

経営経済数学

コーシー列と部分列

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

単調増加列, 単調減少列

- 定義: 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は
 - 単調増加(非減少) $\iff \forall k = 1, 2, \dots: a_k < a_{k+1} \ (a_k \leq a_{k+1})$
 - 単調減少(非増加) $\iff \forall k = 1, 2, \dots: a_k > a_{k+1} \ (a_k \geq a_{k+1})$
 - 上に有界 $\iff$ ある実数 q が存在して,
任意の $k=1, 2, \dots$ に対して $q \geq a_k$
 - 下に有界 $\iff$ ある実数 q が存在して,
任意の $k=1, 2, \dots$ に対して $q \leq a_k$

注意: a_k は単調非減少(上に有界)

$\iff -a_k$ は単調非増加(下に有界)

具体例:

- $a_k = k$ や $a_k = k^2$ は 単調非減少, 上に有界ではない
- $a_k = 1 - 1/k$ は 単調非減少, 上に有界である
- $a_k = 0$ は 単調非減少, 単調非増加, 上に有界, 下に有界

上に有界で単調非減少な数列の性質

- **定義:** 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は実数 c に**収束する**

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: k \geq k_0 \Rightarrow |a_k - c| < \varepsilon$$

- **定理:** 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は, 次のいずれかの条件を満たすと収束
 - 上に有界で単調非減少
 - 下に有界で単調非増加

例:

$a_k = 1 - 1/k$ は 単調増加, 上に有界である

→ 1 に収束

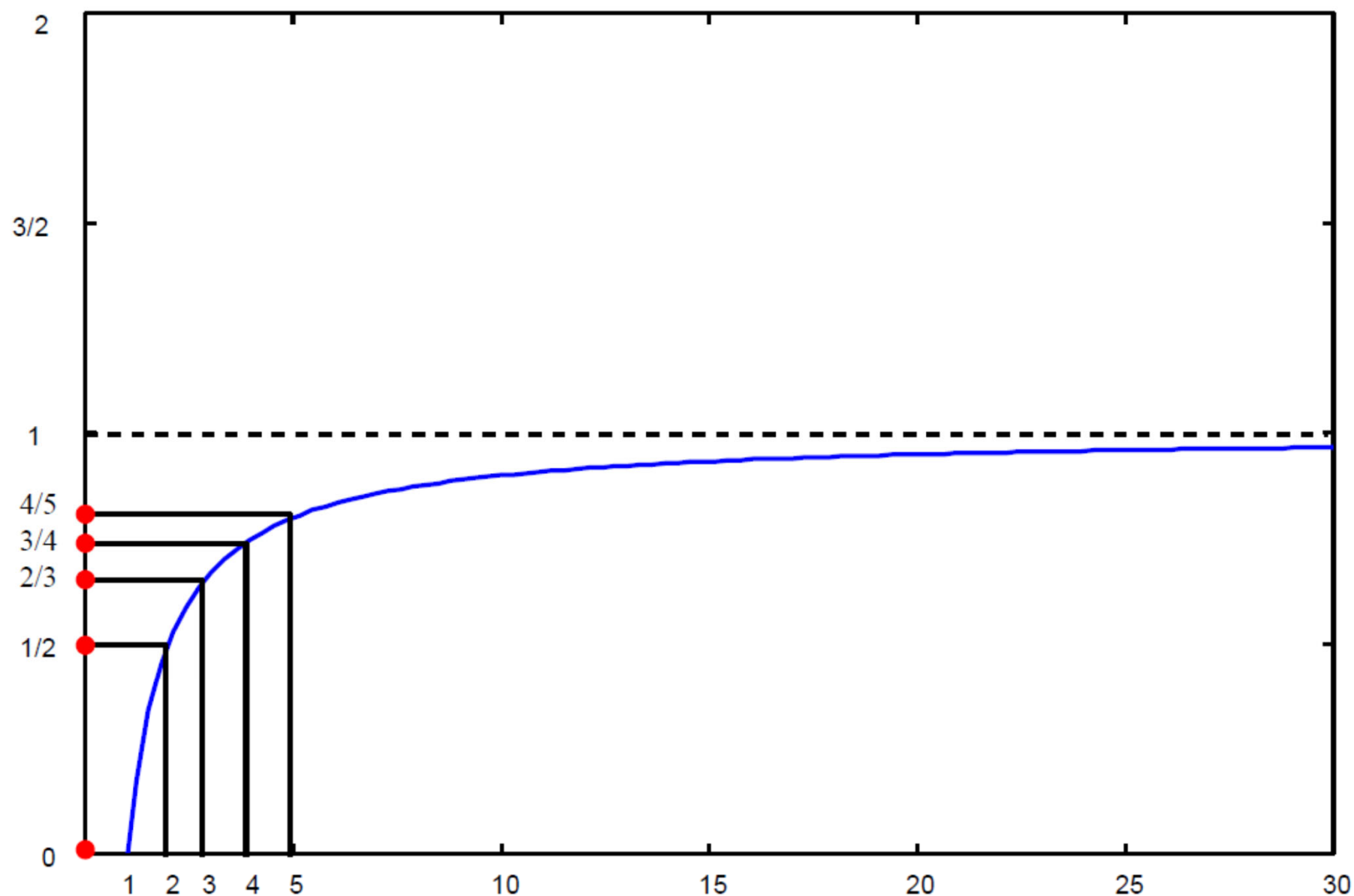
$a_k = k^2$ は 単調増加, 上に有界ではない

→ $+\infty$ に発散

$a_k = (-1)^k$ は 単調増加ではない, 上に有界である

→ どの値にも収束しない, 発散しない

上に有界で単調増加する数列の例: $a_n = 1 - 1/n$



(a_n) を数列とする.

上に有界, 上界

ある実数 u が存在してどんな自然数 n に対しても

$$a_n \leq u$$

となるとき, (a_n) は上に有界であるという. このような u を (a_n) の上界という.

上限

(a_n) の上界の中で一番小さいものを上限という. (a_n) の上限 u^* は以下を満たす.

- (1) どんな自然数 n に対しても $a_n \leq u^*$
- (2) ある実数 u はどんな自然数 n に対しても $a_n \leq u$ ならば $u^* \leq u$

上に有界で単調非減少な数列の性質

- **定理:** 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は, 次のいずれかの条件を満たすと収束
 - 上に有界で単調非減少 (このとき, **上限値に収束**)
 - 下に有界で単調非増加 (このとき, **下限値に収束**)

証明の概略:

上に有界 $\rightarrow$ 定理5.4より上限 c が存在

数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ の極限が c であることを示す ■

定理5.4: 実数の集合 M に対し,

M に対して上界が存在 $\rightarrow$ 上限(最小上界)が存在

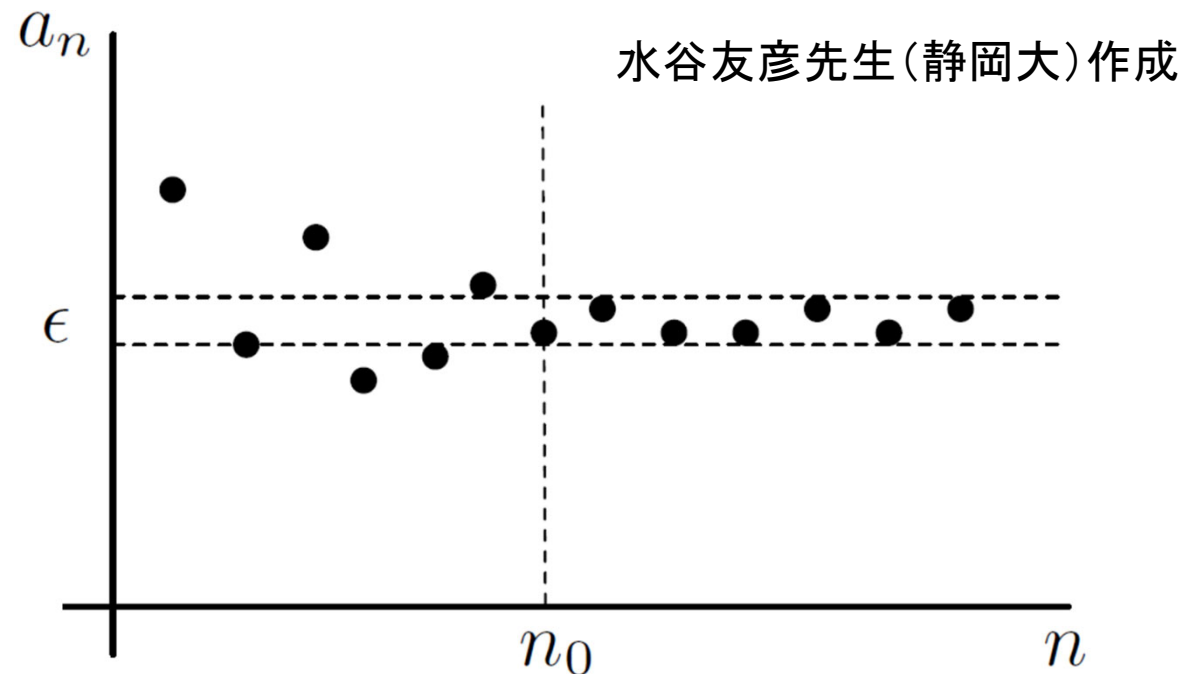
下界が存在 $\rightarrow$ 下限(最大下界)が存在

コーシー列

- 定義: 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ はコーシー列 (基本列)

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$$

イメージ: 数列の収まる
幅が徐々に狭くなる



コーシー列の例

$a_k = 0$, $a_k = 1 - 1/k$, $a_k = 0.5^k$, $a_k = \sqrt{2}$ の小数点 k 桁まで
 $\varepsilon = 0.1$ のとき, k_0 をどう選べばよい?

コーシー列の性質

収束のイメージ: 数列がある
一点に近づいていく

• 定理9.2: 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は

収束する $\iff$ コーシー列

[$\rightarrow$] は演習問題(数列が収束することの定義を使う)

[$\leftarrow$] の証明の概略

$A_k = \{a_{k'} \mid k' = k, k+1, \dots\}$ ($k=1, 2, \dots$) とおく

$\rightarrow A_k$ は有界, とくに下界が存在 $\rightarrow$ 定理5.4より下限 b_k が存在

b_k は単調非減少, 上に有界 $\therefore$ 極限 b が存在.

この b は数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ の極限になっている. ■

定理5.4: 実数の集合 M に対し,

M に対して上界が存在 $\rightarrow$ 上限(最小上界)が存在

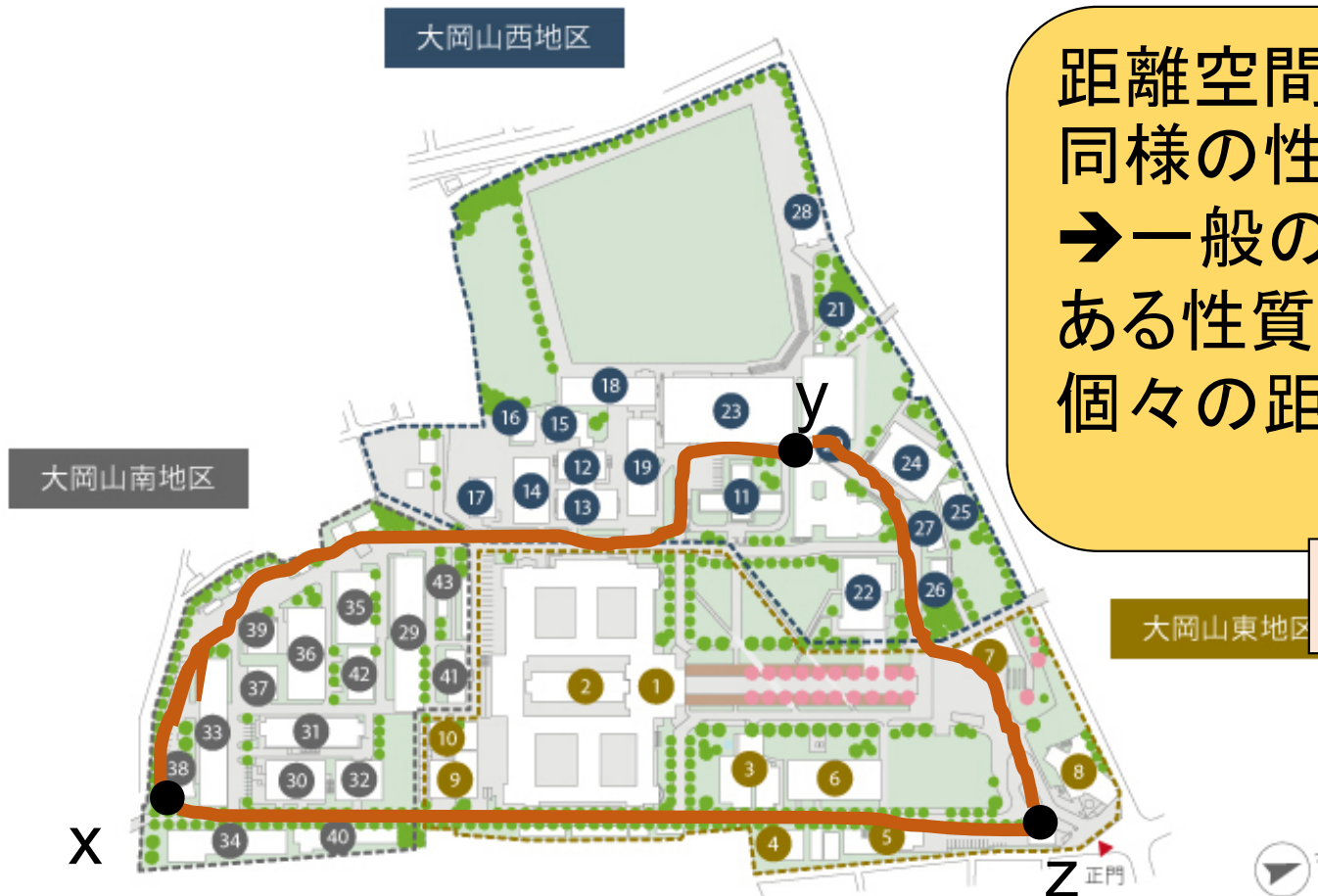
下界が存在 $\rightarrow$ 下限(最大下界)が存在

距離空間の復習

- 定義: 距離空間 (X, d) とは,
 集合 X と, その各要素の間の距離を与える距離関数 d の対
- 定義: $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は距離関数 $\iff$ 以下の4条件を満たす
 - (0) 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(x, y) \geq 0$
 - (1) 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(x, y) = 0 \iff x = y$
 - (2) 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(x, y) = d(y, x)$
 - (3) [三角不等式] 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
 ※ 条件 (0) は不要 (他の条件から導出可能)
- 定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ は $x \in X$ に収束
 - $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: k \geq k_0 \Rightarrow d(x_k, x) < \varepsilon$
- 定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ は 収束点列
 - $\iff$ ある $x \in X$ が存在して, 点列は x に収束

距離空間の例

- X = 道路上の地点の集合
- $d(x,y)$ = x 地点から y 地点への最短ルート of 距離



距離空間には様々な例が存在し、
同様の性質が成り立つ

→ 一般の距離空間に対して、
ある性質を証明できれば、
個々の距離空間に対して

証明する必要なし

抽象化することの利点

コーシー列の距離空間への一般化

- 定義: 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ はコーシー列

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$$

2つの実数 x, y の距離を $d(x, y) = |x - y|$ と定義

→ 定義の条件の書き換え

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: k', k \geq k_0 \Rightarrow d(a_{k'}, a_k) < \varepsilon$$

同様にして, 距離空間 (X, d) に対してコーシー列を定義

- 定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ はコーシー列

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: k', k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{k'}, x_k) < \varepsilon$$

収束点列とコーシー列

- **定理:** 距離空間 (X, d) の任意の点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ は
収束する $\Rightarrow$ コーシー列

証明は演習問題

その逆「コーシー列 $\Rightarrow$ 収束点列」は成り立つとは限らない

- **定義:** 距離空間 (X, d) は**完備距離空間**
 $\iff$ 任意のコーシー列が収束する

完備でない距離空間の例1

- $X =$ 実数の開区間 (a,b) , $d(x,y)=|x-y|$

例: $(0,1)$ 区間の点列 $a_k = 1/k$ は

コーシー列であり, 0 に収束するが, $0 \notin X$

- $X =$ 有理数全体の集合, $d(x,y)=|x-y|$

例: 「 $a_k = \sqrt{2}$ の小数点 k 桁まで」は

コーシー列であり, $\sqrt{2}$ に収束するが, $\sqrt{2} \notin X$

- $X =$ 区間 $[-1,+1]$ 上の実数値連続関数全体 $C[-1,+1]$

$$d(f, g) = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$$

コーシー列の収束先が非連続関数になる例が存在

完備でない距離空間の例2

- $X =$ 区間 $[-1,+1]$ 上の実数値連続関数全体 $C[-1,+1]$

$$d(f, g) = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$$

コーシー列の収束先が非連続関数になる例が存在

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0, \\ kx & 0 < x < \frac{1}{k}, \\ 1 & \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

極限は

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ユークリッド空間の完備性

- **定理:** n 次元ユークリッド空間の
任意のコーシー列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は収束する

証明の概略:

$a_k(i)$ = ベクトル a_k の第 i 成分とおく.

各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し, $a_1(i), a_2(i), a_3(i), \dots$ は数列で, コーシー列

$\therefore a_1(i), a_2(i), a_3(i), \dots$ はある実数 $a(i)$ に収束

$\therefore a_1, a_2, a_3, \dots$ はベクトル $a = (a(1), a(2), \dots, a(n))$ に収束

数列・点列の有界, 非有界

- 定義: 実数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は**有界**
 $\longleftrightarrow$ ある実数 q が存在して, $-q \leq a_k \leq +q$ ($k=1,2,\dots$)
- 定義: 実数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は**非有界** $\longleftrightarrow$ 有界ではない
 $\longleftrightarrow$ 任意の実数 q に対し, ある k が存在して, $-q > a_k$ または $a_k > +q$
- 定義: n 次元実ベクトルの列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は**有界**
 $\longleftrightarrow$ ある実数 q が存在して, $d(0, a_k) = ||0 - a_k|| \leq +q$ ($k=1,2,\dots$)
- 定義: n 次元実ベクトルの列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は**非有界**
 $\longleftrightarrow$ 有界ではない

命題: n 次元実ベクトルの列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は, 収束するならば有界

※ 有界でも収束しない例が存在: $a_k = (-1)^k$

部分列と極限

- 点列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ の部分列
 - 点列の一部を抜き出した点列 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots$
ただし $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots$

命題: 点列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ が c に収束するとき,
その任意の部分列も c に収束する.

(証明の概略) 収束の定義を使えばすぐ分かる. ■

定理: 任意の有界な数列は, 収束する部分列をもつ.

(証明は結構大変)

この定理を使うと, 以下を得ることが可能

定理: 任意の有界な n 次元ベクトルの列は, 収束する部分列をもつ.