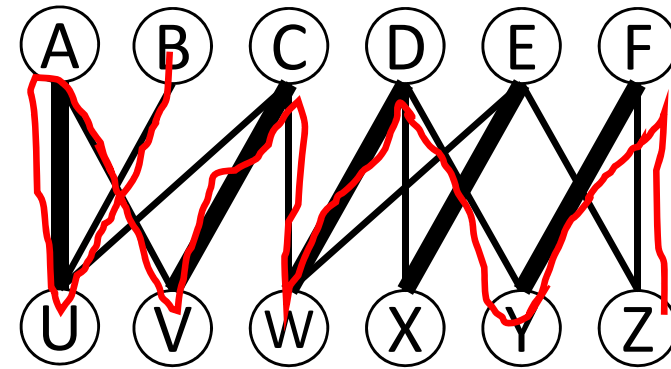
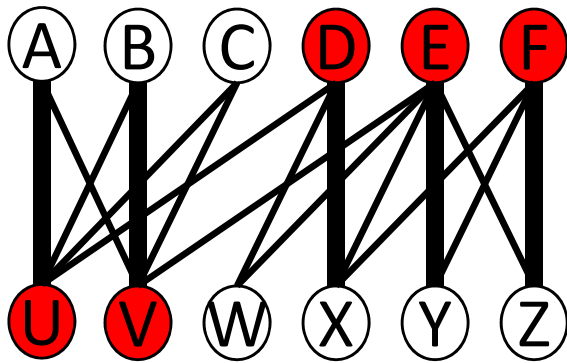


演習問題解答例

問1: 以下の2つのグラフおよびマッチングM(太線)について考える.

- Mに関する増加路が存在する場合はその増加路を書け.
- 増加路が存在しない場合は最小被覆を求めよ(結果のみ書けば良い)



問2: 任意のマッチングMと頂点被覆 Sに対し,
 $|M|=|S|$ ならば, M は最大マッチングである. これを証明せよ.
 (ヒント: 背理法が分かりやすいかも)

(証明) 上記の頂点被覆 S と任意に選んだマッチングM'に対し, 授業で示した命題より $|M'| \leq |S|$ が成り立つ. 上記のマッチングMは $|M|=|S| \geq |M'|$ を満たすので, 最大マッチングである.

問3: 最大マッチングの枝数と, 最小頂点被覆の頂点数が一致しない
 グラフの例を1つ挙げよ (ヒント: 頂点数 ≤ 4 の例がある)

(解答例) 頂点3つが互いに枝で結ばれたグラフ

演習問題解答例

問4: ある二部グラフ G の最大マッチングを M とする.

また, (u,v) は M に含まれない枝であり, u には M の枝が接続せず,

v には M の枝が接続しているとする (例: 右下の図の (B,X)).

このとき, **最大マッチング最小被覆定理** を使って,

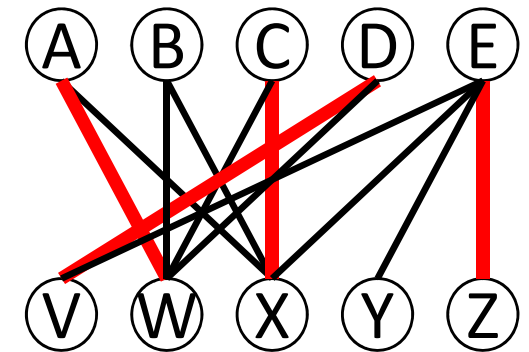
v を含む最小頂点被覆が存在することを証明したい.

(1) グラフ G から頂点 v および v に接続する枝全てを削除

したグラフを G' とする. グラフ G の最小頂点被覆の

大きさを k としたとき, G' の最小頂点被覆の大きさはいくつになるか?

答えのみ書けば良い.



(解答) $k-1$ 個 ← これをきちんと証明するのは, ちょっと大変

(証明の概略) G の最小頂点被覆を S とする. これは, 必ず頂点 v を含む.

$S' = S - \{v\}$ はグラフ G' の頂点被覆, 大きさ $k-1$.

S' より小さい頂点被覆が存在したと仮定すると,

$S' \cup \{v\}$ は G の頂点被覆であり, その大きさ $k-1 < |S|$ (矛盾)

演習問題解答例

問4: (2) G' の任意に選んだ最小頂点被覆を S' とおく.

このとき $S \equiv S' \cup \{v\}$ は G の最小頂点被覆となる. これを証明せよ.

(ヒント: S が頂点被覆であることと, その最小性を示す)

(解答例) (1) の結果より, $|S'| = k-1$. よって $|S| = k$ である.

したがって, S が頂点被覆ならば, k の定義により, S は最小頂点被覆となる.

S' は G' の頂点被覆なので, G の枝のうち, 頂点 v に接続しない枝は必ず

S' のいずれかの頂点に接続する.

よって, G の任意の枝は, S' のいずれかの頂点, または v に接続する.

つまり, S のいずれかの頂点に接続するので, S は G の頂点被覆である. ■