

7月31日演習問題

問1: 任意の集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し, S を含む (包含関係に関して) 最小のアフィン空間 S^* が存在することを証明せよ.

問2: 次の条件 $(*)$ を満たす集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ を考える:

$$(*) \quad \forall x, y \in S, (1/2)(x + y) \in S$$

- (1) このような集合のうち, 凸集合でないものの例を1つ挙げよ.
- (2) S が閉集合のとき, 条件 $(*)$ を満たす集合は必ず凸集合になる. このことを証明せよ.

(ヒント: S の任意の収束点列の極限は S に含まれる)

問3: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸錐ならば, $a^1, \dots, a^m \in S$ の錐結合は S に含まれることを証明せよ.

問4: $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$ の凸結合全体は凸集合である. このことを証明せよ.