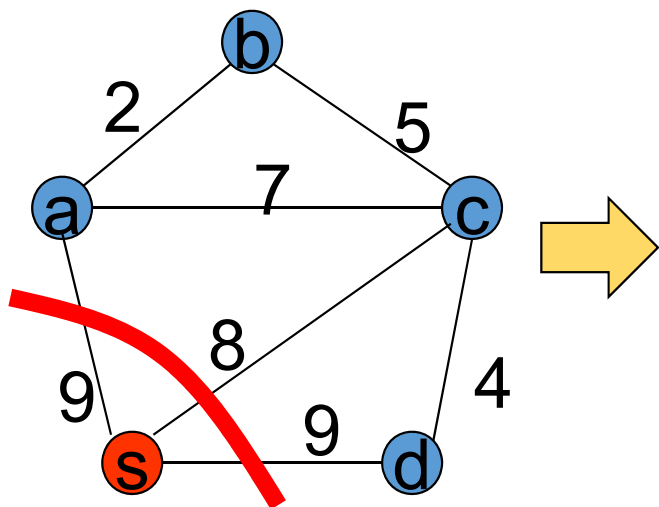
プリム (1957)

ダイクストラ (1959)

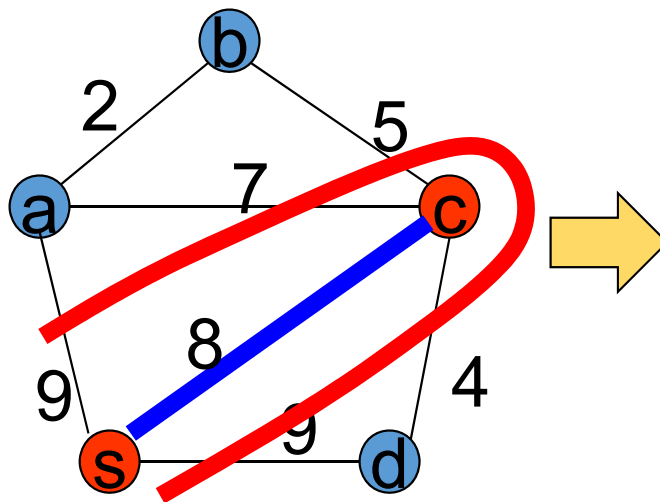
プリムのアルゴリズム

根から木を成長させて、最小全域木に育てるアルゴリズム

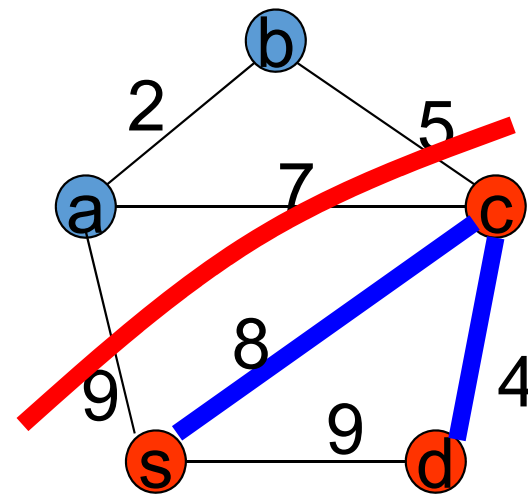
- 適当な頂点 s を選び、これを初期の木 T とする。
- T の中と外を結ぶ枝の中で、費用最小の枝を T に繰り返し追加
- 全ての頂点が T に含まれたら終了



T の中の頂点= $\{s\}$
費用最小の枝 (s, c)
を追加



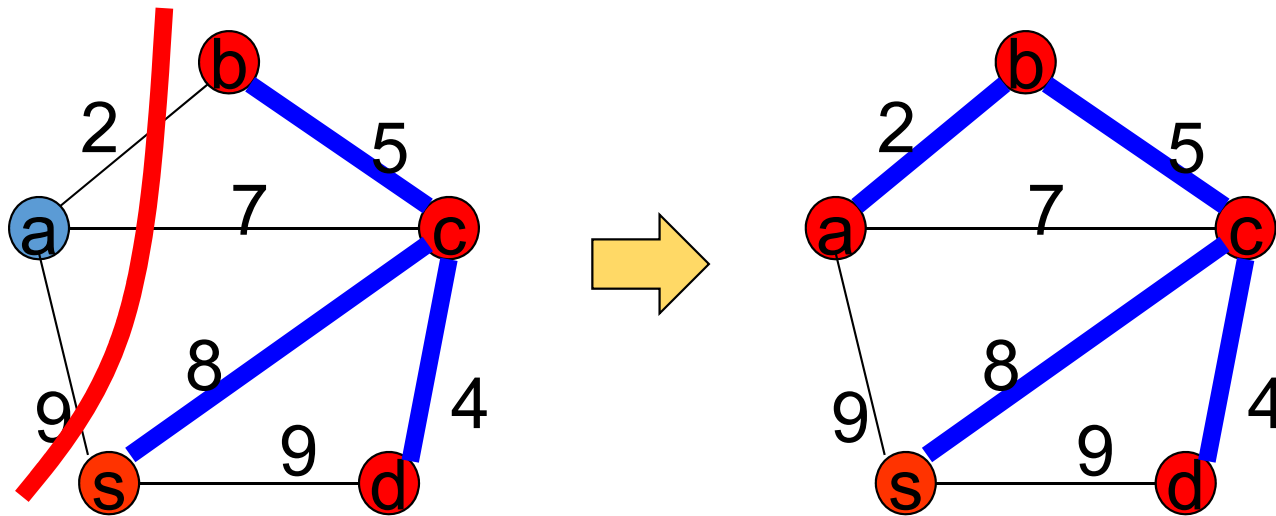
T の中の頂点= $\{s, c\}$
費用最小の枝 (c, d)
を追加



T の中の頂点= $\{s, c, d\}$
費用最小の枝 (b, c) を
追加

プリムのアルゴリズム

- 適当な頂点 s を選び, これを初期の木 T とする.
- T の中と外を結ぶ枝の中で, 費用最小の枝を T に繰り返し追加
- 全ての頂点が T に含まれたら終了



T の中の頂点 $=\{s, c, d, b\}$
費用最小の枝 (a, b) を
追加

終了

グラフのカットとカットセット

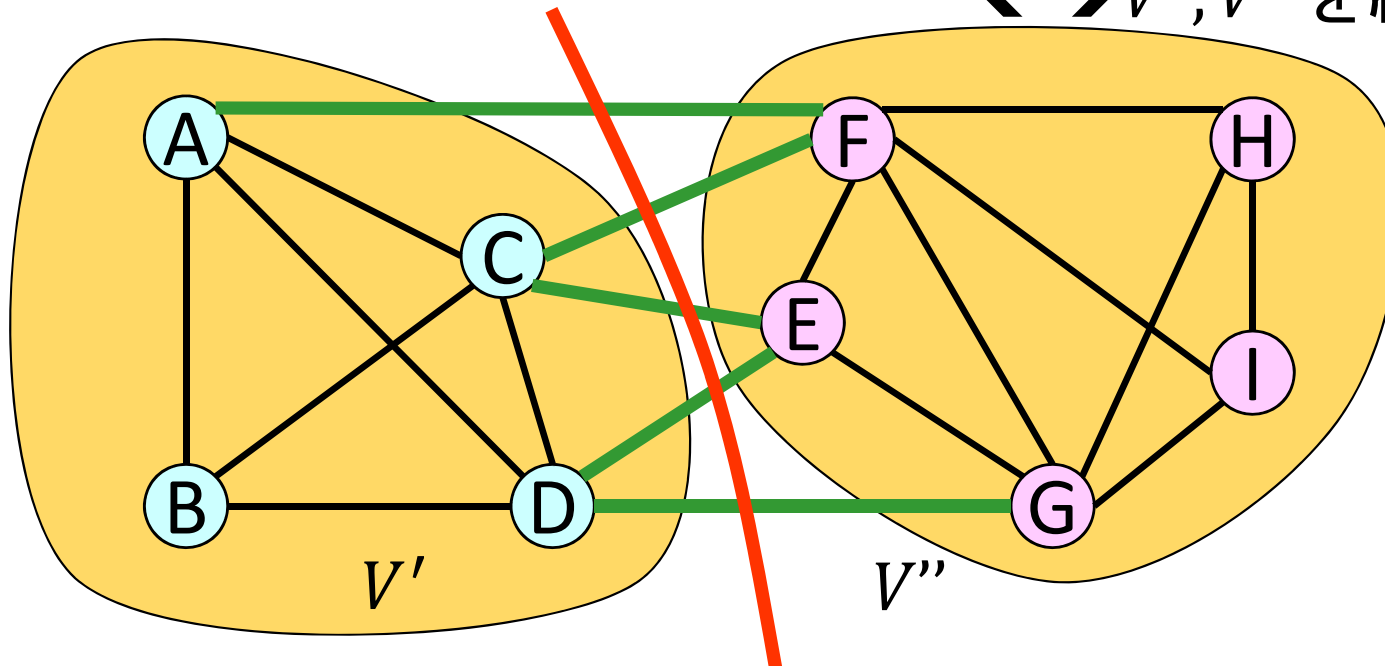
アルゴリズムの正当性を示す上で重要な概念

• 定義: (V', V'') はグラフの **カット**

$\leftrightarrow V', V''$ はグラフの頂点集合の分割 (全頂点を2分割したもの)

• 定義: カット (V', V'') に関する **カットセット** $E(V', V'')$

$\leftrightarrow V', V''$ を結ぶ枝全ての集合



※ カット --- 川で分断された土地

カットセット --- 川に架かる橋すべて というイメージ

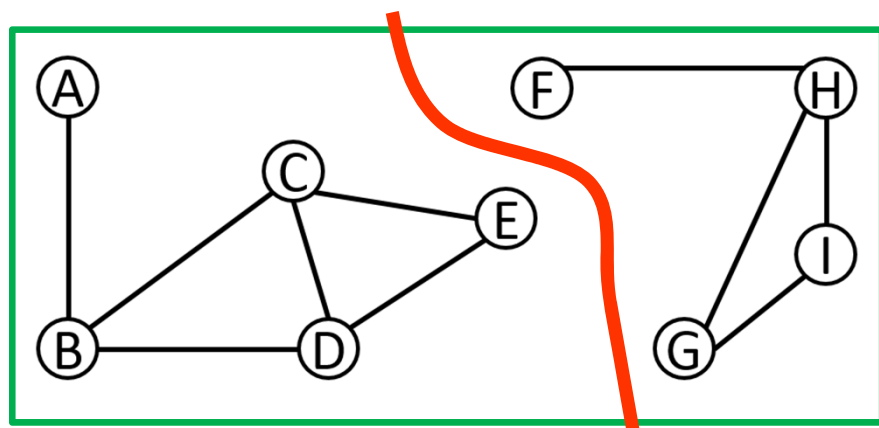
カットセットと連結性

定義: **全域木** = 次の条件を満たす枝の部分集合 T

(i) グラフ (V, T) は**連結**

(ii) 枝集合 T は**閉路を含まない**

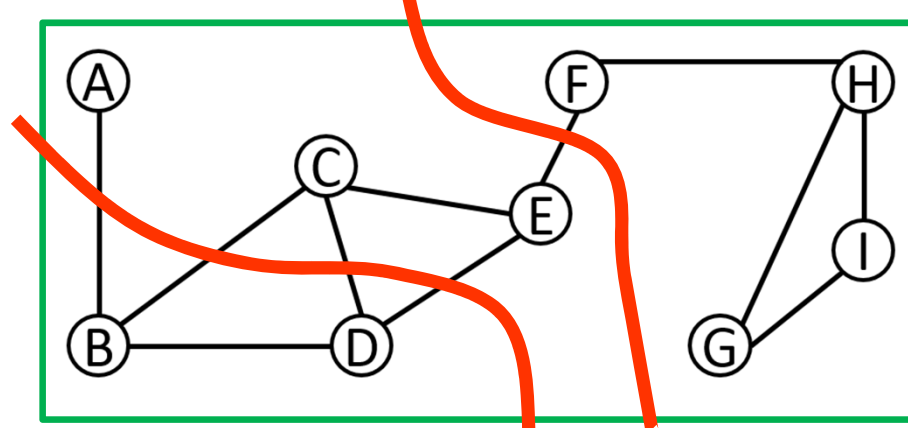
命題: G の枝集合 $X \subseteq E$ に対し, (V, X) は連結 (証明はあとで)
 $\iff$ 任意のカットセット $E(V', V'')$ に対し, $X \cap E(V', V'') \neq \emptyset$



非連結なグラフ

カットセット

$E(\{A, B, C, D, E\}, \{F, H, I, G\})$
 の枝を含まない



連結なグラフ

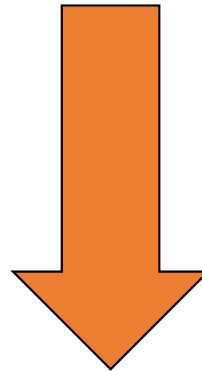
任意のカットセット $E(V', V'')$ に対し,
 $X \cap E(V', V'') \neq \emptyset$

全域木の定義の書き換え

定義: 全域木 = 次の条件を満たす枝の部分集合 T

- (i) グラフ (V, T) は連結 (ii) 枝集合 T は閉路を含まない

命題: G の枝集合 $X \subseteq E$ に対し, (V, X) は連結 (証明はあとで)
 $\iff$ 任意のカットセット $E(V', V'')$ に対し, $X \cap E(V', V'') \neq \emptyset$



カットセットを使って
定義を書き換え

命題: G の枝集合 $T \subseteq E$ に対し, T は全域木
 $\iff$ (i) 任意のカットセット $E(V', V'')$ に対し, $T \cap E(V', V'') \neq \emptyset$
(ii) 枝集合 T は閉路を含まない

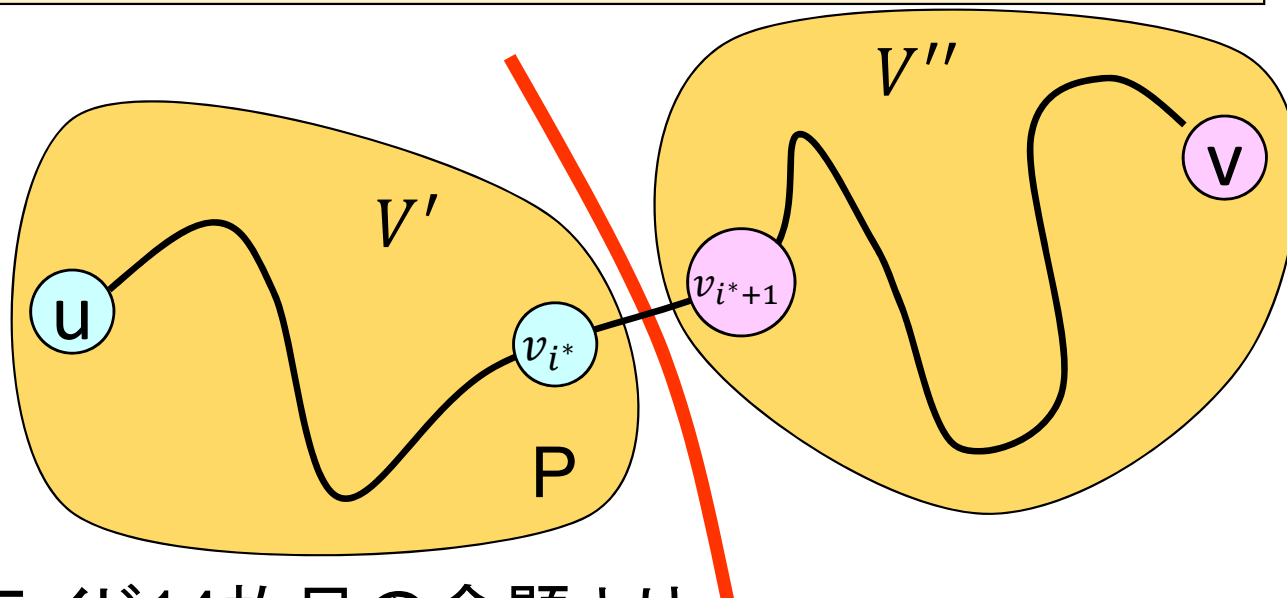
カットセットと連結性：証明

命題: G の枝集合 $X \subseteq E$ に対し, (V, X) は連結
 $\iff$ 任意のカットセット $E(V', V'')$ に対し, $X \cap E(V', V'') \neq \emptyset$

[$\Rightarrow$] の証明

$u \in V', v \in V''$ を選ぶ.
 定義より, u と v の間に
 路 P が存在.

$u \in V', v \in V''$ なので, スライド14枚目の命題より,
 P は $s \in V', t \in V''$ を満たす枝 (s, t) を含む
 $\therefore (v_s, v_t) \in E(V', V'')$ ■



命題: V', V'' : グラフの頂点集合を2分割したもの
 P : $u \in V'$ と $v \in V''$ を結ぶ路

$\rightarrow P$ は $s \in V', t \in V''$ を満たす枝 (s, t) を含む

カットセットと連結性：証明

命題: G の枝集合 $X \subseteq E$ に対し, (V, X) は連結

$\iff$ 任意のカットセット $E(V', V'')$ に対し, $X \cap E(V', V'') \neq \emptyset$

[$\Leftarrow$] の証明 対偶を証明:

「 (V, X) は非連結

$\Rightarrow$ あるカットセット $E(V', V'')$ に対し, $X \cap E(V', V'') = \emptyset$ 」

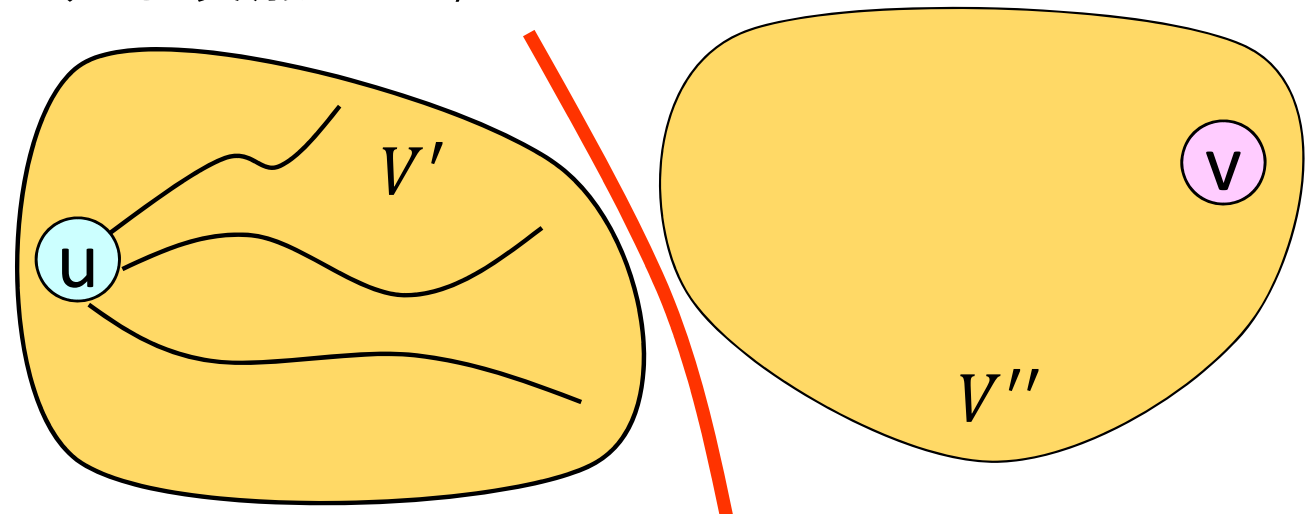
(V, X) は非連結と仮定

$\Rightarrow$ 定義より, 枝集合 X のグラフ (V, X) において,

ある頂点 u と v は路で繋がっていない.

$V' = u$ からの路が存在する頂点全て, $V'' = V - V'$

$\Rightarrow v \in V''$



カットセットと連結性：証明

命題: G の枝集合 $X \subseteq E$ に対し, (V, X) は連結
 $\iff$ 任意のカットセット $E(V', V'')$ に対し, $X \cap E(V', V'') \neq \emptyset$

[$\Leftarrow$] の証明

示すこと: 「あるカットセット $E(V', V'')$ に対し, $X \cap E(V', V'') = \emptyset$ 」

$V' \neq \emptyset, V'' \neq \emptyset \therefore (V', V'')$ はカット.

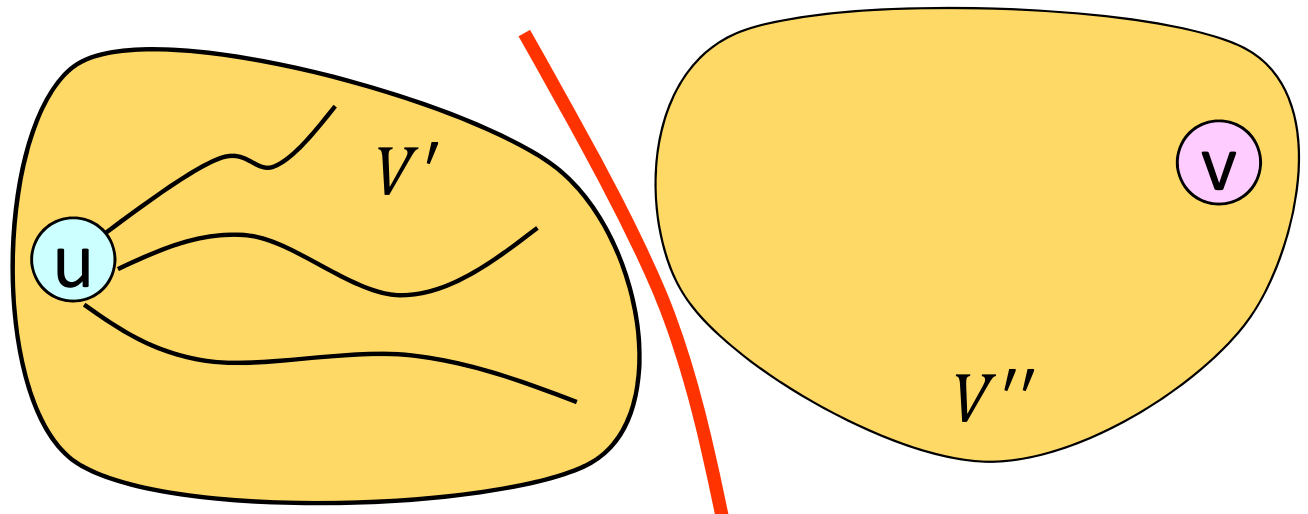
また, 任意の $(s, t) \in E(V', V'')$ に対し,

$(s, t) \in X, s \in V', t \in V''$ と仮定すると,

u から s への路が存在することから, u から $t \in V''$ への路も存在.

(矛盾)

$\therefore X \cap E(V', V'') \neq \emptyset$



プリムのアルゴリズムの正当性: 鍵となる性質

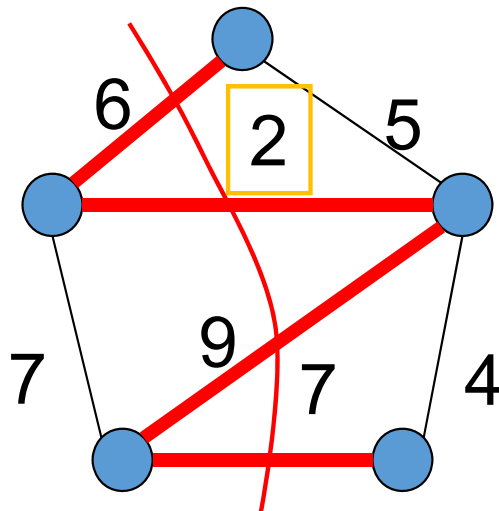
定理: $E(V', V'')$: 任意のカットセット

(u, v) : カットセット $E(V', V'')$ の中で費用最小の枝

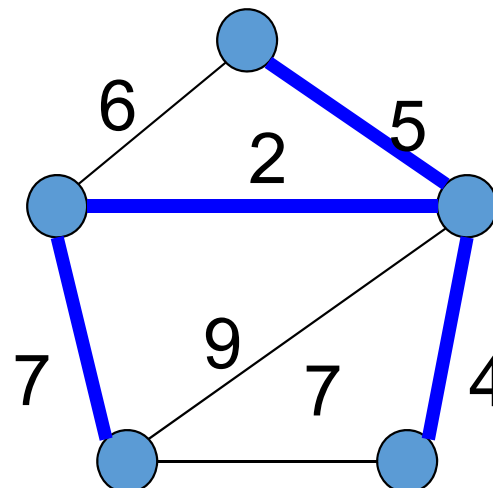
→ (u, v) を含む最小全域木 T^* が存在

(証明はあとで)

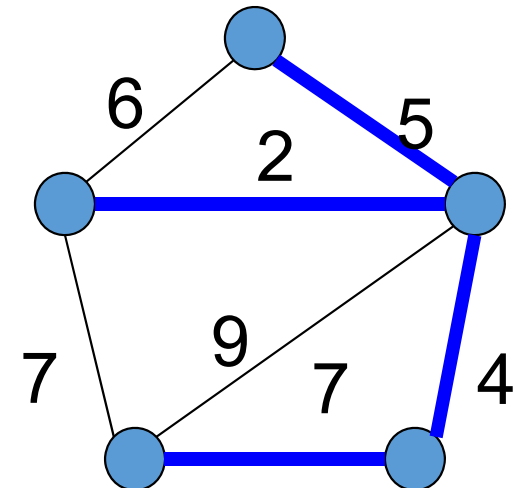
- 任意のカットセットの枝のうち, 少なくとも1つは全域木に含まれる
- **カットセットの中で費用最小の枝は必要**



カットセット



最小全域木
その1



最小全域木
その2

プリムのアルゴリズムの正当性: 鍵となる性質

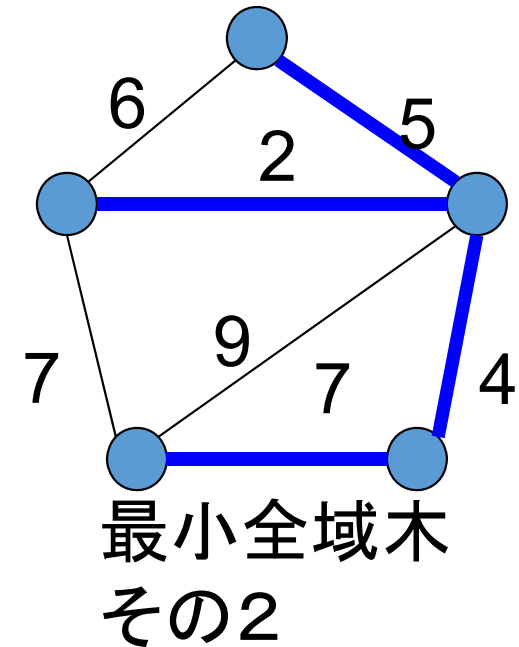
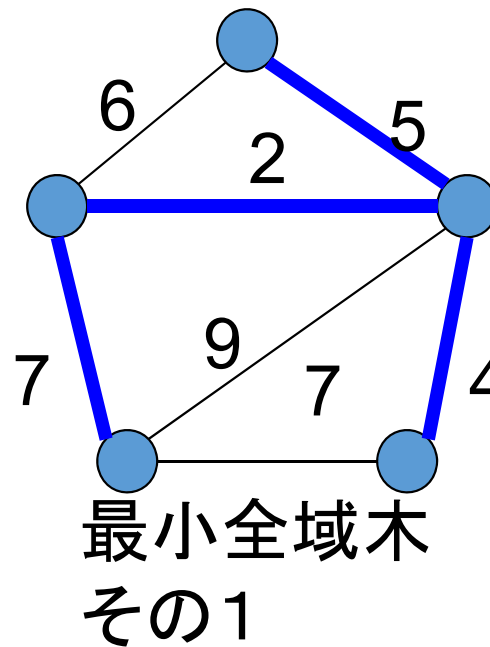
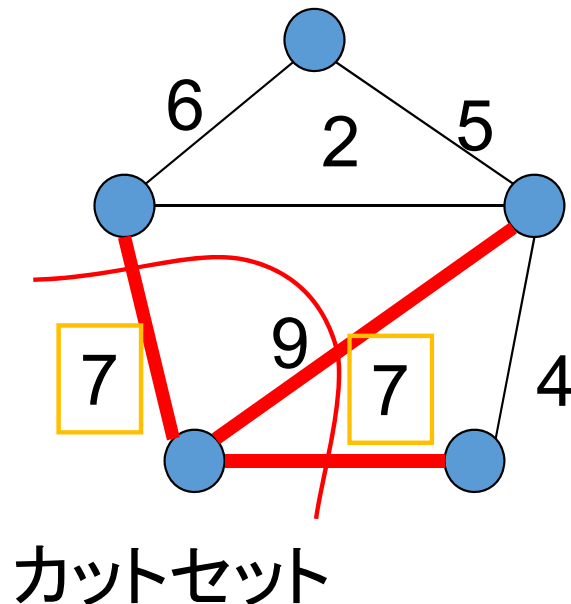
定理: $E(V', V'')$: 任意のカットセット

(u, v) : カットセット $E(V', V'')$ の中で費用最小の枝

→ (u, v) を含む最小全域木 T^* が存在

(証明はあとで)

- 任意のカットセットの枝のうち, 少なくとも1つは全域木に含まれる
- カットセットの中で費用最小の枝は必要**



プリムのアルゴリズムの正当性: 証明

定理: $E(V', V'')$: 任意のカットセット

(u, v) : カットセット $E(V', V'')$ の中で費用最小の枝

(証明はあとで) $\rightarrow (u, v)$ を含む最小全域木 T^* が存在

帰納法による証明:

ある反復における枝集合 T を含む最小全域木が存在すると仮定.

アルゴリズムの各反復では,

現在の T の中の頂点と, 外の頂点をつなぐ枝の中で
費用最小の枝 (u, v) を追加している.

$V' = T$ の中の頂点すべて, $V'' = T$ の外の頂点すべて

とおくと, (u, v) はカットセット $E(V', V'')$ の中で費用最小の枝

$\therefore (u, v)$ を含む最小全域木 T^* が存在

$\therefore T$ および (u, v) を含む
最小全域木が存在 ■

注意: この証明の中で
少しごまかしている
ところあり

カットセットと最小全域木：証明

- 任意のカットセットの枝のうち、少なくとも1つは全域木に含まれる
- カットセットの中で費用最小の枝は必要

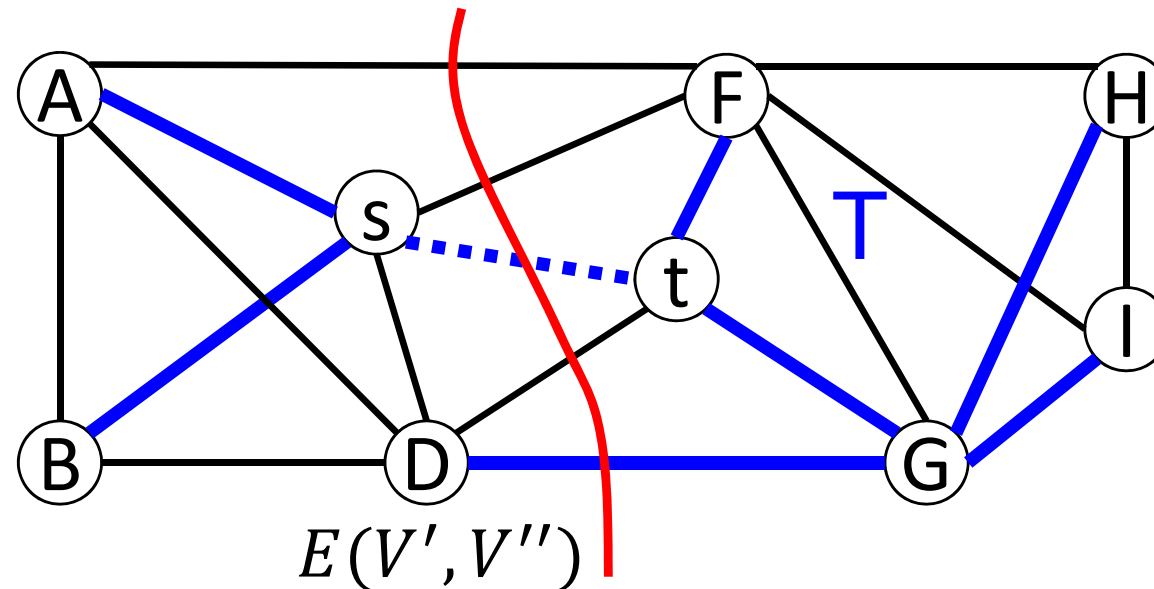
定理: $E(V', V'')$: 任意のカットセット

(s, t) : カットセット $E(V', V'')$ の中で費用最小の枝

→ (s, t) を含む最小全域木 T^* が存在

証明: 最小全域木 T^* を任意に選ぶ.

(1) T^* が (s, t) を含む: ただちに証明終了



カットセットと最小全域木：証明

証明： (2) T^* が (s,t) を含まない場合：

T^* は連結なので, s と t の間に路が存在 $\leftarrow P$ とおく

① P の枝 (u,v) でカットセット $E(V', V'')$ に含まれるものが存在
(命題を参照)

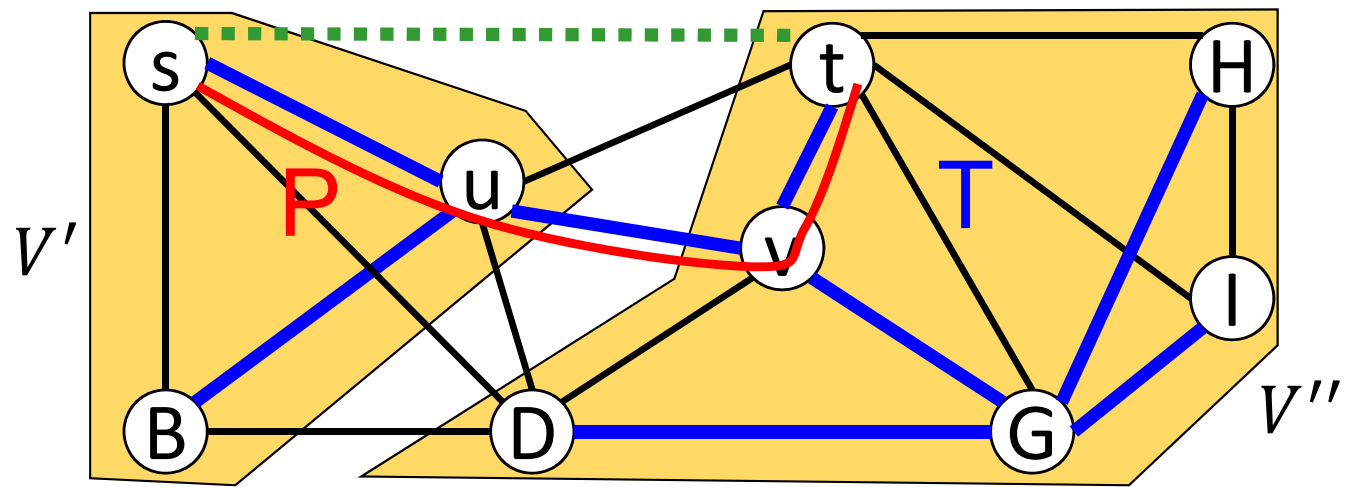
② $T - (u,v)$ は 2つの連結成分 (V', T') , (V'', T'') になる
(閉路と最小全域木」の①参照)

$T^{**} = T^* - (u,v) + (s,t)$ とおく

③ T^{**} は連結 ($\because$ 仮定 $(s,t) \in E(V', V'')$ を使う).

「閉路と最小全域木」の証明④参照)

④ T^{**} は閉路なし (閉路と最小全域木」の③参照)



カットセットと最小全域木：証明

証明：

∴ T^{**} は全域木

⑤ T^{**} は最小全域木

(証明) T^* は最小全域木なので, T^{**} の費用 - T^* の費用 ≥ 0 .

一方, T^{**} の費用 - T^* の費用 = (s,t) の費用 - (u,v) の費用 ≤ 0

(∵ (s,t) はカットセットの中で費用最小の枝, $(u,v) \in E(V', V'')$)

よって, T^{**} の費用 = T^* の費用 ∴ T^{**} は最小全域木

⑤より, T^{**} は (s,t) を含む最小全域木 ■

