演習問題の解答例

問1：

(3)上記の定義(2)に従って，数列 $a_k = 1 - 1/k$ の上限が1であることを証明せよ.

（証明）任意の k に対して $a_k \leq 1$ が成り立つので，1は数列の上界である.

これが最小の上界であることを示すために，α < 1 なる任意の実数αに対し，

$a_k > \alpha$ を満たすa_kが存在することを証明する.

α <0 であれば $a_1 = 0 > \alpha$ が成り立つ.

0≦α <1 のとき，$k = \left\lceil \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \right\rceil + 1$ とおくと ($\lceil \beta \rceil$ はβの小数部分を切り上げした整数)

$a_k = 1 - \frac{1}{k} > 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)} = \alpha$ より $a_k > \alpha$ が成り立つ.　■

演習問題の解答例

問1：

(4)上記の定義(1)と(3)の結果を使って，数列 $a_k = 1 - 1/k$ が1に
　収束することを証明せよ.

（証明）任意のε>0に対し，ある自然数k_0が存在して，k≧k_0 ならば $|a_k - 1| < \epsilon$ が成り立つことを示せば良い.

$a_k - 1 = -1/k < 0 < \epsilon$ は任意の k に対して成り立つので，任意のε>0に対し，ある自然数k_0が存在して，k≧k_0 ならば$1 - a_k < \epsilon$ が成り立つことを示せば良い.

$1 - a_k = 1/k$ なので， $k_0 = \lceil (1/\epsilon) \rceil + 1$ とおけば良い.　■

演習問題の解答例

問2：

(2)上記の定義(1)にしたがって，数列 $a_k = (1/k)\sin(\sqrt{2}k\pi)$ がコーシー列であることを証明せよ.

（証明）

$a_k = \frac{1}{k}\sin(\sqrt{2}\pi k)$　　　$|a_k| \leq \frac{1}{k}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, k, k' \geq k_0 \Rightarrow |a_k - a_{k'}| < \varepsilon$

$k_0 = \lceil \underbrace{1/\varepsilon \times 2}_{+1} \rceil \Rightarrow \forall k, k' \geq k_0, \ |a_k| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$|a_{k'}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore |a_k - a_{k'}| \leq |a_k| + |a_{k'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$