

経営経済数学

凸関数

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

凸関数, 凹関数

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ とする

定義: 関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ は**凸関数** $\iff S$ は凸集合, かつ以下の条件:

$$\forall x, y \in S, 0 \leq \alpha \leq 1, \\ f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

定義: 関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ は**凹関数** $\iff -f$ は凸関数

$\iff S$ は凸集合, かつ以下の条件:

$$\forall x, y \in S, 0 \leq \alpha \leq 1, \\ f((1 - \alpha)x + \alpha y) \geq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

※凸関数, 凹関数は連続関数とは限らない

凸関数, 凹関数の具体例

- 速度 v , 質量 m の物体の運動エネルギー $= (1/2)mv^2$
 v に関する凸関数
- 抵抗 R の導体に x アンペアの電流を流したときの電力 $= R x^2$
 x に関する凸関数
- 半径 r の球の表面積 $= 4\pi r^2$, 体積 $= (4/3)\pi r^3$
 r に関する凸関数
- ミクロ経済学における効用関数
「もの」を沢山もらうと, 1単位当たりの「満足度」が減っていく
 $\Leftarrow \rightarrow$ 傾きが減っていく $\Leftarrow \rightarrow$ 凹関数

などなど, 多数存在

凸関数の演算

命題: 凸関数 $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$, 実数 $\alpha, \beta > 0$ に対し,

(i) 関数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ は凸関数

(ii) 関数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ は凸関数

(証明) (i) は定義より簡単に示せる.

(ii): $x, y \in S, \alpha \in [0, 1]$ とする.

一般性を失うことなく $h((1 - \alpha)x + \alpha y) = f((1 - \alpha)x + \alpha y)$ と仮定.

$$\begin{aligned} h((1 - \alpha)x + \alpha y) &= f((1 - \alpha)x + \alpha y) \\ &\leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad (\text{f の凸性}) \\ &\leq (1 - \alpha)h(x) + \alpha h(y) \quad (\text{h の定義}) \end{aligned}$$

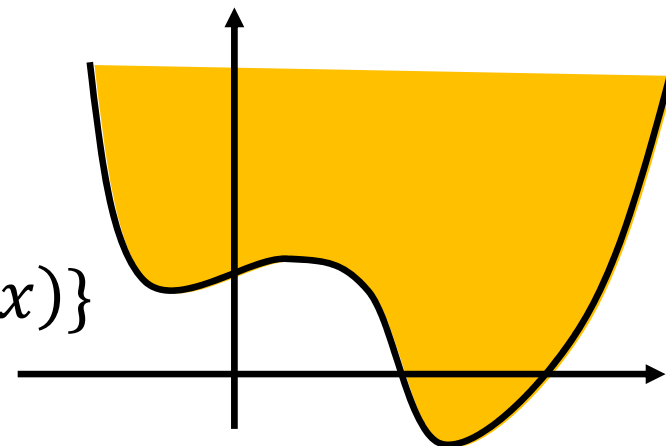
※ (i) より, 有限個の凸関数の和は凸関数

(ii)より, 有限個の線形関数の最大値は凸関数

関数のエピグラフ

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された
関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ の**エピグラフ**

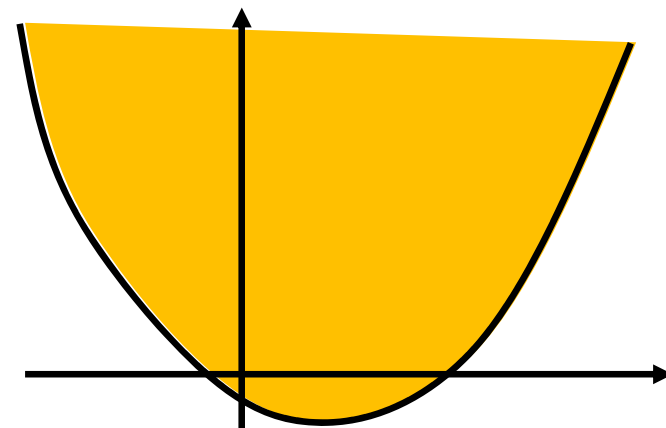
$\text{epi } f = \text{集合 } \{(x, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \beta \geq f(x)\}$



定理: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ の
エピグラフは凸集合 $\iff S$ は凸集合かつ f は凸関数

「 $\rightarrow$ 」は定理11.3, 「 $\leftarrow$ 」は定理11.2
どちらも証明は比較的かんたん

※ エピグラフは閉集合とは限らない



関数のエピグラフと凸性の関係

エピグラフ $\text{epi} f = \{(x, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \beta \geq f(x)\}$ が凸集合

$\longleftrightarrow$ 任意の $(x, \beta), (y, \gamma) \in \text{epi} f$ および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす

任意の α に対し, $(1 - \alpha)(x, \beta) + \alpha(y, \gamma) \in \text{epi} f$

$\longleftrightarrow$

$x, y \in S, \beta \geq f(x), \gamma \geq f(y)$ を満たす任意の $(x, \beta), (y, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+1}$
 および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす任意の α に対し,

$(1 - \alpha)x + \alpha y \in S, \quad (1 - \alpha)\beta + \alpha\gamma \geq f((1 - \alpha)x + \alpha y)$

エピグラフが凸 $\Rightarrow S, f$ が凸 の証明

(エピグラフは凸集合 $\Rightarrow S$ は凸集合かつ f は凸関数 の証明)

任意の $x, y \in S$ および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす

任意の α に対し, $(1 - \alpha)x + \alpha y \in S$ かつ

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

を示せば良い.

これは, $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi} f$ に対して

前のスライドの事実を使えば直ちに得られる ■

エピグラフが凸 $\leftarrow S, f$ が凸 の証明

(エピグラフは凸集合 $\leftarrow S$ は凸集合かつ f は凸関数 の証明)

$x, y \in S, \beta \geq f(x), \gamma \geq f(y)$ を満たす任意の $(x, \beta), (y, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+1}$
 および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす任意の α に対し,

$$(1 - \alpha)x + \alpha y \in S, \quad (1 - \alpha)\beta + \alpha\gamma \geq f((1 - \alpha)x + \alpha y)$$

を示せば良い.

S は凸集合なので, $(1 - \alpha)x + \alpha y \in S$ 成立.

f は凸関数なので,

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \leq (1 - \alpha)\beta + \alpha\gamma$$



関数の最小化

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ の最小化問題

定義: $x^* \in S$ は最小化問題の**大域的最適解**

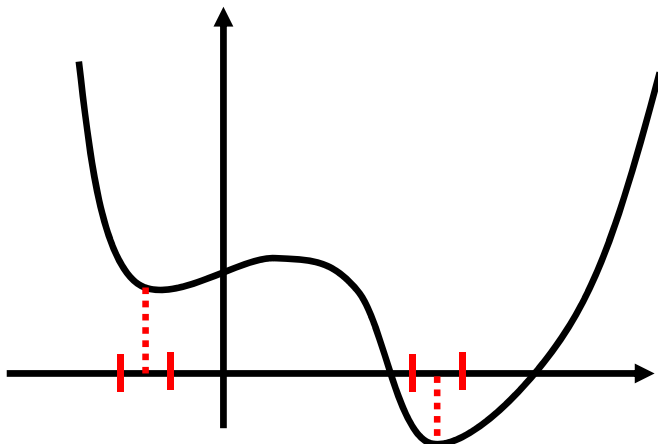
$\iff x^*$ は関数 f の S における最小解

$\iff \forall x \in S, \quad f(x) \geq f(x^*)$

S 全体の中で最適

定義: $x^* \in S$ は最小化問題の**局所的最適解 (極小解)**

$\iff \exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon), \quad f(x) \geq f(x^*)$



x^* の近傍の中で最適

凸関数の最小化

定理11.5: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸集合, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ が凸関数の場合,
局所的最適解 $\rightarrow$ 大域的最適解

(証明) 背理法を使わない証明

$x^* \in S$ は局所的最適解と仮定

$\rightarrow$ 定義より, $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon), f(x) \geq f(x^*)$

f は凸関数 $\rightarrow \forall x \in S, \forall \alpha \in (0, 1),$

$$f((1 - \alpha)x^* + \alpha x) \leq (1 - \alpha)f(x^*) + \alpha f(x)$$

$$\therefore \alpha \{f(x) - f((1 - \alpha)x^* + \alpha x)\} \geq (1 - \alpha) \{f((1 - \alpha)x^* + \alpha x) - f(x^*)\}$$

α が十分0に近いとき, $(1 - \alpha)x^* + \alpha x \in B(x^*, \varepsilon)$

$$\therefore f((1 - \alpha)x^* + \alpha x) - f(x^*) \geq 0$$

$$\therefore f(x) \geq f((1 - \alpha)x^* + \alpha x) \geq f(x^*) \quad \blacksquare$$