

7月24日分演習問題

問1:

- (1) 数列 a_k が実数 c に収束することの定義を書け.
- (2) 実数 c に収束する数列 a_k に対し, ある自然数 k_0 が存在して, $a_{k_0}, a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \dots$ が有界となることを, (1)に書いた定義を使って証明せよ.
- (3) 小問(2)の結果を使って, 収束する数列 a_k が有界であることを証明せよ.

7月24日分演習問題

問2:

- (1) 数列 a_k が実数 c に収束することの定義を書け.
- (2) 数列 a_k の部分列数列 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots$ が実数 c に収束することの定義を書け.
- (3) 小問(1),(2)の定義に基づき, 実数 c に収束する実数列の部分列が c に収束することを証明せよ.

7月24日分演習問題

問3: 数列 p_k は p に, 数列 q_k は q に, それぞれ収束するとする.
各 k に対して $q_k - p_k = \frac{q_0 - p_0}{2^k}$ が成り立つならば, $p = q$ が成り立つ.
これを証明せよ.

(ヒント: 方針のひとつ) $p < q$ と仮定, $\varepsilon = (q - p)/3$ とおく.

数列 p_k は p に, 数列 q_k は q に, それぞれ収束するという仮定を使って, ある自然数 k_0 が存在して, $k \geq k_0$ ならば $q_k - p_k > \varepsilon$ が成り立つことを導く.)

7月24日分演習問題

問4: 数列 p_k および数列 q_k は同じ値 p に収束するとする.

このとき, 各 k に対して $p_k \leq a_k \leq q_k$ を満たす任意の数列 a_k を考える. このとき, 数列 a_k が p に収束することを証明せよ.

(ヒント: 方針のひとつ)

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 k_0 が存在して, $k \geq k_0$ ならば

$a_k - p_k \leq q_k - p_k < \varepsilon/2$ が成り立つことを示す.

7月24日分演習問題

問5: 定理9.2 の証明のように数列 b_k および c_k を定義する.

このとき, これらの数列の収束先 b, c が同じ値であることを証明せよ.

なお, $b \leq c$ という事実を使ってよい.

(ヒント: 方針のひとつ) $b < c$ ならば a_k がコーシー列の条件を満たさないことを示せばOK.