経営経済数学

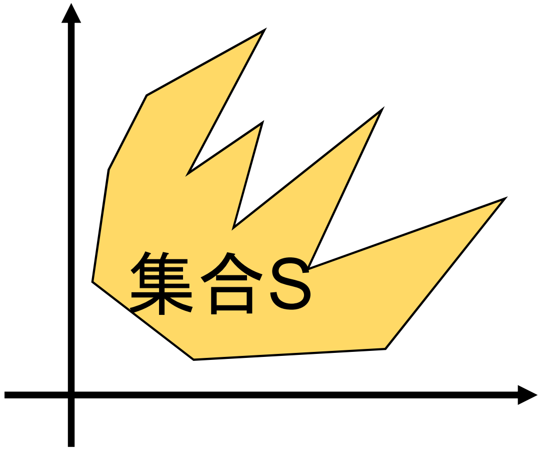
凸集合

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

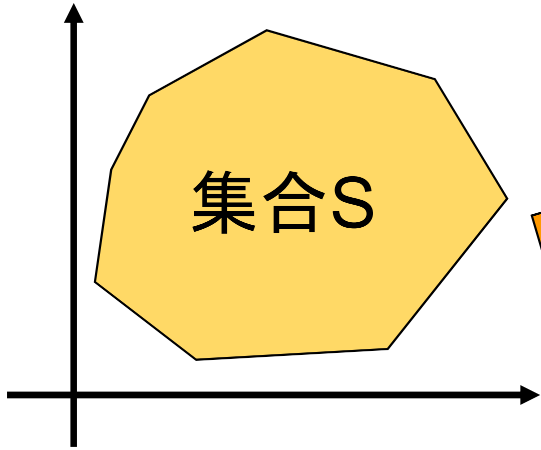
凸集合･凸関数のありがたみ

- 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の上で関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を最小化･最大化する

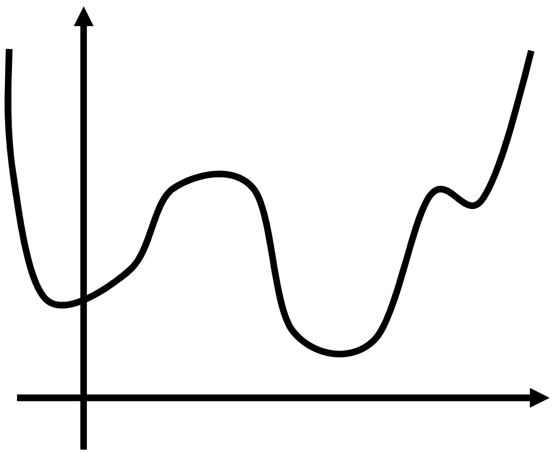
  --- S, f がどのようなときに問題が解きやすい？



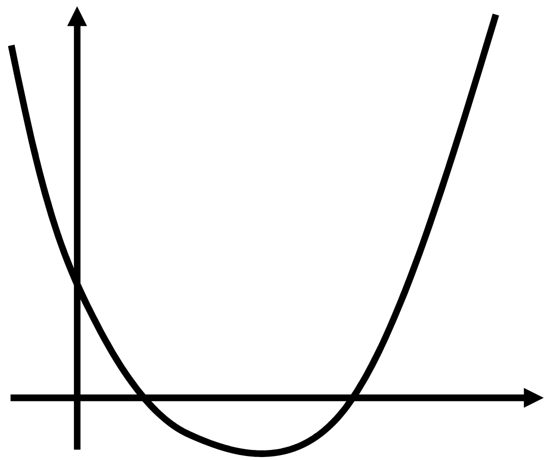
集合Sの上で
x+y の最大化



このような
集合･関数
は様々な
分野で
しばしば
現れる



関数の最小化



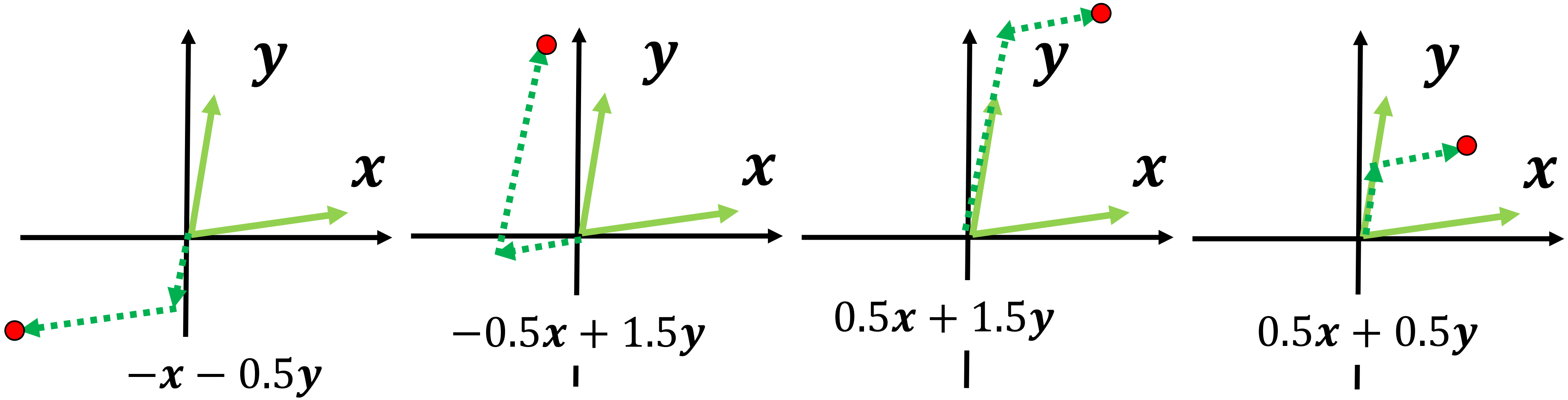
2つのベクトルの「結合」

定義: 2つの実ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ の

線形結合 --- 実数α, β を用いて $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ と表されるベクトル

とくに,

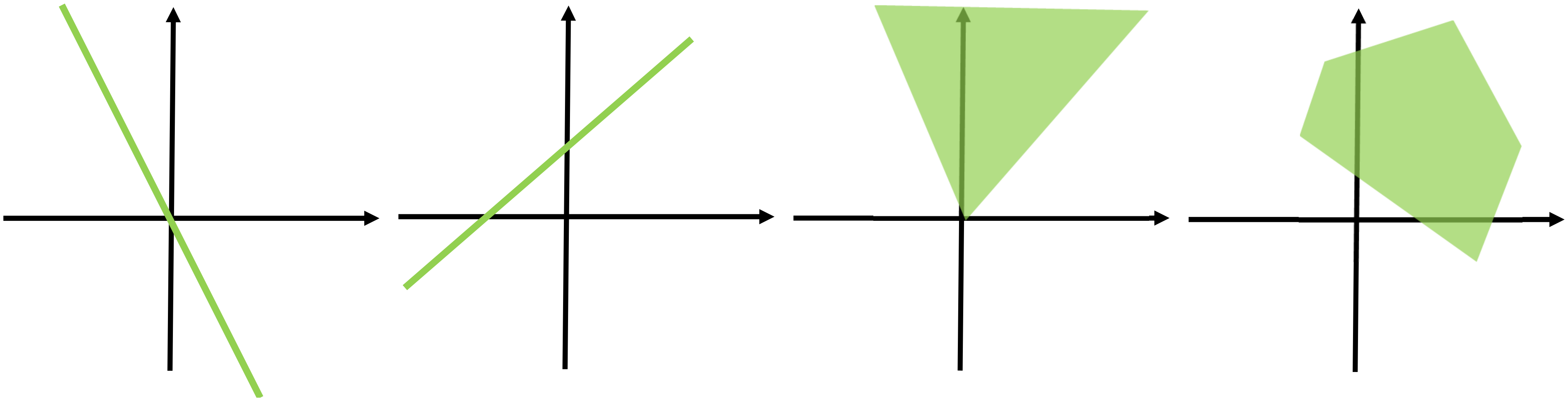
- $\alpha + \beta = 1$ のとき → $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ はアフィン結合
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ のとき → $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ は錐結合（非負線形結合）
- $\alpha + \beta = 1,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ のとき → $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ は凸結合



「結合」に関して閉じている集合

定義 : 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は2つの実ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ の

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の線形結合に関して閉じている→ S は部分空間
  （つまり, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in S$ が成立）
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ のアフィン結合に関して閉じている
  → S はアフィン空間
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の錐結合に関して閉じている→ S は凸錐
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の凸結合に関して閉じている→ S は凸集合



4種類の集合の関係

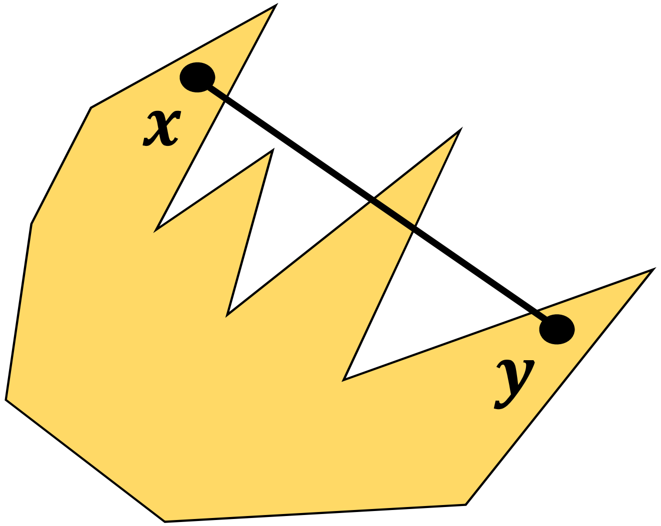
命題: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，以下が成立:

$$
\begin{tikzcd}
 & S\ \text{はアフィン空間} \arrow[dr] & \\
S\ \text{は部分空間} \arrow[ur] \arrow[dr] & & S\ \text{は凸集合} \\
 & S\ \text{は凸錐} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

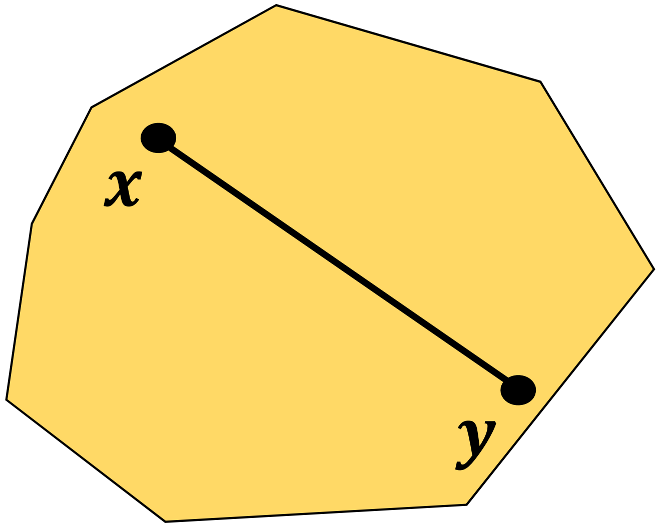
凸集合

- 定義：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は凸集合

$$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ 0 \leq \forall \alpha \leq 1,\ (1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y} \in S$$



凸集合ではない



凸集合である

※ 空集合 $\emptyset$ や空間全体 $\mathbb{R}^n$ も凸集合

凸集合の性質

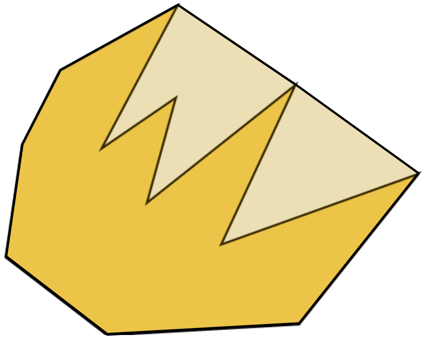
定理11.1: 凸集合の族 S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の共通部分 $\cap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ は凸集合
（証明は定義より（ほぼ）明らか）
※集合 Λ は非可算無限集合でもよい

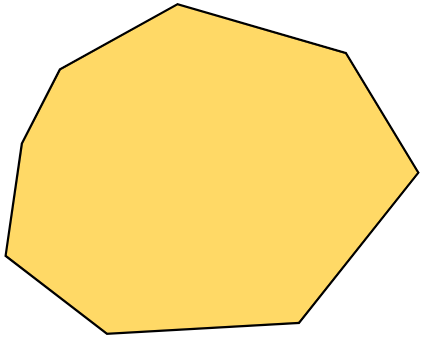
定理11.1の系: 任意の集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し,
S を含む（包含関係に関して）最小の凸集合 S^* が存在する.
[「最小」の意味] S^* は S を含む凸集合であり,
S を含む任意の凸集合は S^* を必ず含む
（証明）S を含むすべての凸集合 S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し,
$S^* = \cap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおく ➔ 任意の凸集合 S_λ は S^* を含む.
∴ S^* は最小の凸集合. ■

集合の凸包

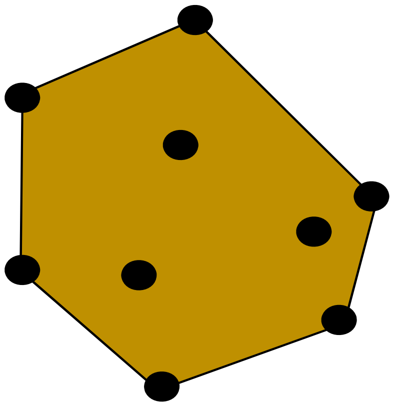
定義:集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸包 $\mathrm{co}\, S$ = S を含む最小の凸集合

※ 凸包は閉集合とは限らない





凸集合の凸包
＝もとの集合そのもの



2次元ベクトル集合の
凸包は凸多角形

多数のベクトルの「結合」

線形結合，凸結合などは，3つ以上のベクトルに対しても定義可能

定義: m 個のベクトル $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots \boldsymbol{a}^m \in \mathbb{R}^n$ の

線形結合 --- $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ を用いて $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ と表されるベクトル

とくに

- $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ のとき → $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ はアフィン結合
- $\alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$ のとき → $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ は錐結合（非負線形結合）
- $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$ のとき → $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ は凸結合

「結合」に関する性質その1

命題: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$に対し以下が成立:

- S が部分空間 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の線形結合はSに含まれる
- S がアフィン空間 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ のアフィン結合はSに含まれる
- S が凸錐 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の錐結合はSに含まれる
- S が凸集合 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の凸結合はSに含まれる

(証明の概略)いずれも m = 2 のときは定義より明らか.

m > 2 のとき:帰納法で証明.

例えば凸集合の場合, 次の式より, 帰納法の仮定を使える.

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}^2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a}^m$$
$$= (1 - \alpha_m) \left\{ \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{a}^1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{a}^2 + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{a}^{m-1} \right\} + \alpha_m \boldsymbol{a}^m$$

■

「結合」に関する性質その2

命題: ベクトル $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \subseteq \mathbb{R}^n$に対し以下が成立:
- $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m$ の線形結合全体は部分空間
- $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m$ のアフィン結合全体はアフィン空間
- $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m$ の錐結合全体は凸錐
- $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m$ の凸結合全体は凸集合

(証明の概略) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の○○結合に関して閉じていることを示せば良い.

つまり, $\boldsymbol{x} = \sum_i \eta_i \boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{y} = \sum_i \gamma_i \boldsymbol{a}^i$の○○結合$\boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}$が m個のベクトルの○○結合$\boldsymbol{z} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{a}^i$ という形で表現できることを示せば良い. ■