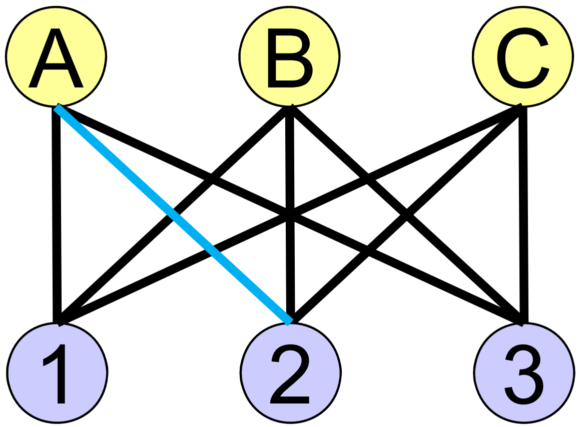
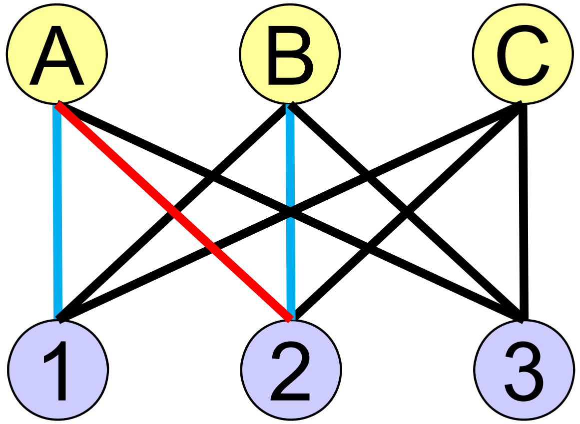
問1：以下の二部グラフの最大重みマッチングを，アルゴリズムB を用いて計算せよ.



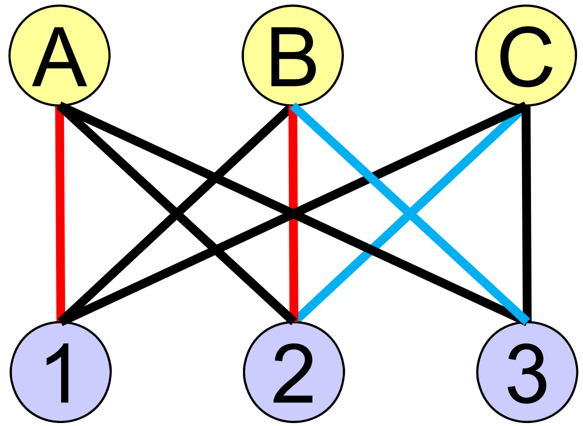
w(i,j)	A	B	C
①	5	4	0
②	6	5	4
③	0	3	1

重み最大の増加路
A→2



w(i,j)	A	B	C
①	5	4	0
②	6	5	4
③	0	3	1

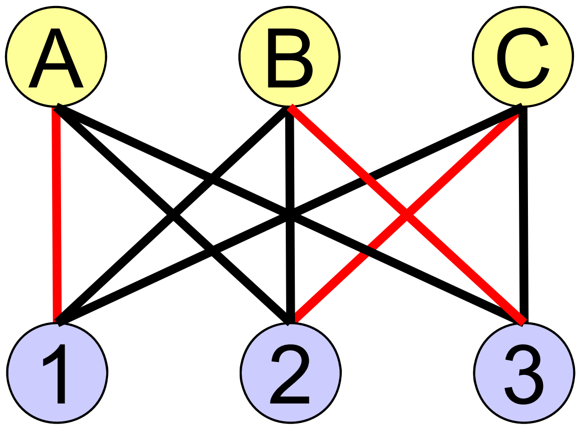
重み最大の増加路
B→2→A→1



w(i,j)	A	B	C
①	5	4	0
②	6	5	4
③	0	3	1

重み最大の増加路
C→2→B→3

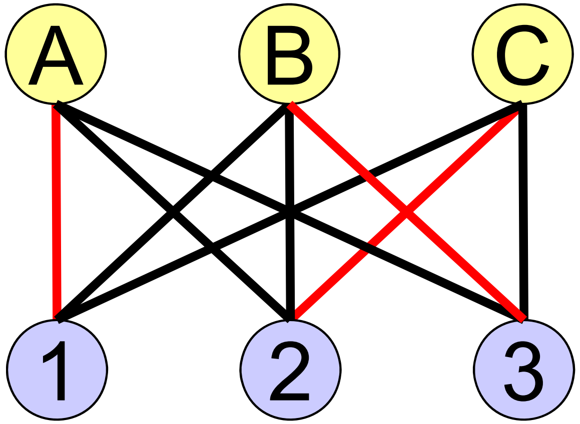
問1：以下の二部グラフの最大重みマッチングを，アルゴリズムB を用いて計算せよ.



w(i,j)	A	B	C
①	5	4	0
②	6	5	4
③	0	3	1

増加路が存在しないので終了

問2：問1の問題において，A，B，Cをオークション参加者，1，2，3を財と見なした
ときの均衡割当は(A,1), (B,3), (C,2) である．この均衡割当を用いて，
均衡価格の満たすべき条件を，差分不等式系の形で表せ．
（解を求める必要はない）



w(i,j)	A	B	C
①	5	4	0
②	6	5	4
③	0	3	1

均衡価格：以下の条件を満たす(p_1, p_2, p_3)
１番目の条件より

$$5 - p_1 \geq 6 - p_2, 5 - p_1 \geq 0 - p_3, 5 - p_1 \geq 0$$
$$3 - p_3 \geq 4 - p_1, 3 - p_3 \geq 5 - p_2, 3 - p_3 \geq 0$$
$$4 - p_2 \geq 0 - p_1, 4 - p_2 \geq 1 - p_3, 4 - p_2 \geq 0$$

演習問題の解答例

問３：

（１）+1, 0, または -1 の値を取り，その和が +1 に等しい数列 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を考える.
$a_1, a_2, \ldots, a_m$ の中で +1 の値を取るものが2つ以上存在するとき，
$a_1, a_2, \ldots, a_m$ の中で -1 の値を取るものが少なくともひとつは存在する.
これを証明せよ.

（証明）数列の総和が +1 なので，値が+1 の要素の数は，値が-1の要素の数より
ちょうど１つ多い．値が+1 の要素の数は2つ以上なので，値が-1の要素の数は1つ以上となる．■

（２）M を最大重み k マッチングとし，M’ を最大重み (k+1) マッチングとする.
ただし，M’ は最大重み (k+1) マッチングの中で，$(M' \setminus M) \cup (M \setminus M')$ の
要素数が最小とする．このとき，$(M' \setminus M) \cup (M \setminus M')$ を交互路・交互閉路に
分解すると，増加路ひとつが含まれるのみである．これを証明せよ.

（証明略）

演習問題の解答例

問4：一般のグラフGに対する最大（サイズ）マッチング問題は下記のように定式化できる．ただし，V={1,2,...,n}とする．また，枝(i,j)と(j,i)を同一視し，
変数 x(i,j)と x(j,i) を同一視する．

(IP) 最大化 $\sum_{(i,j)\in E} x(i,j)$

条件 $\sum_{j\in V:\,(k,j)\in E} x(k,j) \le 1 \quad (\forall k \in V)$

$x(i,j) \in \{0,1\} \quad (\forall (i,j) \in E)$

（1）この問題(IP)の実行可能解により，グラフのマッチングが表現されていることを説明せよ．

（解答例）x(i,j)=1 なる枝 (i,j) の集合を M とおくと，制約条件より，各頂点 k に接続するMの枝は高々１つとなる．したがって，M はマッチングである．逆に，マッチングM に対して，(i,j)∈M ならばx(i,j)=1，そうでないときはx(i,j)=0とおくと，各頂点 k に接続するMの枝は高々１つなので，制約条件が成り立つ．

演習問題の解答例

問4:（２）変数の条件 $x(i,j) \in \{0,1\}$ を $x(i,j) \geq 0$ に置き換えて得られる線形計画問題 を(LP)と表す．この問題の双対問題(D)を書け．

（答え）　(D) 最小化 $\sum_{k \in V} y(k)$

条件　$y(i) + y(j) \geq 1 \quad (\forall (i,j) \in E)$

$y(k) \geq 0 \quad (\forall k \in V)$

（３）双対問題(D)とグラフの頂点被覆の関係を説明せよ．

（解答例）双対問題の実行可能解 y で $y(k) \in \{0,1\}$ を満たすものと，グラフの頂点被覆は1対1対応する．

（４）線形計画問題(LP)の最適値と元の問題(IP)の最適値が異なるようなグラフの例をひとつ挙げよ．また，実際に最適値が異なることを説明せよ．

（解答例）頂点３つが互いに枝で結ばれているグラフ.

(LP)の最適値は3／2，(IP) は1．