経営経済数学

連続関数の最小値

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

関数の連続性

定義: 一変数関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続

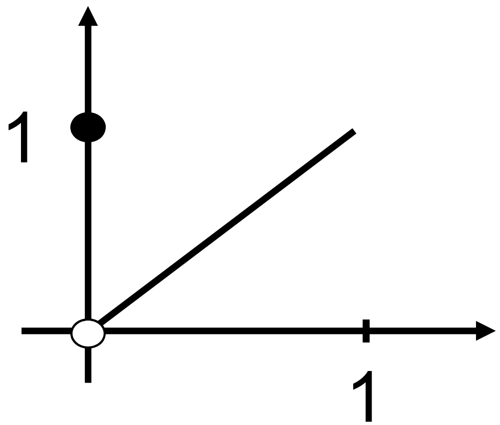
$\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

（$\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, c に収束する任意の数列 a_k に対し,

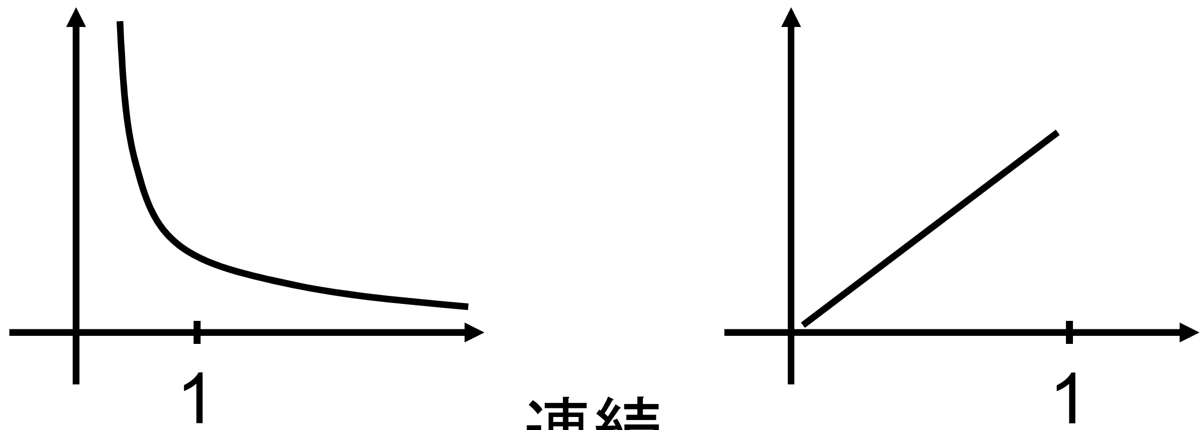
$f(a_k)$ は f(c) に収束）

定義: 多変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続

$\Leftrightarrow\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$



不連続



連続

関数の最小解，最大解，最小値，最大値

関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,　　　集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：　$a \in S$ は S における f の最小解

　⇔ 任意の $x \in S$ に対し，$f(x) \geq f(a)$

このとき，値 $f(a)$ は S における f の最小値 とよばれる

定義：　$b \in S$ は S における f の最大解

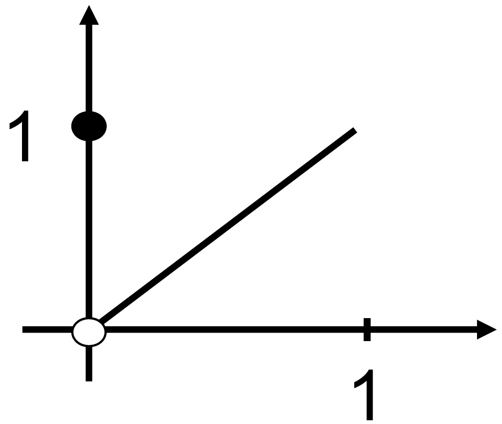
　⇔ 任意の $x \in S$ に対し，$f(x) \leq f(b)$

このとき，値 $f(b)$ は S における f の最大値 とよばれる

※ 最小解，最大解，最小値，最大値は存在するとは限らない

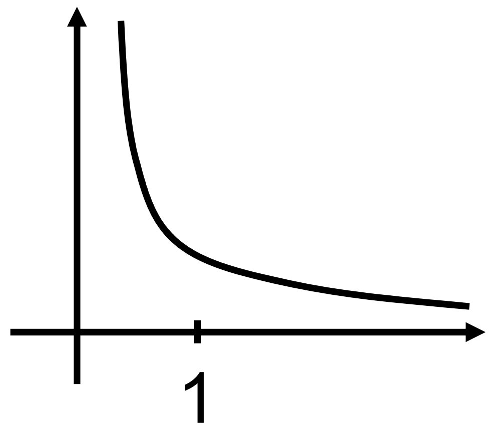
最小解，最大解が存在するための条件は？

最小解が存在しない例



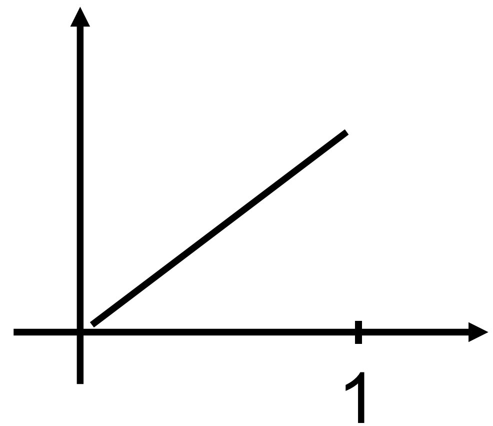
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$$
$$S = \{x | 0 \le x \le 1\}$$

xを0に近づけると
関数値は減少して
0に近づくが,
x=0 では1になる



$$f(x) = 1/x$$
$$S = \{x | x \ge 1\}$$

xを大きくしていくと
関数値は減少して
0に近づくが,
f(x)=0 となる x は
存在しない



$$f(x) = x$$
$$S = \{x | 0 < x \le 1\}$$

xを0に近づけると
関数値は減少して
0に近づくが,
x=0 は定義域に
入っていない

開集合

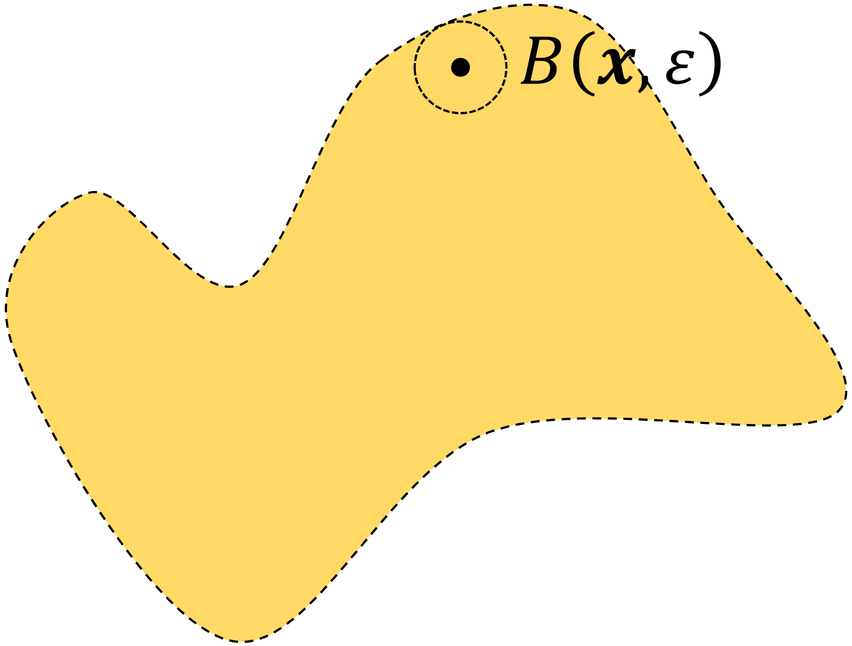
定義：中心 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r \geq 0$ の開球体

$$B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < r\}$$

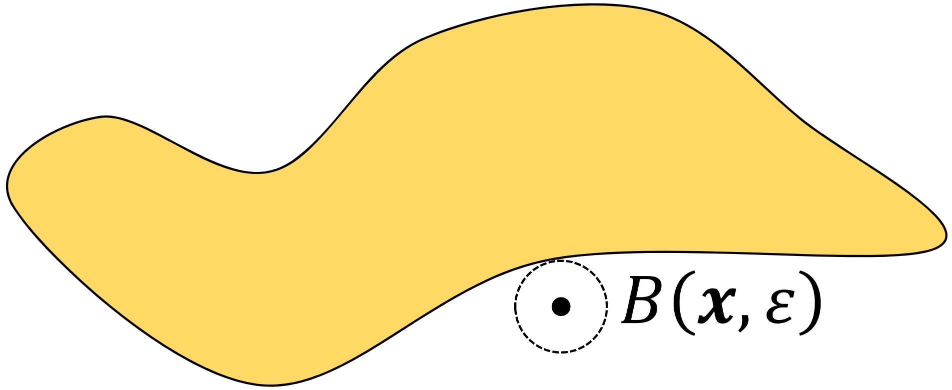
n=1 ならば開区間，n=2 ならば円の内部

定義： $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合 ⇔ $\forall \boldsymbol{x} \in S, \exists \varepsilon > 0 : B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq S$

x を中心とする十分小さい球（の内部）は S に含まれる



閉集合



定義： $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合

$\Leftrightarrow$ S の補集合 $S^c = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{y} \notin S\}$ は開集合

$\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x} \in S^c, \exists \varepsilon > 0 \colon B(\boldsymbol{x},\varepsilon) \cap S = \emptyset$

任意の x ∉ S に対し，x を中心とする

十分小さい球（の内部）は S と共通部分をもたない

閉集合の例：

- 閉球体 $\overline{B(\boldsymbol{x},r)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \leq r\}$
- 閉半空間 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq b\}$

（$\mathbb{R}$ の部分集合としての）有理数全体 $\mathbb{Q}$ は閉集合？開集合？

収束点列による閉集合の特徴付け

定理9.6: $A \subseteq \mathbb{R}$ は閉集合
←→ A の収束する任意の実ベクトル列に対し,
その極限が A に含まれる

(→の証明) 点列 a_k の極限を c とおく.
極限の定義より, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow ||a_k - c|| < \varepsilon$
よって, $\forall \varepsilon > 0: B(c, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
∴ 閉集合の定義の条件(のひとつ)より, $c \in A$ ■

収束点列による閉集合の特徴付け

定理9.6: $A \subseteq \mathbb{R}$ は閉集合
⇔ A の収束する任意の実ベクトル列に対し,
その極限が A に含まれる

(⇐の証明) 対偶を証明する.

A は閉集合ではない ⇒ A の収束するある実ベクトル列が存在して,
その極限が A に含まれない

A は閉集合ではないので, その定義より,

$$\exists \boldsymbol{x} \in A^c, \forall \varepsilon > 0 : B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

よって, 任意の自然数 k に対し,

$B(\boldsymbol{x}, 1/k) \cap A$ の要素をひとつ選び, a_k とする.

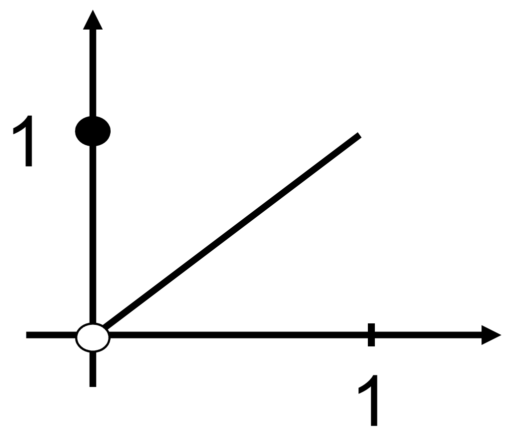
その選び方より, 数列 a_k は $\|a_k - x\| < 1/k$ を満たすので
x に収束するが, A の要素ではない. ■

最小解，最大解が存在するための十分条件

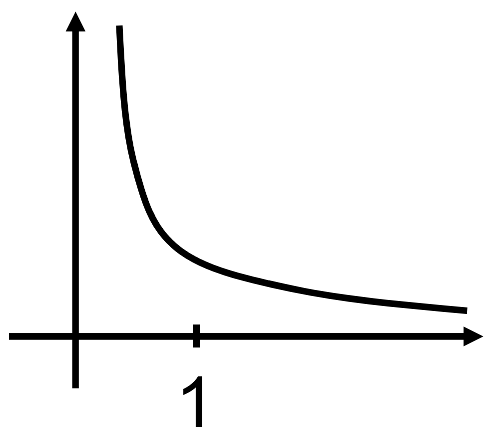
定理9.13： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が連続関数，　$S \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合
➔ 最小解，最大解が存在.

※ (i) f が連続 (ii) S が有界 (iii) S が閉集合　のいずれかひとつの条件が欠けると，最小解，最大解が存在しないことがある.

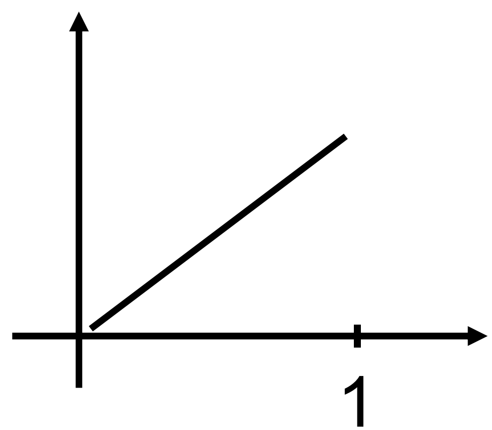
最小解が存在しない例



$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$$
$$S = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$$



$$f(x) = 1/x$$
$$S = \{x | x \geq 1\}$$



$$f(x) = x$$
$$S = \{x | 0 < x \leq 1\}$$

定理9.13の証明

定理9.13： $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が連続関数， $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合
➔ 最小解，最大解が存在.

定理9.12（m=1のとき）と定理9.8を使うと簡単に示せる.

定理9.12 (m=1)： $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数， $A \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合
➔ A の像 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ も有界閉集合

（証明はあとで. ※教科書の方針と異なる証明）

定理9.8: $A \subseteq \mathbb{R}$ が有界閉集合 ➔ A の最小元，最大元が存在
（つまり，∃a,b∈A, ∀x∈A, a≦x≦b）

（証明は次のスライド）

定理9.8の証明

定義: $A \subseteq \mathbb{R}$ は閉集合 ←→任意の x ∉ S に対し,
x を中心とする十分小さい球(の内部)は S と共通部分をもたない

定理9.8: $A \subseteq \mathbb{R}$ が有界閉集合 → A の最小元，最大元が存在
（つまり，∃a,b∈A, ∀x∈A, a≦x≦b）

（証明）最大元の存在のみ証明.

定理5.4より，A には上限cが存在． c∈A ならばこれが最大元.
c∉A と仮定して矛盾を導く.

c∉A のとき，A は閉集合なので， c を中心とするある
開区間(c-ε, c+ε) が存在して， A と共通部分をもたない.

つまり，A の任意の要素は c-ε 以下となり,
c がAの上限(最小の上界)であることに矛盾. ■

定理9.12の証明: f(A) の有界性

背理法の仮定: f(A)が上に非有界

➔ Aのある数列 a_k が存在して，$f(a_k) \rightarrow +\infty$

A は有界なので，数列 a_kは

収束する部分列a_{k_j} ($j = 1,2, \ldots$) をもつ（定理9.5）← 極限を c とおく

$f(a_{k_j})$ ($j = 1,2, \ldots$) は数列$f(a_k)$ の部分列

➔ 下記の命題より $f\left(a_{k_j}\right) \rightarrow +\infty$

一方，部分列a_{k_j} ($j = 1,2, \ldots$) は c に収束，f は連続

➔ $f\left(a_{k_j}\right) \rightarrow f(c)$ （演習問題） よって矛盾.

同様にして，f(A)が下に有界であることも示せる. ■

定理9.5: 任意の有界な実ベクトル列は，収束する部分列をもつ.

命題: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ がcに収束（±∞に発散）するとき，
その任意の部分列も c に収束（±∞に発散）する.

定理9.12の証明：f(A)の閉性

定理9.6 を使い，f(A)の閉集合の証明をする.

f(A)の任意の収束列 $f(a_k)$を考える ← 極限を z とおく

z ∈f(A) を示したい.

A は有界なので，数列 a_kは収束する部分列$a_{k_j}\ (j = 1,2, \ldots)$

をもつ（定理9.5）← 極限を c∈A とおく

f は連続 ➔ $f\left(a_{k_j}\right) \to f(c) \in f(A)$

一方，$f\left(a_{k_j}\right)$ は $f(a_k)$ の部分列なので z に収束

∴ z = f(c)∈f(A)　　■