

2020年度
経営・経済のための最適化理論
第1回

最短路問題
負の枝長を許した場合

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

この講義の目的

- 離散的な最適化問題を紹介
- 問題の数理構造, アルゴリズムを説明
 - 数学的な側面を重視
 - アルゴリズムが正しく動く理由を解説
- 経済学・経営工学との繋がりを紹介
 - 「数学は世の中の役に立つ」

今後の予定

- 最短路問題
- 最大要素マッチング問題
- 最大重みマッチング問題
- 最小全域木問題

- 資源配分問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

- ナップサック問題
- 巡回セールスマン問題

- 最適解を必ず求めるアルゴリズムの紹介
- 数学的な証明

- 近似解を求めるアルゴリズムの紹介
- 近似精度に対する理論保証

授業の進め方

- 授業資料はOCWに置きます(OCW-iではない)
- 授業中, 質問がある場合はチャットでどうぞ. 口頭での質問も可
- 授業の途中で休憩を入れることもあります
- 授業は早めに終了する予定. 残りの時間は質疑に充てます

成績評価

- 授業中に小テストを実施する可能性あり
 - 実施の場合, 1週間前までに予告します
- 成績は, レポートの提出状況と内容(および小テスト)を元に決定

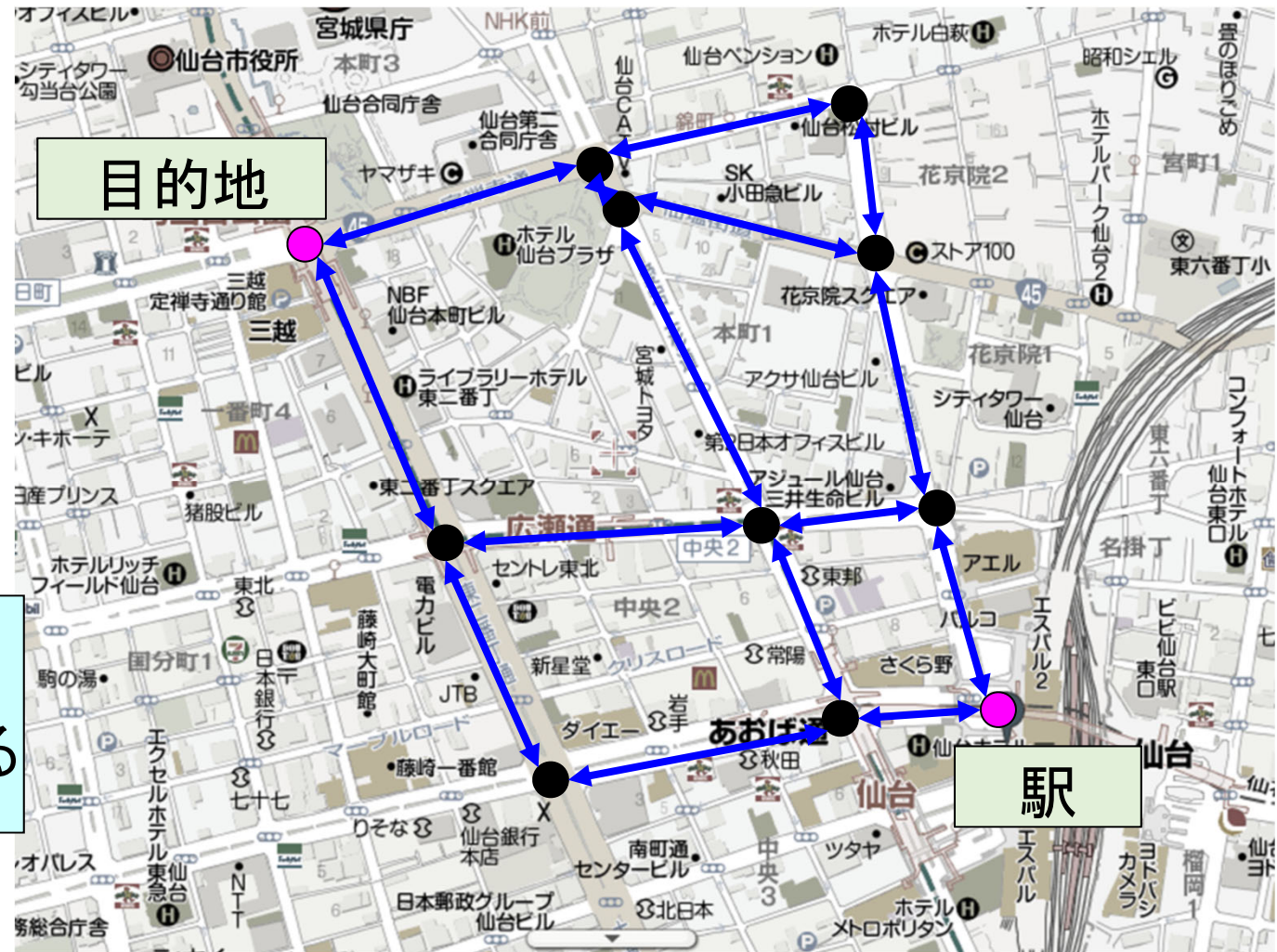
レポートに関する注意事項

- レポート提出は義務ではなく、**任意**.
- 問題の解答が**不完全でも良い**ので、なるべく提出すること
- **他人のレポートとほぼ同一、または他の文献の丸写し(剽窃)はペナルティを科す**
 - 他の学生と相談することは可. ただし、レポートは自分のことばで書く
 - 本などを参考にした場合は参考文献情報を書く
- レポートの提出方法
 - OCW-iを使って提出. pdf形式推奨, できない場合はjpeg形式
 - 手書きレポートの場合
 - 推奨: スキャナでスキャン. できない場合は写真に撮って提出
 - PCで作成したレポートの場合
 - pdf形式に変換して提出.

最も短い経路を求める

駅から
勾当台までの
最短経路を
求めたい
→グラフを使って
モデル化

各頂点の間に距離
(移動時間)を与える



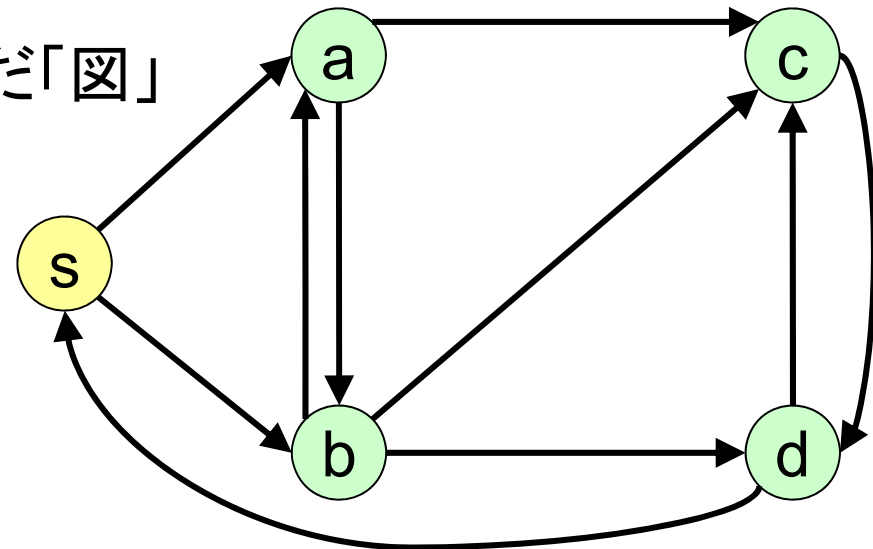
グラフ

最短路問題を数学的に表現するために使う

- 定義: **グラフ** = 「丸」を「線」で結んだ「図」
 - **頂点** = 「丸」, **枝** = 「線」

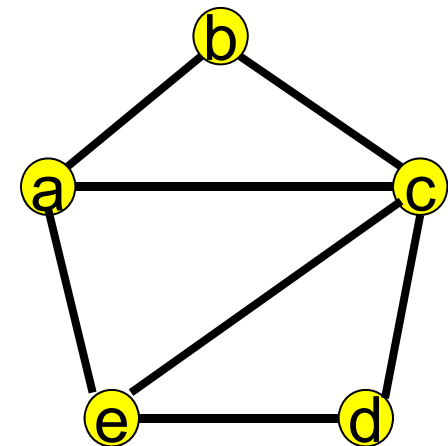
グラフの例

- 友人関係の図
- 鉄道路線図, 道路網
- 組織図, 家系図



有向グラフ: 枝に向きの付いたグラフ

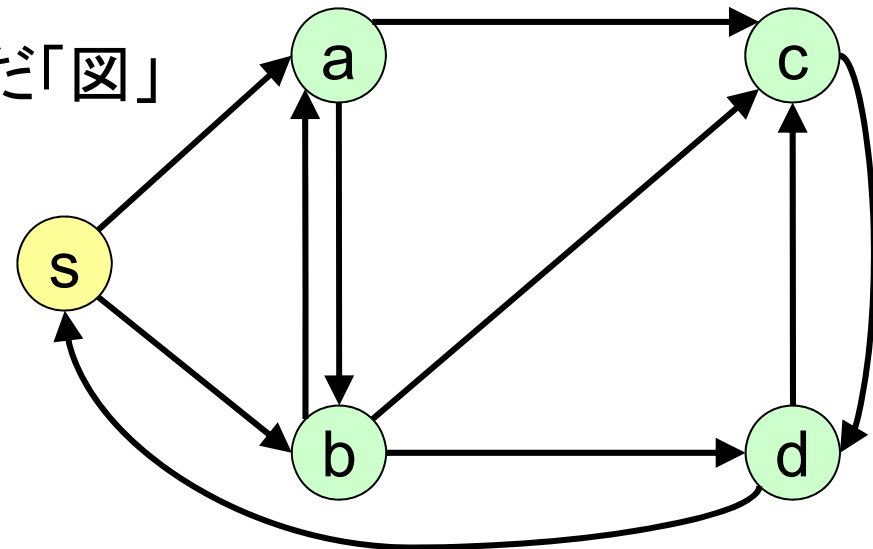
無向グラフ: 枝の向きの付いていないグラフ



グラフ

最短路問題を数学的に表現するために使う

- 定義: **グラフ** = 「丸」を「線」で結んだ「図」
 - **頂点** = 「丸」, **枝** = 「線」



※数学的には, グラフ $G = (V, E)$ は
全頂点の集合 V と全枝の集合 E の対として表現
各枝 $(u, v) \in E$ は頂点の (順序) 対として表現

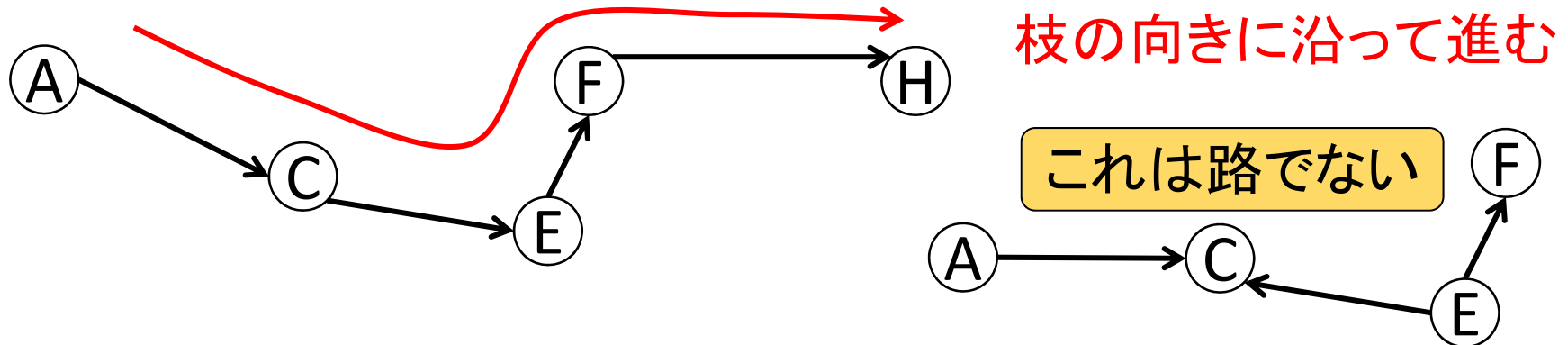
上記のグラフの場合,

すべての頂点の集合 $V = \{s, a, b, c, d\}$

すべての枝の集合 $E = \{(s, a), (a, b), (b, a), (b, d), \dots\}$

路と閉路

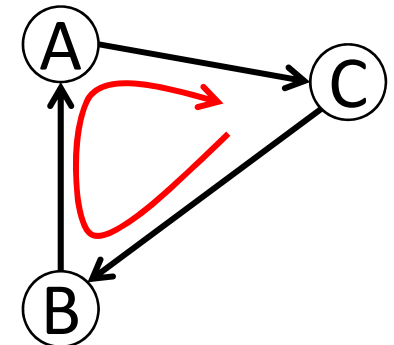
- 路(みち)(path, パス) = 複数の枝が1つにつながったもの



厳密な定義: 枝の列 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$
 ただし $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \dots, v_{k-1} = u_k$

- 閉路(cycle, サイクル) = 複数の枝が1つの輪になったもの

厳密な定義: 枝の列 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$
 ただし $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \dots, v_{k-1} = u_k$
 $v_k = u_1$



単一始点単一終点 最短路問題

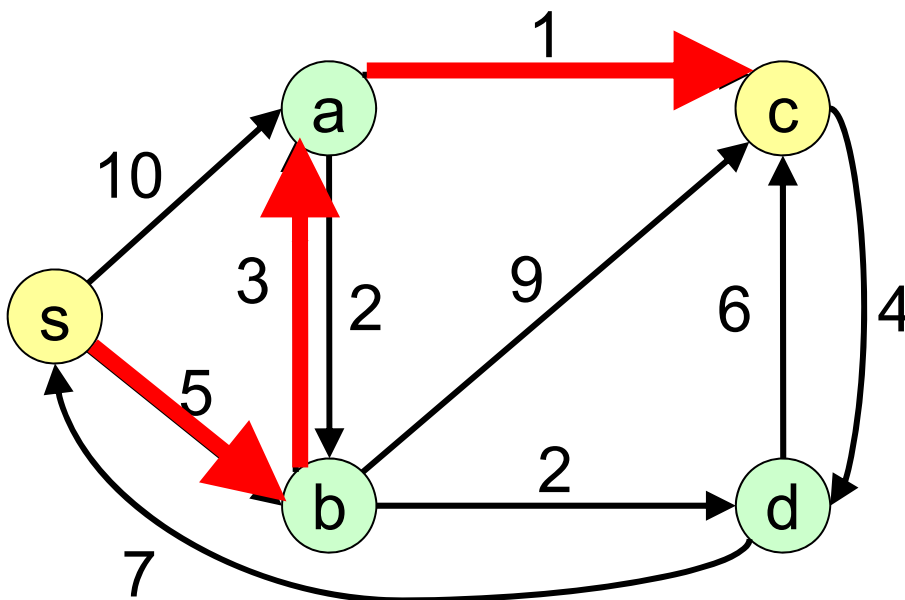
- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$

各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$, 終点 $t \in V$

- 出力: s から t への最短路 $P(t)$ とその長さ $d(t)$

(s から t への最短路 P^*

= s から t への路のうち, 枝の長さの和 $\ell(P^*)$ が最小のもの)



後述するように,
特定の頂点への最短路を
求めるためには,
全ての頂点への最短路を
求めると効率的
→ 単一始点全終点
最短路問題

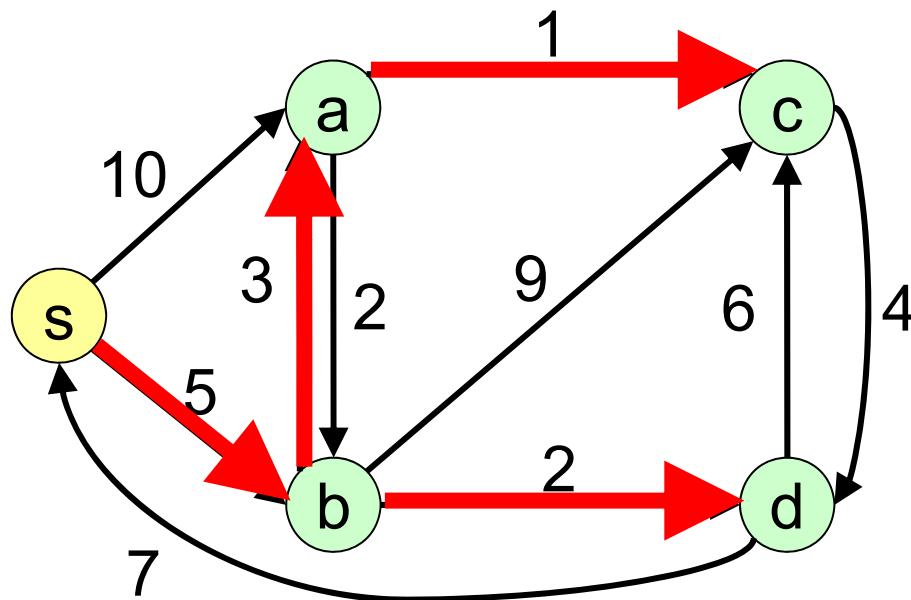
単一始点全終点 最短路問題

- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$

各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$

- 出力: s から **すべての頂点 v への最短路 $P(v)$ とその長さ $d(v)$**

枝の長さが
負の場合も扱う



以降で使う仮定:

s から各頂点 v への路が存在
(存在しない場合は
枝 (s,v) を追加, その長さを
十分大きい正数とする)

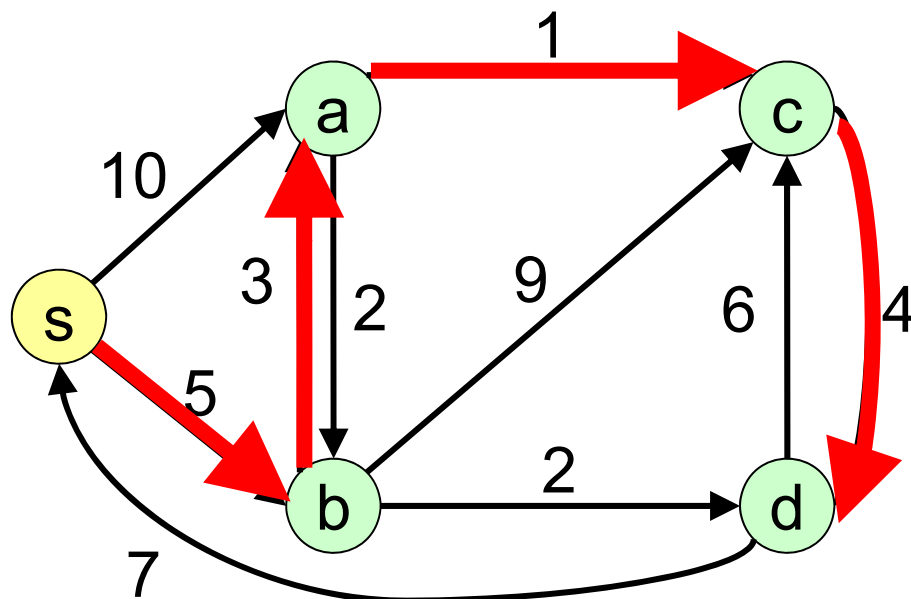
注意: 路は, 同じ頂点,
同じ枝を**何回通っても可**

似ているが非なる問題：最短巡回路問題

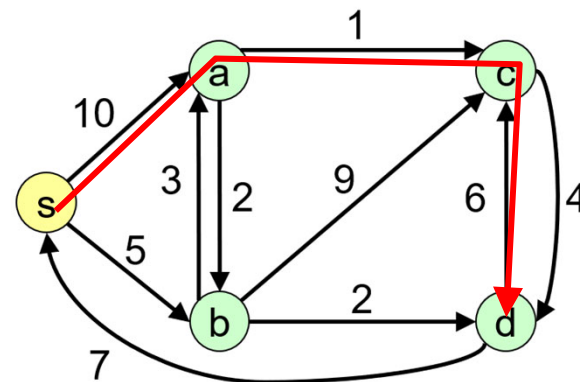
- 入力：有向グラフ $G=(V, E)$

各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$, 終点 $t \in V$

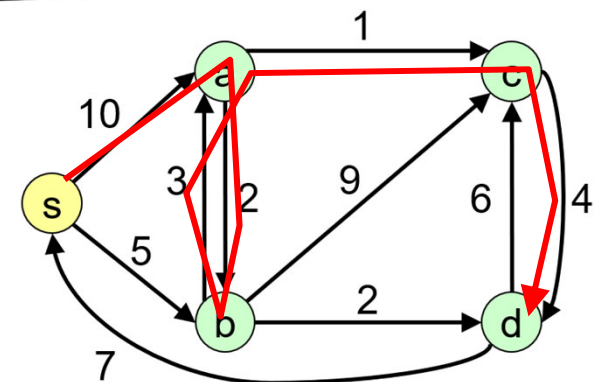
- 出力： s から **すべての頂点をちょうど1回ずつ経由して**, t に到達する最短の路とその長さ



$t = d$ の場合

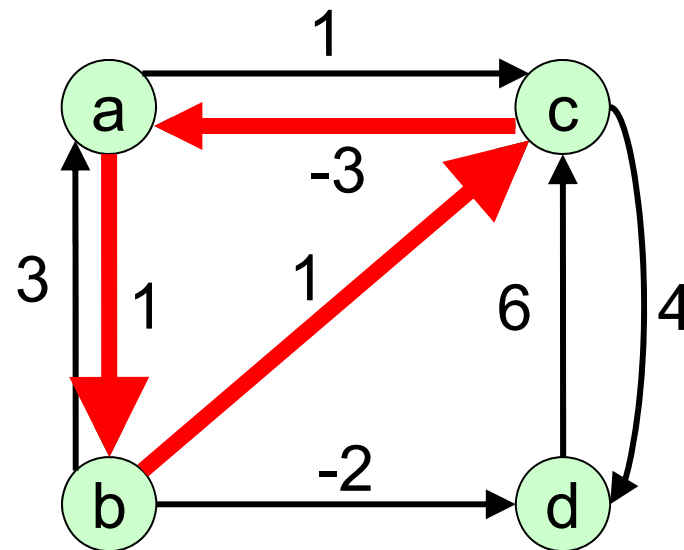


aを2回
通過
なので×



関連する問題: グラフの負閉路の検出

- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$
各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$)
- 出力: グラフに負閉路が「存在する」または「存在しない」の答え
存在するときは, 負閉路を求める
(**負閉路** = 閉路のうち, 枝の長さの和が負のもの)



応用：通貨両替の問題（鞘取，さやとり）

- 手持ちのお金をうまく両替して，儲けることは可能か？

入力：各国の通貨（JPY, EUR, USD, GBPなど）

通貨の両替レート（1USD=120JPYなど）

出力：手持ちのお金を増やす両替方法は存在するか？

from\to	100JPY	EUR	USD	GBP
100JPY	1	0.76	0.82	0.55
EUR	1.3	1	1.1	0.70
USD	1.2	0.9	1	0.65
GBP	1.8	1.4	1.5	1

100 JPY
 →0.76 EUR
 →0.76x1.1 USD
 →0.76x1.1x1.2
 =100.32 JPY

応用：通貨両替の問題（続き）

グラフを使って表現

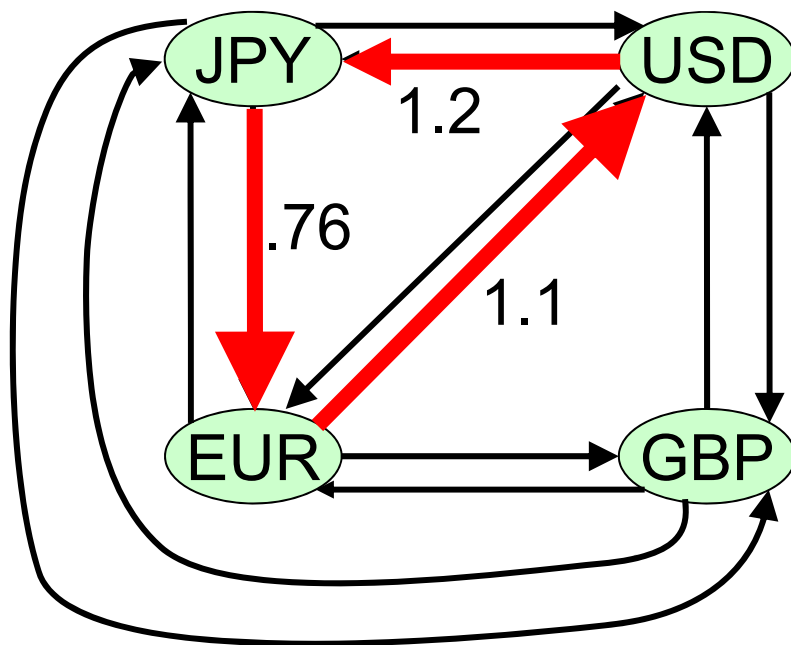
通貨Xから通貨Yへの両替 $\leftrightarrow$ 枝(X,Y)

両替レート = 枝(X,Y)の重み

→元の通貨に戻る両替の組合せ $\leftrightarrow$ 閉路

金額の変化率 = 閉路に含まれる枝の重みの積

この値 $>1 \leftrightarrow$ 金額増加



100 JPY
 $\rightarrow 0.76$ EUR
 $\rightarrow 0.76 \times 1.1$ USD
 $\rightarrow 0.76 \times 1.1 \times 1.2$
 $= 100.32$ JPY

閉路の重みを長さに変換して,
 「重みの積 $>1 \leftrightarrow$ 長さの和が負」が
 成り立つようにする
 (ヒント: $\log ab$
 $= \log a + \log b$)

関連する問題: 差分不等式系

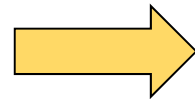
- 入力: n 個の変数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ からなる, 次の形の不等式系

$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

- 出力: 不等式系に解が「ある」または「ない」の答え
存在するときは, 解を求める

具体例

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, & p_3 - p_1 &\leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, & p_4 - p_2 &\leq 5, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, & p_3 - p_4 &\leq 6, \\ p_1 &= 0, & p_4 &\leq 5 \end{aligned}$$



解あり

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0, 1, 1, 5)$$

応用：プロジェクトスケジューリング(PERT)

- 幾つかの作業からなるプロジェクト(例：自動車製造)
- 各作業の開始時間をどのように設定すべきか？

具体例：7つの作業a,b,...,g(グラフの枝に対応)

5つの「イベント」1,2,3,4,5(グラフの頂点に対応)

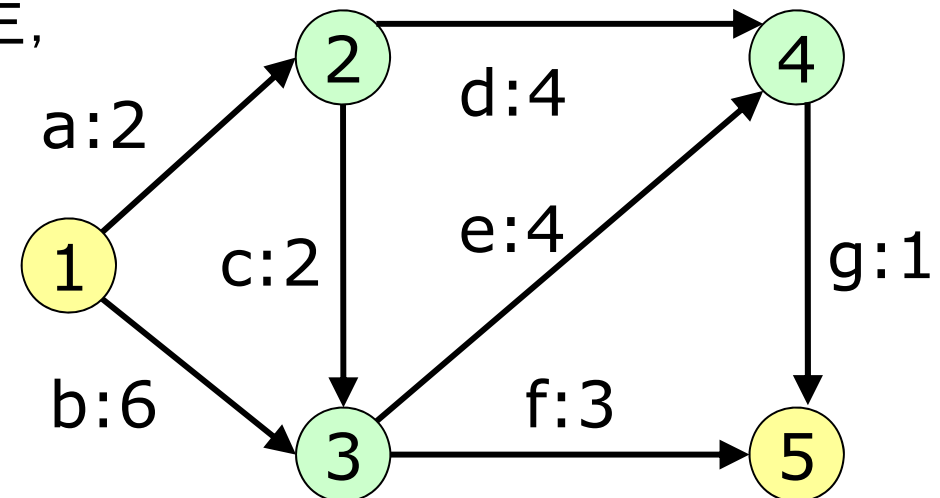
- イベント1から開始, イベント5で終了
- 作業aは2時間が必要, 作業bは6時間, ...
- 作業aが終わるとイベント2が発生,

作業c,dの開始可能

作業b, cの両方が終わると

イベント3が発生,

作業e,fの開始可能



注意
このグラフには
閉路が存在
しない

プロジェクトスケジューリング(つづき)

実現可能なスケジュールを立てたい

→ 各イベント v の発生時間を $t(v)$ (変数) とおき,
差分不等式で表現

例: イベント1はプロジェクト開始 0時間後に発生 → $t(1)=0$

イベント2はイベント1が発生してから少なくとも2時間後に発生

$$\rightarrow t(2) - t(1) \geq 2$$

イベント4はイベント2が発生してから少なくとも4時間後に発生

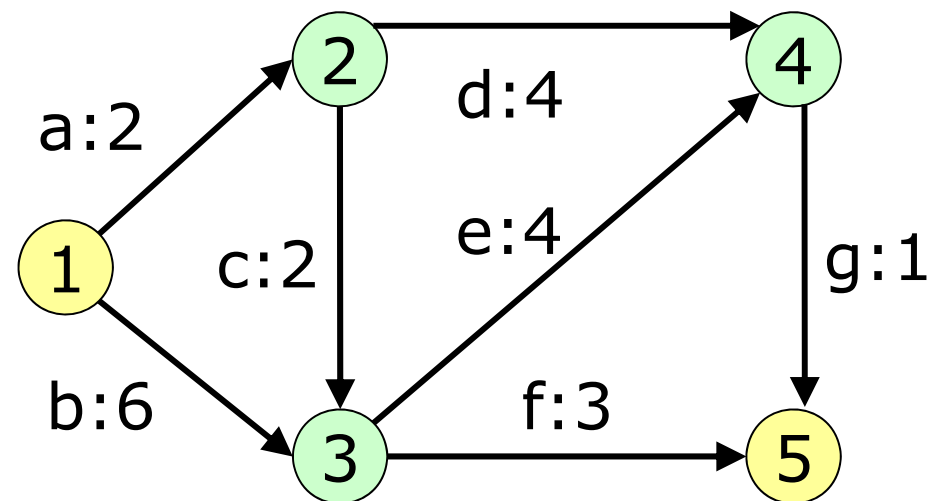
$$\rightarrow t(4) - t(2) \geq 4$$

同様にして,

$$t(3) - t(1) \geq 6, t(3) - t(2) \geq 2,$$

$$t(4) - t(3) \geq 4, t(5) - t(3) \geq 3,$$

$$t(5) - t(4) \geq 1$$



プロジェクトスケジューリング(つづき)

全ての作業を最も早く終わるには, 各作業をいつ開始すればよいか?

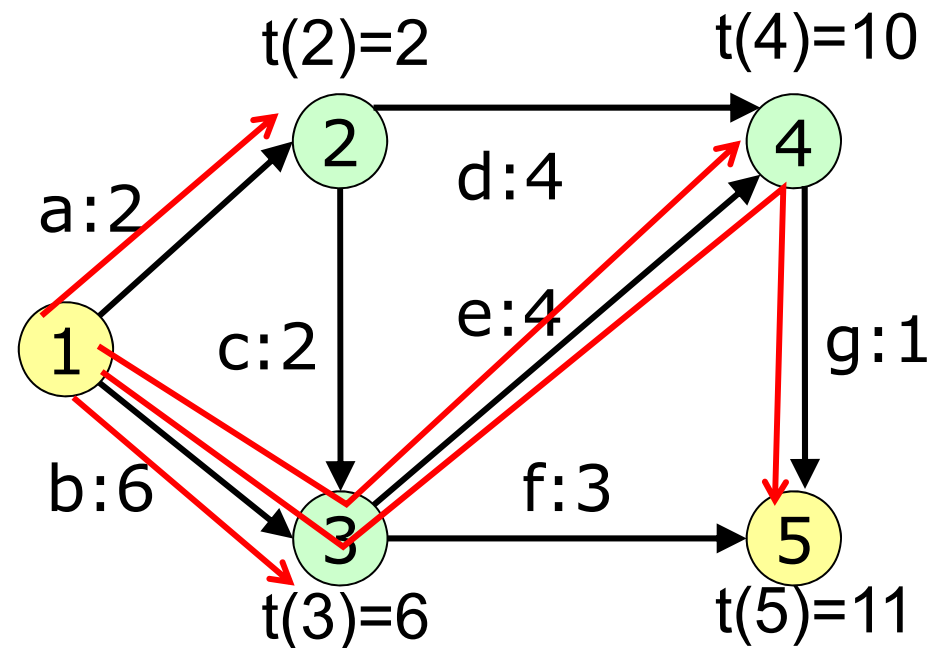
→ 各作業の所要時間を枝長と見なして,
開始イベント1から各イベント v への最長路を計算,
その長さを $t(v)$ とおく.

各頂点への最長路の計算方法:

元のグラフの最長路

= 枝長の負号を反転したときの
最短路

という事実(+ α)を使えば可能



最短路の計算

ベルマン・フォードのアルゴリズム

(R. Bellman(1958), L. Ford, Jr.(1956))

- 始点 s から各頂点 v への
最短路長 $d(v)$ (および最短路 $P(v)$) を求める, または
- 負閉路が存在することを検出する

アルゴリズムのアイディア: 各反復で, 次の値を計算

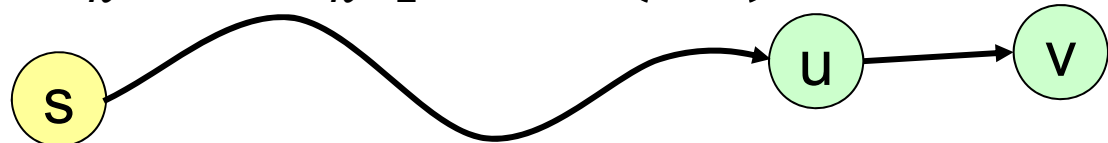
$d_k(v) = s$ から v への, 枝数が k 以下の路の長さの最小値

このような路を場合分け:

(1) 枝数 $\leq k-1 \rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(v)$

(2) 枝数 $= k \rightarrow$ ひとつ手前の頂点を u とおくと,

$$d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u, v)$$



$\therefore$ 次の再帰式が成立

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$$

ベルマン・フォードのアルゴリズム

再帰式に基づき, $d_k(v)$ を計算するアルゴリズム

$n = |V|$ (=頂点の総数)とおく

手順0: $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty (\forall v \neq s)$ とおく. $k=1$ とする.

手順1: 各頂点 v に対し, 以下の式で $d_k(v)$ を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$$

手順2: $k < n$ ならば $k := k+1$ において手順1へ戻る.

$k = n$ ならば手順3へ.

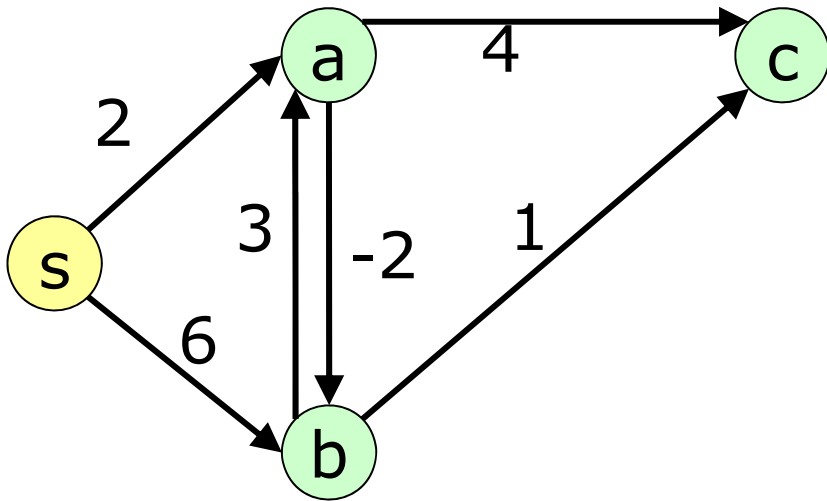
手順3: ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立 $\rightarrow$ 「負閉路存在」

全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立

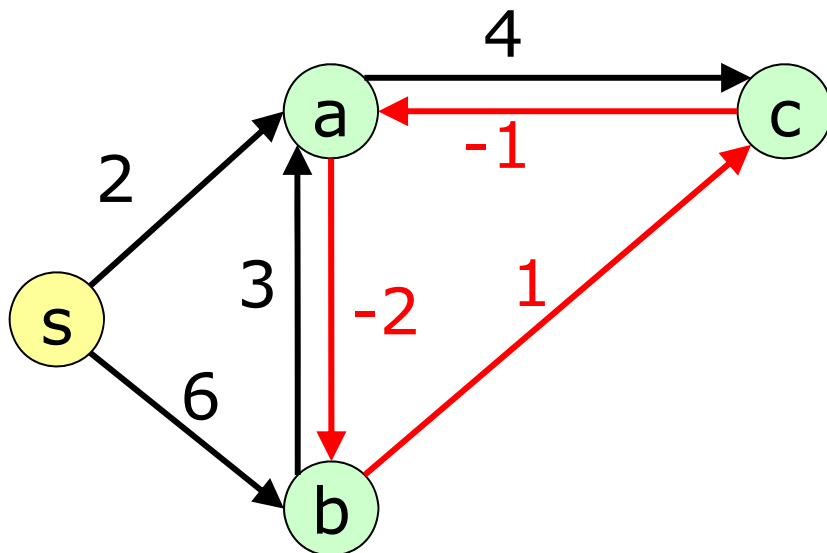
$\rightarrow$ 最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

最短路長だけでなく, 最短路を計算することも
(若干の修正により) 可能

実行例



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	2
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	0
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1

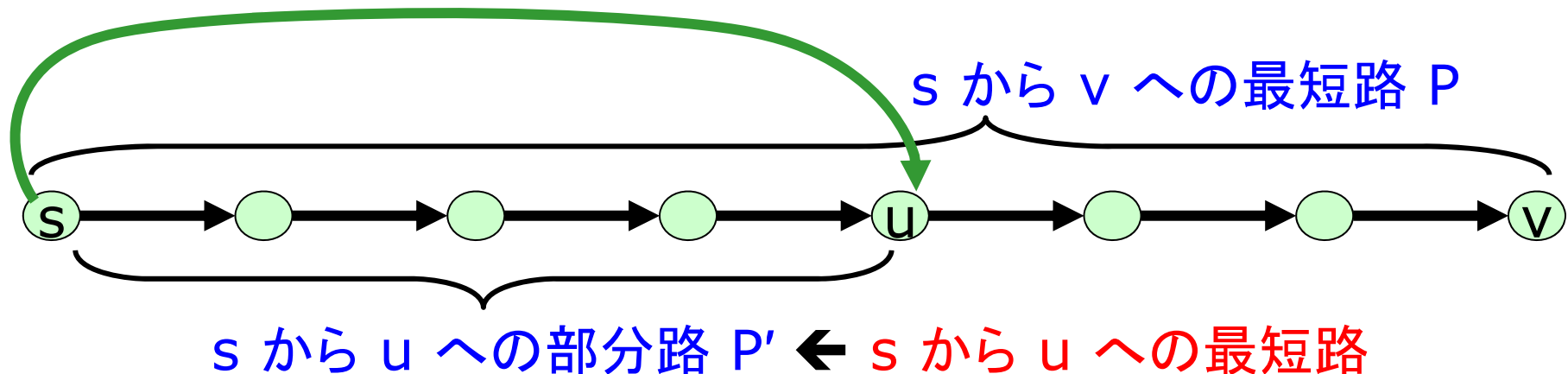
最短路の性質

最短路の部分路は最短路

命題 P : 頂点 s から頂点 v への最短路

P は途中に頂点 u を含むと仮定

→ s から u への P の部分路 P' は, s から u への最短路



(証明) もし P' より短い路 P'' が存在したら

→ s から v への路として, まず P'' に沿って s から u に行き,
その後 P と同じ枝をたどって v に行く路 Q を考える.

Q の長さ - P の長さ = P'' の長さ - P' の長さ < 0

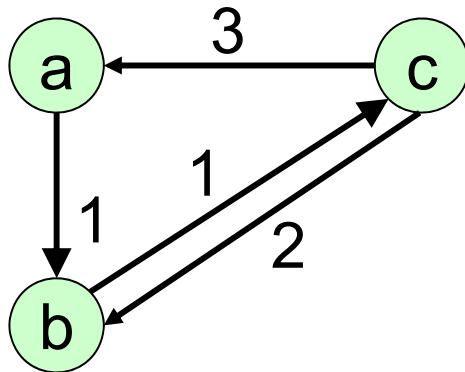
よって, P の選び方に矛盾.

ポテンシャル

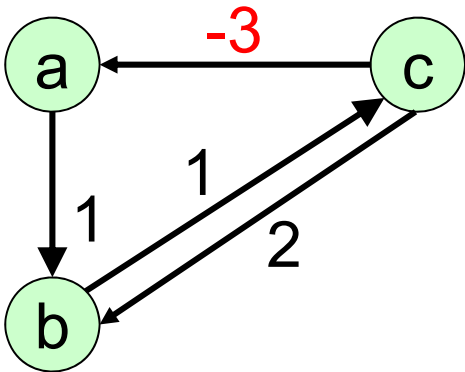
最短路問題に
おける
便利な道具

定義: 実数 $p(v) (v \in V)$ はポテンシャル

↔ 各枝 (u, v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル



※ポテンシャルは存在しないこともある
左のグラフにおいて,

$$p(a) - p(c) \leq -3, p(c) - p(b) \leq 2,$$

$$p(b) - p(a) \leq 1$$

は解をもたない

最短路と負閉路とポテンシャル

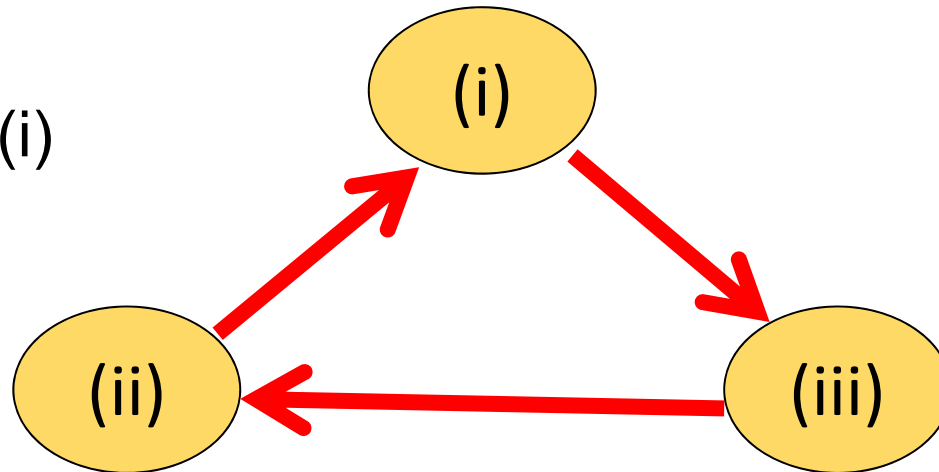
与えられたグラフにおける最短路, 負閉路, ポテンシャルの存在に関して, 以下の関係が成り立つ,

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

- (i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
- (ii) 負閉路が存在しない
- (iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ:

(iii) $\rightarrow$ (ii), (i) $\rightarrow$ (iii), (ii) $\rightarrow$ (i)
を順番に証明



ポテンシャル存在 $\Rightarrow$ 負閉路が非存在

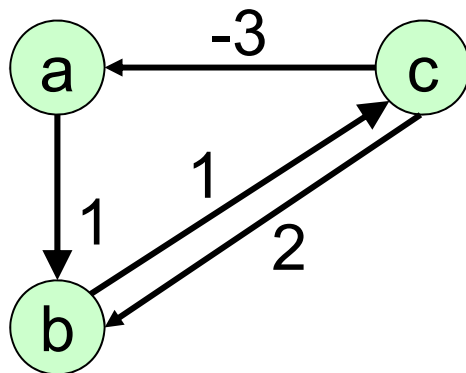
定義: 実数 $p(v) (v \in V)$ はポテンシャル

$\Leftarrow \Rightarrow$ 各枝 (u, v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす

命題 ポテンシャルが存在 $\Rightarrow$ 負閉路は存在しない
(対偶: 負閉路が存在 $\Rightarrow$ ポテンシャルは存在しない)

(証明) 任意の閉路 C の長さが非負であることを示せば良い.
不等式 $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v) ((u, v) \in C)$ を辺々足す

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \sum_{(u,v) \in C} [p(v) - p(u)] \\ &\leq \sum_{(u,v) \in C} \ell(u, v) = \text{閉路の長さ} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



左のグラフにおいて,

$$p(a) - p(c) \leq -3, p(c) - p(b) \leq 2,$$

$$p(b) - p(a) \leq 1$$

は解をもたない

最短路と負閉路とポテンシャル

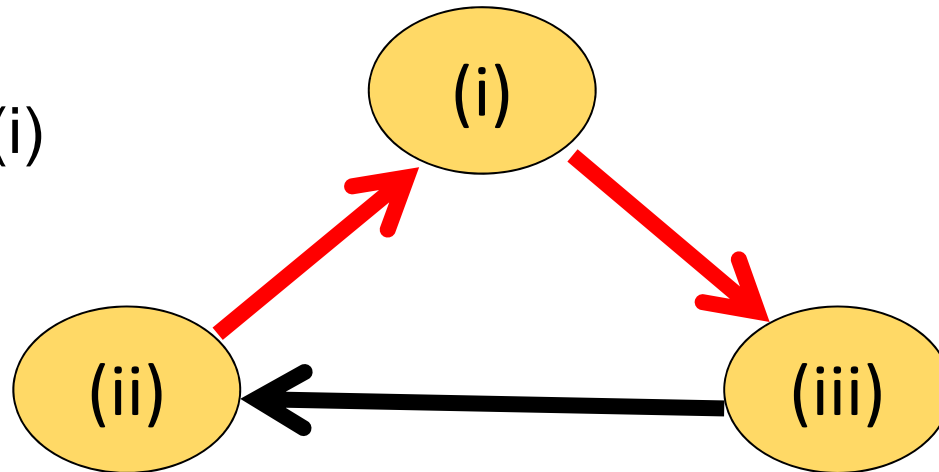
与えられたグラフにおける最短路, 負閉路, ポテンシャルの存在に関して, 以下の関係が成り立つ,

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

- (i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
- (ii) 負閉路が存在しない
- (iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ:

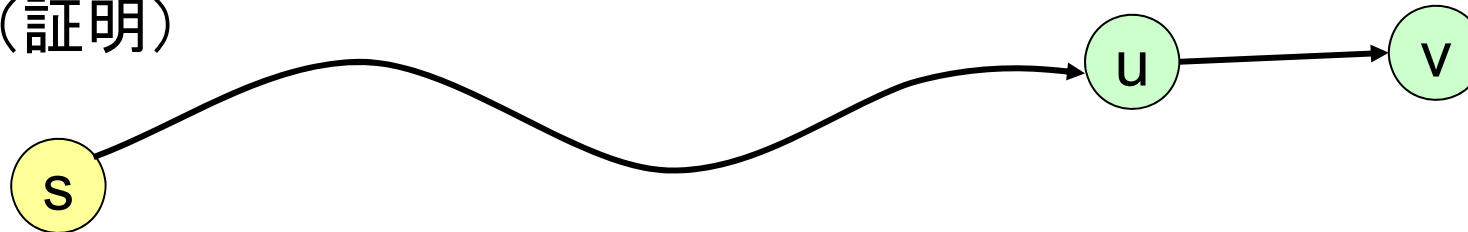
(iii) $\rightarrow$ (ii), (i) $\rightarrow$ (iii), (ii) $\rightarrow$ (i)
を順番に証明



最短路存在 $\Rightarrow$ ポテンシャル存在

命題 頂点 s から各頂点への最短路が存在すると仮定.
このとき, ポテンシャルが存在する.
とくに, 頂点 v への最短路長を $d(v)$ とすると,
 $p(v)=d(v)$ はポテンシャル

(証明)



P : 頂点 s から u への最短路 $\rightarrow d(u) = P$ の長さ
 $\rightarrow \tilde{P} = P \cup \{(u, v)\}$ は s から v への路,
その長さ $= d(u) + \ell(u, v)$
 $\geq v$ への最短路長 $= d(v)$ ■

最短路と負閉路とポテンシャル

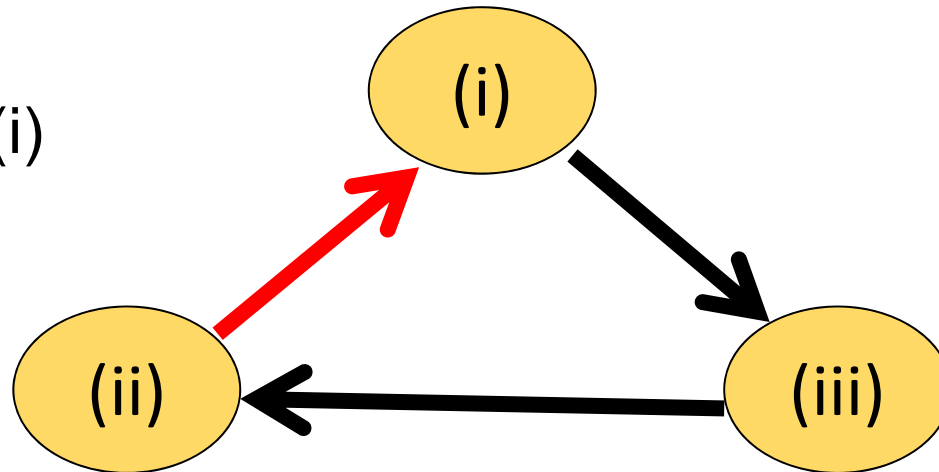
与えられたグラフにおける最短路, 負閉路, ポテンシャルの存在に関して, 以下の関係が成り立つ,

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

- (i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
- (ii) 負閉路が存在しない
- (iii) ポテンシャルが存在

これからの流れ:

(iii) $\rightarrow$ (ii), (i) $\rightarrow$ (iii), (ii) $\rightarrow$ (i)
を順番に証明



負閉路が不存在→最短路が存在

定理: 有向グラフに負閉路が存在しない

→ 始点から各頂点 v へ, 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

(証明) 以下では $n = |V|$ とおく.

P^* : s から v への, 枝数 $n-1$ 以下の路の中で最短 (←必ず存在)

次の命題を示せば良い.

(A) s から v への, 枝数が n 以上の任意の路 P に対し $\ell(P^*) \leq \ell(P)$

命題(A)を示すには, 次の(B)を示せば良い(なぜか?)

(B) s から v への, 枝数が n 以上の任意の路 P に対し,
枝数が P より少ない, v への路 P' が存在して, $\ell(P') \leq \ell(P)$

負閉路が不存在 $\rightarrow$ 最短路が存在(つづき)

定理: 有向グラフに負閉路が存在しない

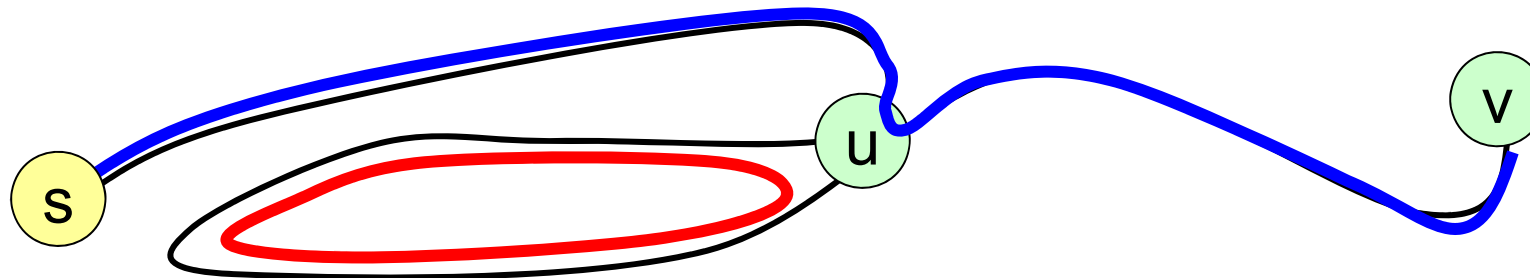
$\rightarrow$ 始点から各頂点 v へ, 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

(証明のつづき) 次の(B)を示す:

(B) s から v への, 枝数が $|V|$ 以上の任意の路 P に対し,
枝数が P より少ない v への路 P' が存在して, $\ell(P') \leq \ell(P)$

s から v への路 P , 枝数 $\geq n$

$\rightarrow$ ある頂点が必ず2回現れる(u とする)



u から u への部分路は閉路 $\rightarrow$ 長さ是非負

$\rightarrow$ 削除すると, 枝数が少なく, 長さが $\ell(P)$ 以下の路 P' を得る ■

ポテンシャルと負閉路と最短路

- これまで示した定理, 命題より, 次の定理が得られる

定理: 次の (i), (ii), (iii) は等価

- (i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
- (ii) 負閉路が存在しない
- (iii) ポテンシャルが存在

(i) $\leftrightarrow$ (ii), (iii) $\rightarrow$ (ii) は直接的な証明を与えた.

(ii) $\rightarrow$ (iii) の証明は, (i) を経由して証明した(直前のスライド)

※演習問題では (iii) $\rightarrow$ (i) の直接的な証明について考える

最短路の計算: 正当性

ベルマン・フォードのアルゴリズム

$n = |V|$ とおく

手順0: $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty (\forall v \neq s)$ とおく. $k=1$ とする.

- s から枝数0でたどり着けるのは s のみなので

手順1: 各頂点 v に対し, 以下の式で $d_k(v)$ を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$$

手順2: $k < n$ ならば $k := k+1$ とおいて手順1へ戻る.

$k=n$ ならば手順3へ.

手順3: ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立 $\rightarrow$ 「負閉路存在」

全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立

$\rightarrow$ 最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

出力結果が
正しいことを証明

出力結果が
正しいことを証明

アルゴリズムの正当性(その1)

再帰式 $d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$

命題: 負閉路が存在する $\rightarrow$ 負閉路に含まれるある頂点 v に
 対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立

(証明) 閉路 C に含まれる枝を $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_k, v_1)$ とおく.

C は負閉路なので, $\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \dots + \ell(v_k, v_1) < 0$.

再帰式より $d_n(v_{j+1}) \leq d_{n-1}(v_j) + \ell(v_j, v_{j+1}) \quad (\forall j = 1, 2, \dots, k)$

(ただし, $v_{k+1} = v_1$ とする)

不等式を辺々足すと,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k d_n(v_j) &= \sum_{j=1}^k d_n(v_{j+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^k d_{n-1}(v_j) + \sum_{j=1}^k \ell(v_j, v_{j+1}) < \sum_{j=1}^k d_{n-1}(v_j) \end{aligned}$$

$\therefore$ ある v_j に対して $d_n(v_j) < d_{n-1}(v_j)$ が成立 ■

アルゴリズムの正当性(その2)

命題: 負閉路が存在しない $\rightarrow$ 任意の頂点 v に対して
 $d_{n-1}(v)$ は頂点 v への最短路長に等しく, $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ 成立

(証明) 各頂点 v への, 枝数 $\leq n-1$ の最短路が存在(定理より)

$\rightarrow d_{n-1}(v)$ は頂点 v への最短路長に等しい

さらに, 全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立 ■

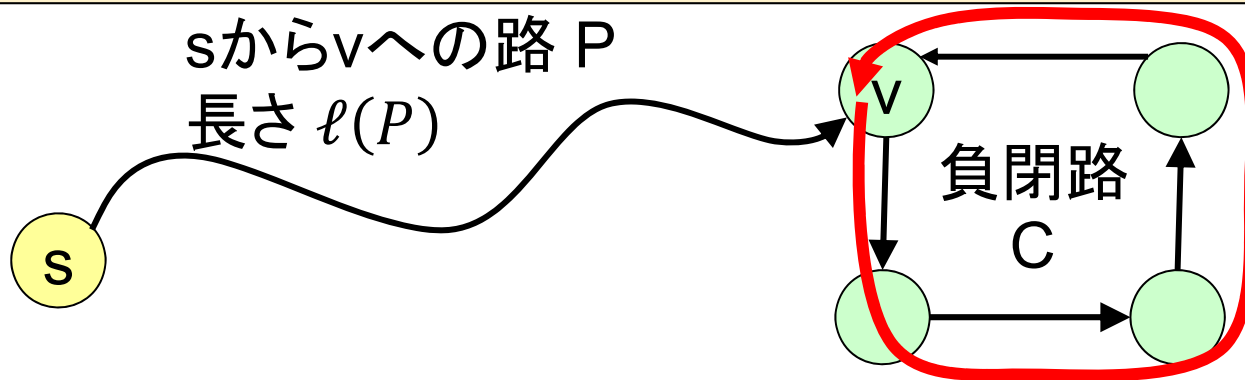
定理: 有向グラフに負閉路が存在しない

$\rightarrow$ 始点から各頂点へ, 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

[参考] 負閉路が存在 $\rightarrow$ 最短路が存在しない

- 負閉路が存在 $\rightarrow$ ある頂点への最短路は存在しない
- [対偶] 全ての頂点への最短路が存在 $\rightarrow$ 負閉路は存在しない

命題 グラフに負閉路 C が存在 (長さ $\ell(C) < 0$)
 $\rightarrow$ C に含まれる各頂点 v に対し,
 $\inf\{s \text{ から } v \text{ への路の長さ}\} = -\infty$ (最短路が存在しない)



(証明) s から v への路として, 次のようなものを考える:

路 P を使って s から v に行く $\rightarrow$ 負閉路を k 回通って v に戻る
 これも s から v への路, 長さ $\ell(P) + \ell(C) \times k$
 k を任意に大きくする $\rightarrow$ 路の長さが任意に小さくなる