

経営経済数学

凸多面体, 超平面, 半空間

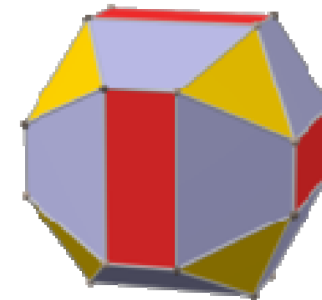
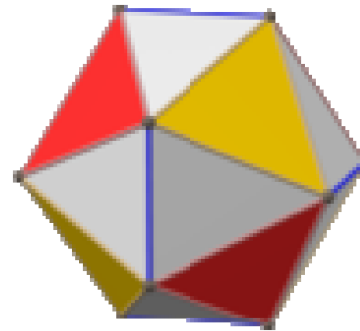
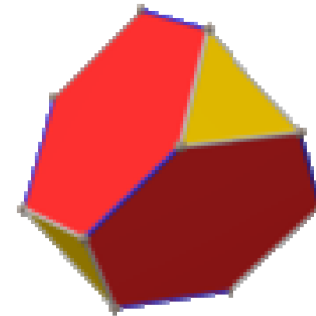
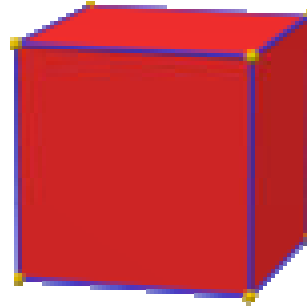
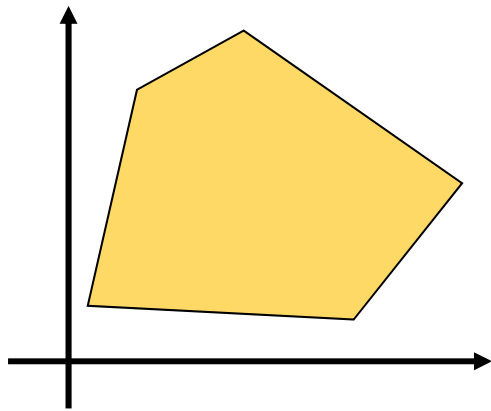
塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

凸多面体

- 凸多面体: 凸多角形の n 次元版

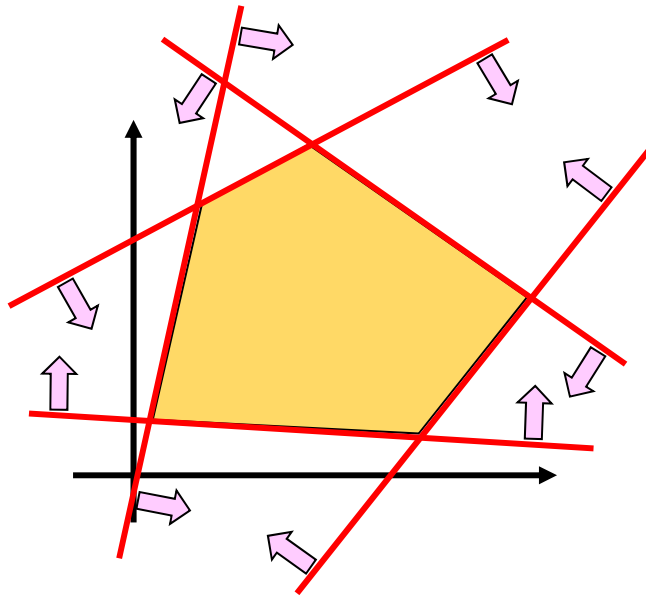


凸多面体の定義は
後ほど

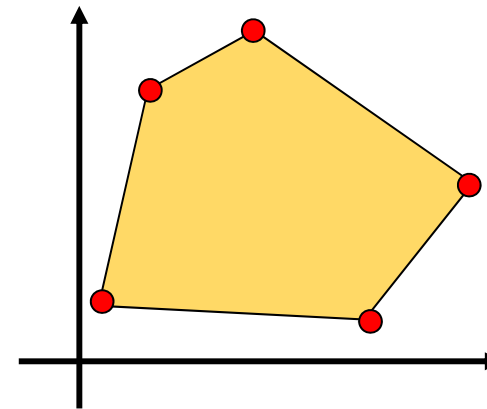
3次元空間における凸多面体

wikipedia: Polyhedra with direction colors

凸多角形の2通りの表現



有限個の不等式による
表現



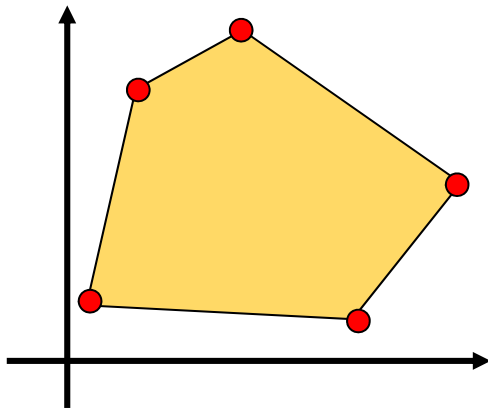
有限個のベクトルの凸包
による表現

任意の凸多面体についても同様に,
2通りの表現が可能

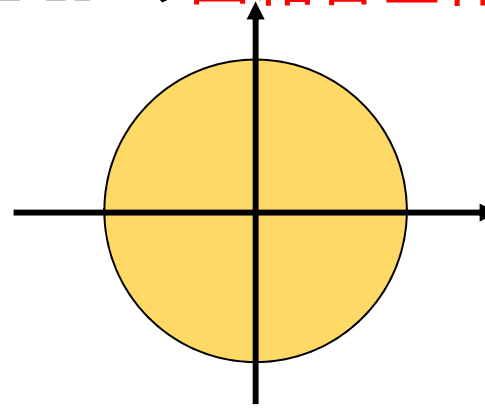
凸多面体の定義

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は凸多面体

↔ 有限個のベクトル $a^1, \dots, a^m \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸結合全体として S が表現できる



凸多面体の例



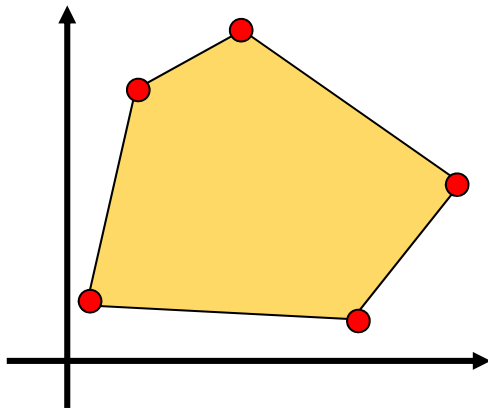
円(外周も含む) $\{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ は
無限個のベクトル $\{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
の凸結合全体として表現可能
しかし, 凸多面体ではない

一般に, 任意の凸集合は, それに含まれる
ベクトル全体の凸結合により表現可能

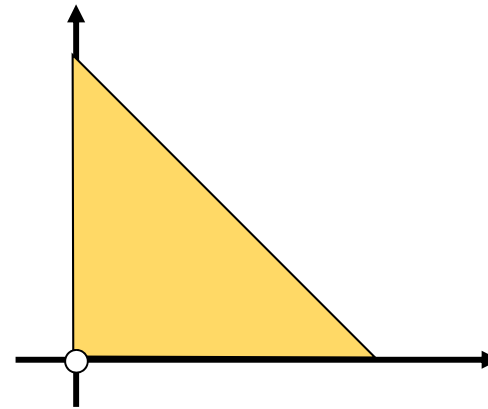
凸多面体の定義

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は凸多面体

$\longleftrightarrow$ 有限個のベクトル $a^1, \dots, a^m \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸結合全体として S が表現できる



凸多面体の例



三角形

$\{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$
は凸多面体.

しかし, それから原点を取り除いた
集合は凸多面体ではない

凸多面体と凸包との関係

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の**凸包** $\text{co } S = S$ を含む最小の凸集合

定理: **有限個**のベクトル $a^1, \dots, a^m \subseteq \mathbb{R}^n$ の集合 S に対し,
 S の凸包 $= S$ の凸結合全体

(証明) 一般に, 2つの集合 X, Y が等しいことを示すには,
 $X \subseteq Y$ と $X \supseteq Y$ の両方を示せば良い.

今回の場合, $X = S$ の凸包, $Y = S$ の凸結合全体, とおいて証明.

($X \subseteq Y$ の証明)

S の凸結合全体 Y は凸集合 ($\because$ 前回の命題), S を含む.

$\therefore S$ の凸包は, S を含む最小の凸集合なので, Y に含まれる. ■

「結合」に関する性質その2

命題： ベクトル $a^1, \dots, a^m \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し以下が成立：

- $a^1, \dots, a^m$ の線形結合全体は部分空間
- $a^1, \dots, a^m$ のアフィン結合全体はアフィン空間
- $a^1, \dots, a^m$ の錐結合全体は凸錐
- $a^1, \dots, a^m$ の凸結合全体は凸集合

(証明の概略) 任意の $x, y \in S$ の $\circ\circ$ 結合に関して閉じていることを示せば良い.

つまり, $x = \sum_i \eta_i a^i, y = \sum_i \gamma_i a^i$ の $\circ\circ$ 結合 $z = \alpha x + \beta y$ が m 個のベクトルの $\circ\circ$ 結合 $z = \sum_i \lambda_i a^i$ という形で表現できることを示せば良い. ■

凸多面体と凸包との関係

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の**凸包** $\text{co } S = S$ を含む最小の凸集合

定理: **有限個**のベクトル $a^1, \dots, a^m \subseteq \mathbb{R}^n$ の集合 S に対し,
 S の凸包 $= S$ の凸結合全体

($X \supseteq Y$ の証明)

任意の $x \in Y$ に対し, $x \in X$ が成り立つことを示せば良い.

つまり, S の任意の凸結合 $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a^i$ が,

S の凸包に含まれることを示せば良い.

定義より, S の凸包は $S = \{a^1, \dots, a^m\}$ を含む.

S の凸包は凸集合なので,

$a^1, \dots, a^m$ の任意の凸結合を含む(前回の命題)



「結合」に関する性質その1

命題： 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し以下が成立：

- S が部分空間 $\rightarrow a^1, \dots, a^m \in S$ の線形結合は S に含まれる
- S がアフィン空間 $\rightarrow a^1, \dots, a^m \in S$ のアフィン結合は S に含まれる
- S が凸錐 $\rightarrow a^1, \dots, a^m \in S$ の錐結合は S に含まれる
- S が凸集合 $\rightarrow a^1, \dots, a^m \in S$ の凸結合は S に含まれる

(証明の概略) いずれも $m = 2$ のときは定義より明らか.

$m > 2$ のとき: 帰納法で証明.

例えば凸集合の場合, 次の式より, 帰納法の仮定を使える.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_m a^m \\ &= (1 - \alpha_m) \left\{ \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_m} a^1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_m} a^2 + \dots + \frac{\alpha_{m-1}}{1 - \alpha_m} a^{m-1} \right\} + \alpha_m a^m \end{aligned}$$



凸多面集合

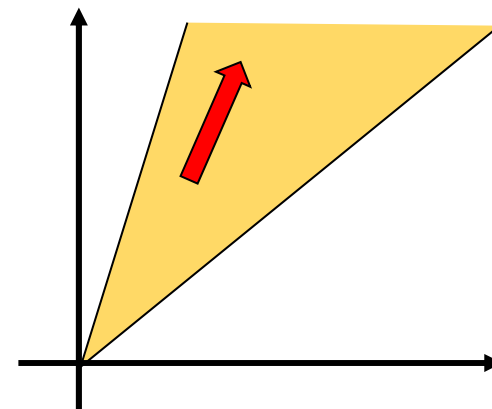
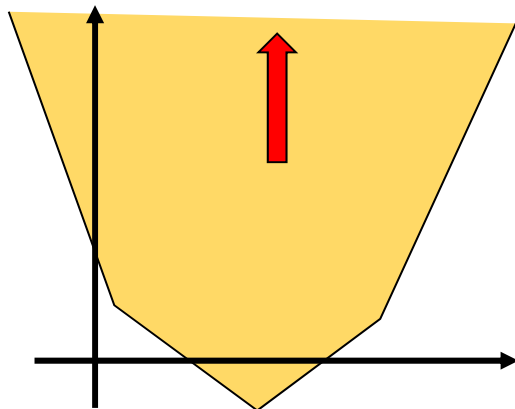
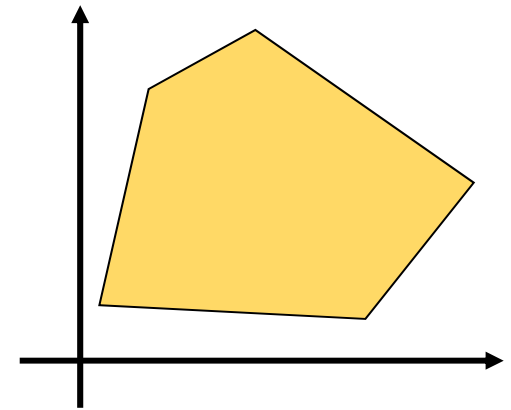
凸多面体は、その定義より必ず有界

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は**有界**

↔ ある定数 α が存在して, $\|x\| \leq \alpha \ (\forall x \in S)$
(つまり, ある大きさの球に S が含まれる)

しかし, 非有界な「多角形」もある

このような「多角形」では, ある方向に向かって, 無限に移動可能



凸多面集合の定義

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は凸多面体

↔ 有限個のベクトル $a^1, \dots, a^m \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸結合全体として
 S が表現できる

$$S = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i a^i \mid \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 (i = 1, \dots, m)\}$$

定義: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は凸多面集合

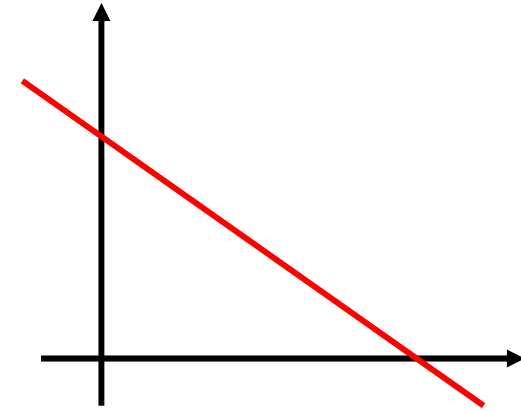
↔ 有限個のベクトル $a^1, \dots, a^m \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸結合と
 有限個のベクトル $b^1, \dots, b^k \subseteq \mathbb{R}^n$ の錐結合との和の全体に
 よって S が表現できる

$$S = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i a^i + \sum_{j=1}^k \beta_j a^j \mid \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 (i = 1, \dots, m), \\ \beta_j \geq 0 (j = 1, \dots, k)\}$$

※ $k=0$ のとき, 凸多面体集合 = 凸多面体

$m=0$ のとき, 凸多面体集合 = 凸多面錐

超平面



超平面とは, 1つの**線形等式**を満たすベクトルの集合

• 2次元空間の場合: $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ を満たすベクトル (x_1, x_2) の集合

$\longleftrightarrow$ ($\beta \neq 0$ のとき) $x_2 = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)x_1 + \frac{\gamma}{\beta}$ という直線

• 3次元空間の場合: (空間を二分する) 平面

定義: 集合 $H \subseteq \mathbb{R}^n$ は**超平面**

$\longleftrightarrow$ あるベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ と実数 β を用いて $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \beta\}$ と表現される集合

半空間

半空間とは, 1つの線形不等式を満たすベクトルの集合

定義: 集合 $H \subseteq \mathbb{R}^n$ は半空間

↔ あるベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ と実数 β を用いて $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \beta\}$ と表現される集合

※ $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq \beta\}$ もまた半空間.

∵ $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (-\mathbf{a})^T \mathbf{x} \leq -\beta\}$ と書き直せるから.

半空間の共通部分

以降では、複数の(有限個の)半空間の共通部分について議論する.

→ $m \times n$ 実行列 A と m 次元実ベクトル b を用いて

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a^i)^T x \leq b_i \ (i = 1, \dots, m)\}$$

と表現する

※超平面は、2つの半空間の共通部分として表現できる

∴不等式条件だけでなく、等式条件も表現可能

定理(ミンコフスキー・ワイルの定理):

- (i) 半空間の共通部分は凸多面集合, とくに有界ならば凸多面体.
- (ii) 凸多面集合は, 半空間の共通部分として表現可能.

一般の場合の証明は大変.

(i) を2次元の有界な場合についてのみ証明する.

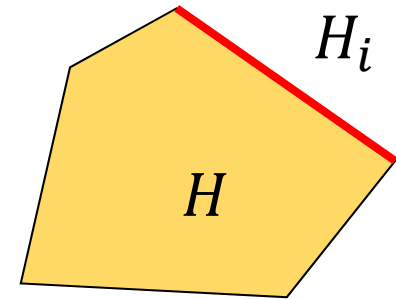
証明の方針: $n-1$ 次元のときの結果を使って,

n 次元のときの証明をする.

半空間の共通部分と凸多面体: 2次元

命題: $H \subseteq \mathbb{R}^2$ は有界な集合とする.

(i) H が半空間の共通部分ならば, それは凸多面体
(証明)



$H = \{(x_1, x_2) \mid a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \leq b_i \ (i = 1, 2, \dots, m)\}$ とおく.

また, $H_i = H \cap \{(x_1, x_2) \mid a_1^i x_1 + a_2^i x_2 = b_i\}$ とおく.

すべての i について, $H_i \neq \emptyset$ かつ H_i は異なる2点を含むと仮定する
(H_i が高々1点のみ含む場合,

不等式 $a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \leq b_i$ を H の定義式から削除しても H は不変.)

このあとの方針:

(a): 各 H_k が凸多面体であることを証明

(b): (a)の結果を用いて, H が凸多面体であることを証明

半空間の共通部分と凸多面体: 2次元

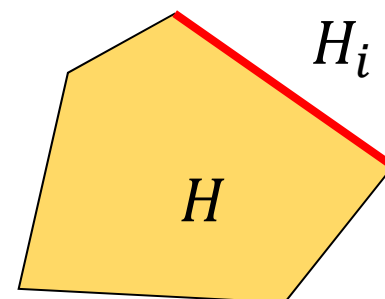
※ H_i を集めたものが H の境界(「端っこ」の点の集合)であり,
 その他の点は $\{(x_1, x_2) \mid a_1^i x_1 + a_2^i x_2 < b_i \ (i = 1, 2, \dots, m)\}$ と表される

(a): 各 H_k が凸多面体であることの証明

$$H_k = \{(x_1, x_2) \mid a_1^k x_1 + a_2^k x_2 = b_k, \ a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \leq b_i \ (i \neq k)\}$$

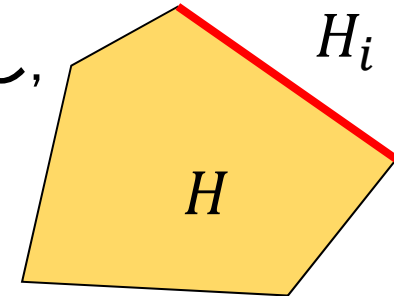
は直線 $a_1^k x_1 + a_2^k x_2 = b_k$ に含まれる有界な凸集合なので,
 線分になる.

その両端点を v, w とおくと, H_k は v, w の凸結合全体として表現される.
 つまり, H_k は凸多面体である.



半空間の共通部分と凸多面体: 2次元

以下では, H_i ($i = 1, \dots, m$) の端点の集合を S と表し,
 $S = \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ とする.



(b): H が凸多面体であることの証明

H が S の凸結合全体として表現出来ることを示す.

(a) の結果より, 各 H_i に含まれる点に対しては成立.

次に, 任意の H の点 $x = (x_1, x_2)$ が

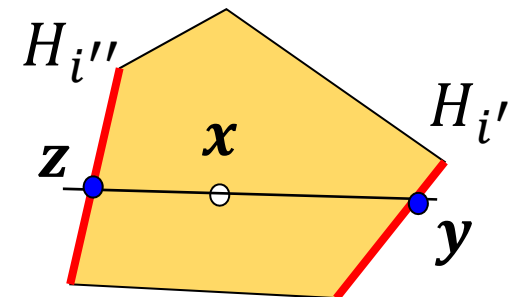
$\cup_{i=1}^m H_i$ の2つの点の凸結合として表せることを示す.

H の内部で点 x を右に移動させると, いつかはある不等式

$a_1^{i'} x_1 + a_2^{i'} x_2 \leq b_{i'}$ が等式で成り立つ.

そのときの点を y とすると, $y \in H_{i'}$ 成立.

同様に, H の内部で点 x を左に移動させることにより, ある $H_{i''}$ に含まれる点 z が得られる.



半空間の共通部分と凸多面体: 2次元

x は y と z の間に位置する.

$\therefore$ ある $0 \leq \beta \leq 1$ を用いて

$$x = (1 - \beta)y + \beta z \quad \textcircled{1} \text{ と表せる.}$$

また, $y \in H_{i'}$, $z \in H_{i''}$ なので,

$S = \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ の凸結合として表現可能.

$$y = \sum_i \alpha'_i v^i, \quad z = \sum_i \alpha''_i v^i \quad \textcircled{2}$$

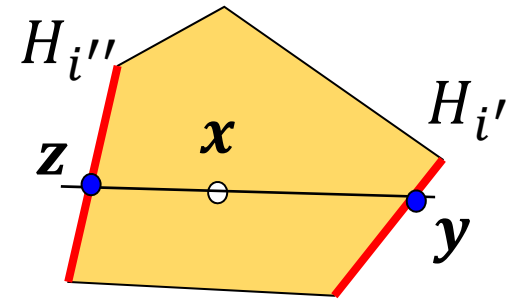
$$\text{ただし, } \sum_i \alpha'_i = \sum_i \alpha''_i = 1, \quad \alpha'_i, \alpha''_i \geq 0 \quad \textcircled{3}$$

①, ②より

$$x = (1 - \beta) \sum_i \alpha'_i v^i + \beta \sum_i \alpha''_i v^i = \sum_i ((1 - \beta)\alpha'_i + \beta\alpha''_i) v^i$$

③より, $(1 - \beta)\alpha'_i + \beta\alpha''_i$ は非負, かつ和=1.

よって, x は S の凸結合として表現できた. ■

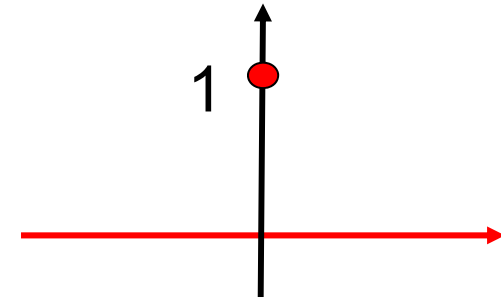


8月4日演習問題

問1: 3つのベクトル $(0,0)$, $(1,4)$, $(2,2)$ の凸結合全体からなる凸多面体を, 半空間の共通部分として表せ.

問2: x 軸上の全ての点集合と $(0,1)$ の凸包 S はどのような集合か?
 S を推測して, それが正しいことを証明せよ.

問3: 凸多面体が有界であることを証明せよ.



8月4日演習問題

問4: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し, $\tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ を

$$\tilde{S} = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \text{ある } x \in S \text{ が存在して, } y_j = x_j \ (j = 1, \dots, n-1)\}$$

により定義する. $\tilde{S}$ は S の射影と呼ばれる.

S が以下の不等式で与えられる場合を考える:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j + x_n \leq b_i \ (i = 1, \dots, k), \quad \sum_{j=1}^{n-1} a_{k+i,j}x_j - x_n \leq b_{k+i} \ (i = 1, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{k+m+i,j}x_j \leq b_{k+m+i} \ (i = 1, \dots, h).$$

このとき, $\tilde{S}$ が次の不等式系で与えられることを証明せよ.

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{k+i,j}x_j - b_{k+i} \leq \sum_{j=1}^{n-1} a_{i',j}x_j - b_{i'} \ (i = 1, \dots, m, \ i' = 1, \dots, k),$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{k+m+i,j}x_j \leq b_{k+m+i} \ (i = 1, \dots, h).$$

また, S が下記の式で与えられるとき, $\tilde{S}$ の不等式系による表現を求めよ.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0, \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5,$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 0, \ -x_1 + 3x_3 \leq 1\}$$